# MATHEMATISCHES

# WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

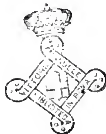
SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALITISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN

BAUMEISTER IN BERLIN.



I. BAND

A—B.



BERLIN

VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN

1858.

## Berichtigungen zum ersten Bande.

Pag. 1 rechts, Z. 7 v. n. hinter **Morgenpunkt** setze: (*M*)
" 2 rechts, Z. 6 v. o. statt: sein Parallelkreis schneide lies: sein Parallelkreis als Grundfläche, der Erdmittelpunkt als Spitze eines Kegels gedacht, schneide
" 2 rechts, Z. 4 v. n. statt $\angle P'CS$ lies: $\angle P'CS''$
" 4 links, Z. 7 v. o. statt *AD* lies: *AD* (Fig. 3)
" 7 Fig. 10 statt des Buchstabens *E* (über *E'*) setze *E'*
" 7 rechts, Z. 5 v. n. statt $> 2i$ lies: $> 2\alpha$
" 8 links, von Z. 7 v. u. ab, und weiter bis rechts, Z. 1 v. o. statt *Arc s*, *Arc 2s* u. s. w. lies: *Arc sin s*, *Arc sin 2s* u. s. w.
" 8 rechts, Z. 3 v. o. statt Gl. 1 lies: Gl. 2
" 10 rechts, Z. 1 v. n. statt $\times B$ lies: $\times \frac{1}{B}$
" 11 links, Z. 3 v. o. statt $\times B$ lies: $\times \frac{1}{B}$
" 12 Fig. 11, in der geraden Linie *A'Cd* setze an den Endpunkt bei *d* den Buchstaben *A*
" 12 rechts, Z. 17, 18 und 19 v. o. jedesmal statt *a* lies: *d*
" 20 Fig. 21 bezeichne den Stern im Bogen *AP* mit *S*, und schreibe statt des rechts stehenden *Q* den Buchstaben *q*
" 21 Fig. 22. Die durch *C* geführte punktirte Linie ist im unteren Endpunkt statt mit *M* mit *M'* zu bezeichnen, der obere Endpunkt bleibt *M*, man zeichne noch den Bogen *PM* und setze in den Punkt des Bogens *PD*, in welchem die Bogen von *M* und *B* aus zusammentreffen, den Buchstab *A*
" 22 rechts, Z. 21 v. o. statt einfallen, an lies: einfallen, ist die Zerstreuung an
" 24 links, Z. 16 v. n. statt $a'b' = ab$ lies: $a'b' \mp ab$
" 25 links, Z. 9. v. o. statt $\delta + \epsilon = \omega'$ lies: $\delta + \epsilon = \delta' + \epsilon' = \omega'$
" 26 rechts, Z. 11 v. n. statt *r* lies: *R*
" 27 links, Z. 5 v. o. statt $2(\sqrt{2r^2 - r})$ lies: $2(\sqrt{2r^2} - r)$
" 47 links, Z. 10 v. o. statt $\angle CHF$ lies: $\angle EHF$
" 47 rechts, Z. 11 v. o. hinter $(b + c - a)$ setze noch eine Klammer: ]
" 55 rechts, Z. 4 v. n. statt $\sqrt{\frac{15}{b}}$ lies: $\sqrt{\frac{15}{6}}$
" 56 links, Z. 16 v. o. statt

$$tg\,\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^2} - 1} \quad \text{Denn da } tg\,\varphi \text{ immer lies:}$$

$$sec\,\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^2}} \quad \text{Denn da } sec\,\varphi \text{ immer}$$

" 61 links, Z. 12 v. n. statt $y = \frac{-cd - af}{bd + ae}$ lies $y = \frac{-cd - af}{bd + ae}$
" 67 rechts, Z. 17 v. n. statt $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - a^2}$ lies: $\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$
Z. 14 v. n. statt $AB + AG = HI$ lies: $AB \times AG = AH \times AB = HI$
" 69 rechts, Z. 6 v. n. statt *AB* lies: $AB = a + b$
Fig. 56 fehlt der Buchstab *C* in der Mitte von *AB*, links von *D*
" 71 rechts, Z. 17 v. o. statt denselben lies: diesen Functionen

Pag. 86 rechts, Z. 23 v. o. statt $= \dots g'' : g' : g$ lies: $= \frac{1}{g} : \frac{1}{g'} : \frac{1}{g''} \dots$

„ 86 rechts, Z. 18 v. u. statt $= \dots S'' : S'$ lies: $= 1 : \frac{1}{S'} : \frac{1}{S''} \dots$

„ 87 rechts, von Z. 13 bis 22 statt $L$ lies: $L'$

„ 88 links, Z. 4 v. o. statt bei 10 lies: bei dem Theilstrich 10
Z. 9 v. o. statt $= 2gl$ lies: $= 2ql$

„ 98 links, Z. 3 v. o. statt das lies: dieses
Z. 11 v. u. statt Wasser $= 1{,}6p$ lies: Wasser $= p + p' = 1{,}6p$
Z. 1 v. u. statt $= \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18}$ setze: $\frac{P}{g} = \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18}$

„ 98 rechts, Z. 2 v. o. statt gezeichneten lies: bezeichneten

„ 100 links, Z. 6 v. u. statt hat $y$ lies: hat man $y$

„ 104 links, Z. 16 v. o. statt des Mantels lies: des Mantels Fig. 75

„ 109 links, Z. 21 v. u. statt die gegebene lies: die No 5 gegebene

„ 115 links, Z. 21 v. u. statt unveränderliche lies: nrveränderliche

„ 118 rechts, Z. 2 v. o. statt $D - E$ lies: $D - A$

„ 122 Z. 7 v. o. statt $D + 4C + 6B + A + d$ lies: $D + 4C + 6B + 4A + d$

„ 137 Fig. 88. In den Durchschnittspunkt der Linien $CS''$ und $AD$ setze den Buchstaben $I$ und in die Verlängerung von $AI$ den Buchstaben $K$

„ 138 links, Z. 19 v. u. statt niedriger als lies: zu Mitternacht weniger tief als

„ 139 Fig. 90. In den Durchschnittspunkt der beiden Bogen $SZ$ und $HOh$ setze den Buchstaben $A$

„ 140 rechts, Z. 14 v. o. statt wenn die Sonne lies: Wenn nämlich die Sonne

„ 168 links, Z. 22 v. u. statt müfste lies: mufste

„ 223 rechts, Z. 16 v. o. statt $x = h$ lies: $x = H$

„ 224 links, Z. 18 v. o. statt zugleich $1 - \sqrt{\frac{1}{m}}$ lies: zugleich $\sqrt{\frac{1}{m}}$

„ 229 links, Z. 3 v. u. statt $t' = t''$ lies: $t' - t''$

„ 272 links, Z. 9 v. u. vor: „Man hat für" etc. setze: 7

„ 272 rechts, Z. 1 v. o. für $V$ setze $v$
Z. 3 v. o. für $Vt$ setze $vt$

„ 341 Fig. 210 fehlt im Endpunkt der Ordinate in $D$ der Buchstab $B$

„ 341 rechts, Z. 6 v. o. statt: wo $a$ die grofse und $c$ die kleine Axe ist, lies: wo $a$ die halbe grofse und $c$ die halbe kleine Axe ist

„ 342 links, Z. 5 v. u. statt grofse Axe lies: Hauptaxe

„ 403 links, Z. 2 v. u. statt dieser beiden lies: diesen beiden.

---

# An die geehrten Leser.

Bei dem Wörterbuch, dessen erstes Heft vorliegt, soll es mein Bestreben sein, dem Inhalt des Titelblattes nach allen Richtungen möglichst zu entsprechen, und die mathematischen Wissenschaften nicht nur an sich, sondern auch in ihrer Anwendung auf andere Wissenschaften abzuhandeln nnd zugleich die Theorie mit der Praxis zu verbinden.

Fast alle Wörterbücher haben Artikel, die in blofser Wort-Anführung des Gegenstandes bestehen und für die ausführliche Sacherklärung auf einen späteren Artikel verweisen. Nicht nur, dafs solcher Gebrauch für den Leser lästig nnd zeitraubend ist, sondern überhaupt nicht angemessen, wenn das Wörterbuch, weil es von gröfserem Umfang, nur nach und nach erscheinen kann. Bei dem vorliegenden Wörterbuch ist dies vermieden, nnd eine Berufung findet immer nur auf voranstehende Artikel statt, und jeder Artikel ist als ein in sich Vollständiges abgehandelt.

Am Schlufs des Art: Ablenkung der Magnetnadel stehen die Worte: Vergl. Abweichnng der Magnetnadel; sie sollen nnr daranf aufmerksam machen, dafs Ablenkung und Abweichung Zweierlei sind.

In dem Art: Abplattnng der Erde, der ohne Hülfe eines anderen Art. verständlich sein soll, heifst es pag. 13 am Schlufs des ersten Satzes: (das Nähere s. unter Gradmessungen, Ellipsoid), d. h. wenn es beliebt, bei Gelegenheit der erzählend hier aufgeführten Dimensionen auf der Erdoberfläche genanere Kenntnifs von denselben zn nehmen, s. den angeführten, erst noch folgenden Art. Am Schlnfs des zweiten Satzes heifst es: (das Nähere s. n. Pendelschwingungen), d. h. zum Verständnifs des Art: Abplattnng ist das über Pendelschwingungen Gesagte gerade genng; wer aber bei Durchlesnng desselben Neigung hat, Ausführlicheres darüber zu lesen, findet dies in dem noch folgenden Art: Pendelschwingungen. Dieselbe Bedeutung haben die Worte am Schlufs des Art: (das Nähere s. u. Centrifugalkraft).

Viele Artikel bedingen, wenn sie Anspruch auf Vollständigkeit machen wollen, umfangreiche Abhandlungen. Solche von Anfang bis Ende durchzulesen, ermüdet; und wenn man, wie dies so häufig vorkommt, nur einen sehr kleinen Theil des Dahingehörigen aufsucht, so braucht man in der Regel gar zu viel Zeit, ehe man das Verlangte auffindet. Diesen, in allen wissenschaftlichen Wörterbüchern mehr und weniger vorkommenden Uebelstand werde ich nach Kräften zu umgehen suchen. So z. B. könnte der pag. 6 begonnene Art: Ablenkung des Lichtstrahls eine bedeutende Ausdehnung erhalten, ich habe dagegen nur das Allgemeinste des Gegenstandes geschrieben, und den Art: Achromatisch, pag. 22, als unmittelbare Fortsetzung desselben behandelt. Dafs ich die Lehre hier nur auf das Prisma bezogen habe, liegt wiederum darin, dafs ich dem Art: Achromatisch nicht mehr Umfang geben wollte, und das Weitere dem Art: Linse vorbehalte, der bekanntlich auf die Lehre vom Prisma sich gründet, welches Wort aber alphabetisch wieder hinter Linse gehört.

Ferner werde ich, ohne der Deutlichkeit zu schaden, der möglichsten Kürze mich befleifsigen, und damit der Umfang in dem möglich geringsten Verhältnifs zum Inhalt stehe, sind die noch gut lesbaren Typen comprefs gesetzt. Auf die Correctur wird Fleifs gewandt und der Herr Verleger scheut keine Kosten an einer guten Ausstattung. Voraussichtlich wird alle zwei Monat ein Heft erscheinen.

Auf dem Umschlag jedes Heftes befindet sich als Inhaltsverzeichnifs die Reihenfolge der Artikel aufgeführt, am Schlufs jedes Bandes soll aufserdem ein Sachregister beigegeben werden, aus welchem die nicht alphabetisch geordneten Gegenstände nach paginis aufzufinden sind.

Berlin, im Januar 1857.

**L. H.**

# A.

$\alpha$ in hydraulischen Formeln bezeichnet den **Contractions-Coefficient**: Es sei $g$ die Höhe (etwa $15^{5}/_{8}$ preufs. Fufs), in welcher ein in der Nähe der Erdoberfläche befindlicher Körper im luftleer zu denkenden Raum in der ersten Secunde frei herabfällt, $h$ die Höhe, welche er überhaupt fällt, so ist seine Endgeschwindigkeit $2\sqrt{g}.\ \sqrt{h}=7{,}9\sqrt{h}$. Beim Fallen des Wassers durch Ausflufsöffnungen, welche um die senkrechte Höhe $h$ vom Wasserspiegel entfernt sind, wird nun der Coefficient 7,9 vermöge der Contraction des Wassers in den Oeffnungen, je nach deren Gestalt und Gröfse bald mehr bald weniger vermindert, und der somit verminderte Coefficient $\alpha$, bei welchem $\alpha\sqrt{h}$ die richtige Endgeschwindigkeit des Wassers ist, heifst **Contractions-Coefficient**.

**Abacus** ist Tabelle; z. B. A. Pythagoricus die bekannte Einmaleins-Tafel.

**Abänderungsflächen** sind bei einer Krystallform diejenigen Flächen, welche die als Grundform zu denkende einfache Krystallform zu einer zusammengesetzten Form abändern. Sie sind entweder **Abstumpfungsflächen** von Ecken und Kanten, wenn statt einer Ecke oder einer Kante, welche der Grundform angehört, eine Fläche sich vorfindet. Oder **Zuschärfungsflächen**, wenn statt einer Kante oder einer vierflächigen Ecke zwei Flächen sich vorfinden, die unter einer stumpferen Kante zusammentreffen, so dafs statt einer einzigen Kante oder einer Ecke der Grundform 3 Kanten entstehen. Oder **Zuspitzungsflächen**, wenn statt einer Ecke eben so viele neue Flächen, wie zur Bildung jener Ecke der Grundform gehören, unter einer neuen stumpferen Ecke zu sammentreffen.

**Abbreviren der Brüche.** Man abbrevirt einen Bruch, wenn man dessen Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt, wobei er in seinem Werth ungeändert bleibt. Denn wie $1=\frac{1}{1}=\frac{7}{7}=\frac{14}{14}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 7}$, so ist auch z. B. $\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{2\cdot 7}=\frac{10}{14}$ und $\frac{36}{8}=\frac{9\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{9}{2}$. Also Brüche behalten ihren Werth, wenn ihre Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt, oder mit einerlei Zahl dividirt werden. Die letztere Operation heifst einen Bruch **abbreviren**, **heben**, **vereinfachen**, ihn **auf kleinere Zahlen bringen**, oder **auf kleinere Zahlen reduciren**.

**Abdachung, Abfall, Plongée** bei einer Brustwehr. Der Unterschied der Höhe zwischen der vorderen Oberkante der Krone und der höheren Hinterkante, der **Feuerlinie** derselben. Die A. beträgt auf den laufenden Fufs horizontaler Kronenbreite 1 bis 2 Zoll.

**Abend (Abendpunkt, Westen, Westpunkt, Occidens)** eines Orts der Erde ist der in der Himmelskugel belegene Durchschnittspunkt zwischen dem Horizont des Orts und der Aequator-Ebene nach der Richtung des Untergangs der Sonne und aller Gestirne, und in dem diese wirklich untergehen, wenn sie in der Aequator-Ebene sich befinden; der entgegengesetzt liegende Durchschnittspunkt beider Ebenen heifst **Morgen, Morgenpunkt**.

Die beiden Pole haben weder A. noch M., denn deren Horizonte sind $\neq$ der Aequator-Ebene, schneiden also dieselbe nicht; alle Gestirne, die unterhalb des Aeq. stehen, gehen den Polen nicht auf, und die oberhalb des Aeq. nicht unter,

sondern bewegen sich in Kreisen, die mit dem Horizont $\parallel$ laufen.

In jedem andern Ort der Erde sieht man nach dem A. in der auf der Meridian-Ebene des Orts normalen Linie, wenn man den Nordpol znr Rechten hat. Denn da der A. in der Aeq.-Ebene auf der scheinbaren Himmelskugel, also unendlich weit von der Erde entfernt ist, so ist in jedem andern Ort der Erde die Richtung nach dem A. der in der Aeq.-Ebene befindlichen Richtung nach demselben A. $\parallel$.

Aus diesem Grunde ist der geometrische Ort aller A. und aller M. für alle Orte der Erde eine und dieselbe unendlich weit entfernte Kreislinie; für beide Erdpole ist jeder einzelne Punkt dieser Kreislinie der A. nnd der M.

Von Abend nach Morgen ist die Bezeichnung der Richtung über Mittag; also, das Gesicht nach Mittag gekehrt, von Rechts nach Links.

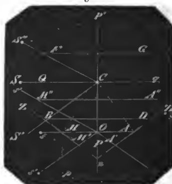
**Abenddämmerung**, die Erleuchtung der Erdoberfläche nach Sonnen-Untergang vermöge der astronomischen Strahlenbrechung (s. diese u. astronomische Dämmerung).

**Abendseite**, die durch die Meridian-Ebene eines Ortes der Erde abgetheilte Hälfte der Himmelskugel, in welcher der Abendpunkt liegt; in deren Horizont gehen alle Gestirne unter, während sie in dem Horizont der Morgenseite aufgehen.

**Abendweite** eines Gestirns. Der Bogen im Horizont eines Orts (O) der Erde als Abstand zwischen dem Untergangspunkt des Gestirns und dem Abendpunkt, sowie der Bogen des Abstandes zwischen dem Aufgang des Gestirns nnd dem Morgenpunkt die Morgenweite (M) des O. ist. Ein Stern, dessen Parallelkreis in der nördl. Halbkugel liegt, hat nördliche, in der südl. Halbkugel südliche M. und A. nnd beide, M. nnd A. desselben Sterns sind einander gleich grofs. Ein in der Ebene des Aequators liegender Stern hat beide Weiten = Null, weil er im Morgenpunkt auf- nnd im Abendpunkt nntergeht. Je weiter südlich vom Aequator der Parallelkreis des Sterns liegt, desto gröfser ist die südliche M. und A. Je weiter nördlich der Parallelkreis des Sterns sich befindet, desto gröfser ist seine nördl. M. und A.

Denn es sei $Qq$ der Aequator, $P$ der Nordpol, $P'$ der Südpol, $O$ ein Ort der Erdoberfläche, welche um $PP'$ nach der Richtung $qCQ$ sich umwälze. Ist $S$ ein Gestirn in der Aequator-Ebene $Qq$, so ist die Linie $Os \parallel CS$ die Richtnng desselben Sterns in $O$ (vergl. Abend), weil $S$ unendlich weit von $C$ und $O$ entfernt ist;

Fig. 1.




er geht also in dem Morgenpunkt $M$ auf und in dem Abendpunkt $A$ unter. $Zs$ und $Z'a$ seien die Horizonte von $O$ in $M$ und $A$.

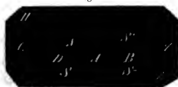
Der Stern $S'$ befinde sich in der nördlichen Halbkugel, sein Parallelkreis schneide die Erde in $BD$, so ist die Linie $Os' \parallel CS'$ die Richtung des Sterns $S'$ in $O$.

Liegt der Parallelkreis gerade vom Nordpol so weit entfernt als die Polhöhe des $O$ beträgt, so fällt M. und A. jede 90° in einem Pnnkt nämlich in dem Nordpunkt des Horizonts zusammen, der Tagebogen des Sterns ist 360°; er ist also der ganze Tageskreis, der den Horizont im Norden tangirt, der Stern ist der äufserste der Circumpolarsterne des $O$.

Denn zieht man $Mp$ in $M \parallel P'P$, so ist $\angle sMp$, der Winkel, den die Richtung der Erdaxe mit dem Horizont des Orts bildet, die Polhöhe, $\angle S'Cs = \angle s'Os$ die Entferuung des Sterns $S'$ vom Pol $P$. Ist nun $\angle s'Os = \angle A'Os = \angle sMp$, so ist $OA' \parallel Mz$, daher $\angle A'Os = \angle OsM = OsA$, folglich $Os' \parallel Z'a$, diese mithin die Richtung des Sterns $S'$ in $A$; der Stern $S'$ tangirt also in seinem tiefsten Stande den Horizont in $A$, und geht nicht unter, sondern von da ab wieder in die Höhe.

Der Stern $S''$ in der südlichen Halbk. schneidet mit seiner Richtungslinie die Erde in dem Parallelkreise $FG$, $Os''$ ist dessen Richtung in $O$. Liegt der Parallelkreis $FG$ gerade vom Südpol $P'$ so weit entfernt, als die Aequatorhöhe $ZMs$ des Orts, ist also $\angle P'CS = \angle ZMs$, so gebt der Stern $S''$ nicht mehr auf, er berührt nnr zn Mittage den Horizont unterhalb in dem Meridian des Orts.

Fig. 2.



Bezeichnet *Hh* den Horizont eines Orts *O* der nördl. Halbkugel, *Qq* den Aequator, beide Bogen in der westl. Halbkugel belegen, so dafs deren Durchschnittspunkt *A* der Abendpunkt von *O* ist, so geht die Sonne, wenn sie im Aequator steht, in *A* unter; hat sie die nördliche Abweichung *ND* (d. h. befindet sich im Parallelkreis *NS'*, in dem die Sonne sich augenblicklich bewegt, um den Bogen *ND* vom Aequator *Qq* nördlich entfernt), so bewegt sie sich nach *S'N*, sie geht erst später in *N* unter und *NA* ist die nördl. A.; hat die Sonne die südl. Abweichung *SD*, so geht sie schon in *S''* unter und *AS''* ist die südl. A. Liegen die Bogen in der östl. Halbkugel, dann ist *A* der Morgenpunkt, die Bogen *NS'*, *Aq* bleiben über dem Horizont, die Sonne hat die Bewegungen nach *DA*, *NS'*, *SS''*, die Punkte *A*, *N*, *S''* sind die Aufgangspunkte, in *N* geht die Sonne früher, in *S''* später auf als in *A*, und *NA*, *S''A* sind die Morgenweiten, welche den A. gleich sind.

In dem sphärischen, bei *D* rechtwinkligen $\triangle ADN$ ist *DN* die Abweichung der Sonne, die für einen bestimmten Tag bekannt ist und am 21. Juni im Wendekreise 23½° beträgt, $\angle DAN$ ist die Aequatorhöhe des Orts (d. h. der Winkel, den die Richtung des Aequators mit dem Horizont des Orts bildet; für *O*, Fig. 1, $\angle sMZ$, für Berlin 37° 28' 30'').

Man hat also $\sin AN = \frac{\sin DN}{\sin DAN} = \frac{\text{Sin Abweichung}}{\text{Sin Aequatorhöhe}}$

Für die südliche Abweichung $DS = BS''$ der Sonne hat man in dem sphärischen $\triangle ABS''$ $\sin AS'' = \frac{\sin BS''}{\sin DAN}$ weil $\angle DAN$ und $BAS''$ als Scheitel $\angle$ gleich sind.

Am längsten Tage ist $DN = 23° 30'$, mithin für Berlin $\sin AN = \frac{\sin 23° 30'}{\sin 37° 28' 30''}$ woraus die nördliche Morgenweite $AN = 40° 57'$. Eben so viel beträgt die Abendweite.

Für den kürzesten Tag hat man dasselbe $\triangle$ und dieselbe Gröfse der südlichen M. und A.

**Aberration, Abirrung des Lichtes.** Die Erscheinung, dafs alle Fixsterne eine Bewegung zu machen scheinen und zwar in Ellipsen, deren grofse Axe $\perp$ der Ekliptik = 40,5 Sec. beträgt, deren kleine Axe aber um so gröfser ist, je weiter der Stern von der Ekliptik entfernt steht.

Fig. 3.

Diese scheinbare Bewegung hat ihren Grund in dem # der Geschwindigkeiten, von denen die des Lichts die eine und die der Erde in der Ekliptik die andere Seite bildet. Bedeutet *AB* die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, = 4,14 Meilen per Secunde, *DA* die Geschw. des Lichts = 42000 Meilen per Sec., so kommt dem von *A* nach *B* sich bewegenden Beobachter der Lichtstrahl *EB* mit einer Geschw. in dem Verhältnifs *EB* : *AB* entgegen.

Denn da der in *A* auf der Erde befindliche Beobachter seine Bewegung mit der Geschw. *AB* nicht wahrnimmt und also sich einbildet, still zu stehn, so würde ein in der Richtung *AB* befindlicher still stehender Lichtpunkt ihm mit der Geschw. *BA* entgegen zu kommen scheinen.

In Bezug auf solche Augentäuschung erinnere ich an die Ueberraschung, wenn man während Hochwasser und Treibeis auf einem schnell strömenden Flufs in einem Boot sich befindet und zwischen 2 Eisschollen geräth: In demselben Augenblick, wo dies geschieht, bewegen sich die Ufer mit allen auf dem Lande befindlichen Gegenständen stromaufwärts mit der Geschw. des Stroms, während man selbst mit dem Treibeise, dem Wasser und allen auf dem Flufs herabschwimmenden Körpern still zu stehen glaubt, und dieser grofsartige Anblick währt bis zu dem Augenblick, in dem man sich aus der Klemme losgemacht hat, von wo ab man seine eigene Bewegung auf dem Strome wahrnimmt. Ein bei dunkler Nacht sichtbar schnell herbei kommender Eisenbahnzug scheint, während der Zeit, dafs ein Blitz herabfährt, still zu stehen; denn die Zeit, während dies geschieht, ist so klein, dafs die Bewegung des Zuges als Null angesehen werden kann; da aber die Erscheinung des Blitzes vermöge des Eindrucks auf unser Auge viel länger zu dauern scheint, so dauern auch alle Erscheinungen, die mit dem Blitz in Zusammenhang stehen, also auch der scheinbare Stillstand des Zuges dieselbe längere Zeit.

Bei neben einander und in entgegengesetzter Richtung fahrenden Zügen scheint es dem Fahrenden, wenn er auf den zweiten Zug sieht, dafs dieser die doppelte Geschw. hat, und dafs er selbst in Ruhe sich befindet.

Ein Fixstern in der Richtung *AD* von der Erde in einem Ort *A* der Ekliptik behält nun wegen seiner unermefslichen Weite von der Erde in allen Punkten ihrer Bahn dieselbe mit *AD* parallele Richtung, also in *B* die Richtung *BE* ∦ *AD*. Während die Erde von *A* nach *B* sich bewegt, sendet der Stern sein Licht nach *B* in der Richtung und mit dem Wege *EB*, wie aber dem in *A* befindlichen Beobachter ein in *AB* still stehendes Licht scheinbar mit der Geschw. *BA* entgegen kommen würde, so kommt ihm das in *E* still stehende Licht mit der Geschw. *ED* scheinbar entgegen; der Lichtstrahl aus *E* hat also beide Geschw. *EB* und *ED* als Componenten und er scheint in der Resultante *EA* herabzukommen. Es scheint also in jedem Ort der Erdbahn der Stern in der Richtung *AE*, also in der Richtung der Bewegung der Erde um den $\angle DAE$, der bei dem Verhältnifs von $AE:DE = 20{,}25''$ beträgt, voraus sich zu befinden. Ein Stern im Pol der Ekliptik steht auf allen Punkten der Erdbahn senkrecht, er ist also in allen Punkten derselben scheinbar um 20,25 Sec. voraus, er scheint also nicht in dem Pol selbst, sondern um 20,25" von demselben entfernt sich zu befinden und beschreibt daher jährlich einen Kreis von 20,25" Halbmesser.

Fig. 4.




Ein in der Ekliptik der Erdbahn befindlicher Stern beschreibt während des jährlichen Umlaufs der Erde eine gerade Linie von 40,5 Sec. Länge hin und zurück.

Es sei *C* der Stand der Sonne, *ABDE* die Erdbahn, der Stern *S* befinde sich mit dieser Bahn in einerlei Ebene, so sind die Richtungen *AS*, *BS*, *DS*, *ES* einander ∦. Befindet sich die Erde in *A*, so ist deren Bewegung der des Lichts aus *S* geradlinig entgegen, das ∦ der Geschw. fällt in einerlei Linie zusammen und eine *A* findet also hier nicht statt. Dagegen entfernt sich die Richtung der Erdbahn immer mehr von der Richtung des Lichts aus *S*, je weiter sie sich von *A* entfernt, es wächst also die *A* des Lichts, je mehr die Erde dem Punkt *B* sich nähert. Hier ist die Erdbewegung mit der des Lichts aus *S* normal und *S* scheint um den $\angle SBF = 20{,}25$ Sec. voraus, also in *F* zu stehen. Je weiter *S* nach *D* kommt, desto mehr nimmt $\angle SBF$ ab, bis er in *D* = Null ist, und *DS* mit *AS* ∦ läuft. Von *D* nach *E* erhält die Erdbahn eine immer gröfsere Abweichung von der Richtung des Lichts aus *S* bis in den Punkt *E*, wo sie das Maximum $= 90°$ erreicht, und *S* scheint um den $\angle SEG = 20{,}25''$ voran, also in *G* zu stehen; aber diese scheinbare Richtung schliefst sich von nun ab immer mehr wieder der wirklichen Richtung des Lichtstrahls an, bis sie in *A* mit derselben einerlei ist.

Während des jährl. Umlaufs der Erde um die Sonne scheint also der Stern *S* die geradlinige Bewegung $FBS + BEG = 40{,}5$ Sec. zu machen, und zwar von der Opposition *B* bis zur Conjunction *E* macht er die Bewegung von Ost nach West, von *E* aber bis *B* die von West nach Ost zurück.

Mit Hülfe dieser Figur kann man sich die Erscheinung der *A* auch folgender Art versinnlichen: Gesetzt, die Erde empfinge den geraden Lichtstrahl *SB*; kommt sie hierauf nach einem halben Jahr in den Punkt *E*, so braucht der Lichtstrahl aus *S* noch die Zeit für den Weg *BE*, und während dieser Zeit rückt die Erde von *E* nach *A* weiter und trifft in *e* in dem Augenblick ein, wo der Strahl den Punkt *E*, also auch den Punkt *e* erreicht, und somit wird der Stern *S* bei *E* um den Bogen *Ee* mehr westlich gesehen. Der Erdbahndurchmesser beträgt im Mittel 41.325000 Meilen, die Geschw. des Lichts im Mittel 42000 Ml., mithin die Zeit, in welcher der Lichtstrahl den Durchmesser *BE* durchläuft $\frac{41.325000}{42000} = 984$ Sec. $= 16{,}4$ Min. In dieser Zeit durchläuft die Erde einen Bogen $= 984 \times 4{,}14 = 4073{,}76$ Ml., und diesem ent-

spricht ein Centri $\angle = x$ uach der Proportion

$$41.325000 \times n : 4073{,}76 = 360^\circ : x$$

woraus $x = 0{,}1129626^\circ = 40{,}666$ Sec., eine Uebereinstimmung, wie sie nur immer zu erwarten ist, nnd wobei noch bemerkt werden mufs, dafs aus verschiedenen Beobachtungen verschiedener Astronomen die Angabe für die *A* von 20" bis 20,7" schwankend ist.

Je weiter die Erde von *E* ab nach *A* oder *D* hin sich befindet, desto geringer ist ihre Entfernung von ihrem ∤ mit *EB* in dem oberen Halbkreise gewesenen Standpunkt, einen desto geringeren Weg hat der Lichtstrahl zwischen beiden Erdstandpunkten zurück zu legen, nnd desto geringer wird die A.; in *A* nnd *D* ist sie folglich = Null.

Wenn der Stern weder im Pol noch in der Ebene der Ekl., sondern zwischen beiden unter einem $\angle \alpha$ zwischen 90° und 0° steht, so denke man Fig. 3 als Rhomboid, nnd $\angle DAB = \alpha$; dann hat man:

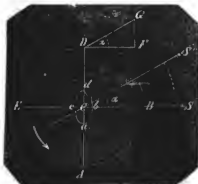
$$AE : DE = Sin\, ADE \text{ (oder } Sin\, DAB) : Sin\, DAE$$

Da nun bei dem verhältnifsmäfsig sehr geringen Unterschied von *DE* gegen *AE*, für *AE* die Länge *AD* gesetzt werden kann, so hat man äufserst nahe

$$AD : DE = sin\, DAB : sin\, DAE$$

d. h. die Geschw. des Lichts zur Geschw. der Erde in ihrer Bahn, wie der *Sin* der Schiefe des Sterns gegen die Ekliptik zum *Sin* des Aberrationswinkels, nnd dieser Winkel ist = 20,25. *Sin* $\alpha$ (in Secunden).

Fig. 5.




Es sei nun *ABDE* die Ekliptik, der Stern *S* stehe über derselben unter der Schiefe $S'CS = \alpha$, in senkrechter Projection über der Linie *CS*, so fällt in *B* und *E* der Lichtstrahl senkrecht auf die Richtung der Erdbahn, daher ist in *B* die $A. = Cd = 20{,}25''$ und in $E = Ca = 20{,}25''$. In *A* und *D* würde die A. = Null sein, wenn *S* in der Ebene, nnd 20,25" wenn *S* senkrecht über *C* stände. Während aber die Erde in *D* die Richtung *FD* hat, trifft sie der Strahl in *D* unter dem $\angle GDF = \alpha$. Die *A.* in *B* und in *D* verhalten sich also wie $GD : GF$. Fällt man also von *a* und *d* auf die Richtung *CS'* Lothe, und nimmt $Ce = Cb =$ den dadurch erhaltenen Abschnitten auf *CS'*, so erhält man die kleine Axe *be* der Ellipse, in welcher der Stern *S* innerhalb des Umlaufs der Erde um die Sonne sich zu bewegen scheint.

Die Sonne steht in der Ebene der Ekliptik, sie wird also überall von der Erde aus um 20,25 Sec. weiter vorgerückt erscheinen, als ihr wirklicher Standpunkt ist.

**Abfall**, s. Abdachung.

**Abflufsgraben** (-canal, -röhre, -rinne). Ein Graben etc., der von einem Behälter geneigt abgeht, um zur Vermeidung dessen Ueberfüllung das Wasser abfliefsen zu lassen.

**Abflufshöhe.** Die senkrechte Entfernung der Wasserspiegel am Anfang und am Ende des Abflufsgrabens, -canals etc.

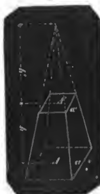
**Abgekürzte Multiplication.** Es kann bei der M. in der Praxis vorkommen, dafs man nur wenige Decimalstellen im Product nöthig hat, indem die folgenden ihres geringen Werthes wegen gleichgültig sind; dann bedient man sich mit Vortheil der abgekürzten oder verkürzten M. Z. B. das Product von $0{,}576 \times 0{,}3854$ hat 7 Decimalstellen nnd ist 0,2219904. Hätte man aber nur 3 Decimalstellen nöthig, so rechne man statt:

| | | |
|---:|:---:|---:|
| 0,3854 | | 0,3854 |
| 0, 576 | folgend | 0, 576 |
| 23124 | | 23 |
| 26978 | | 269 |
| 19270 | | 1927 |
| 0,2219904 | | 0,2219 |

Nämlich man rechnet der Genauigkeit wegen eine Stelle mehr; bemerkt, dafs die 6 in der dritten Stelle des Multiplicators mit der 3 in der ersten Stelle des Multiplicandus die vierte Stelle im Product giebt, um aber diese genau zu erhalten, zählt man die im Sinne behaltene Zahl aus der Multiplication der vorhergehenden 8 mit der 6, also aus der 48, und zwar nicht die 4 hinzu, sondern, weil die 48 der 50 näher als der 40, eine 5 und spricht: $6 \times 8 = 48$; 5 im Sinn; $6 \times 3 = 18$, hierzu 5 sind 23. Für die zweite Productenreihe multiplicirt 7

in der zweiten Stelle mit 8 in der zweiten Stelle, giebt die vierte Stelle im Product; sprich: 7×5 = 35; 3 im Sinn; 7×8 = 56, hierzu 3 sind 59 u. s. w. Das vollständige Product ist 0,2219. Da aber nur 3 Stellen gebraucht werden, so nimm 0,222, weil 9 näher an 10 als an 0 ist.

Fig. 6.



**Abgekürzte Pyramide.** Der Theil der Pyr. zwischen der Grundebene und einer Durchschnitts-Ebene d. Mantels. Ist diese E. ∦ der Grundebene, so ist die Pyr. gerade abgekürzt, sonst schief abgekürzt.

Sind die parallelen Grundflächen = $A$, $A'$; Höhe = $h$ gegeben, so ist der Inhalt:

$$K = \frac{1}{3} h \left[A + A' + \sqrt{A\,A'}\right]$$

die Höhe der Ergänzungspyramide

$$h' = \frac{A' + \sqrt{A\,A'}}{A - A'} \times h$$

Sind 2 homologe Seiten $a$ und $a_,$ und die untere Grundebene gegeben, so ist der Inhalt:

$$K = \frac{1}{3} A \cdot h \frac{a^2 + a\,a_, + a_,^2}{a^2}$$

die Höhe der Ergänzungspyramide

$$h' = \frac{a_,}{a - a_,} \cdot h$$

**Abgekürzter Kegel.** Der Theil des Kegels zwischen dem Grundkreise und einer Durchschnitts-Ebene des Mantels. Ist diese Ebene ∦ dem Grundkreise, so ist der K. gerade abgekürzt, sonst schief abgekürzt.

Fig. 7.



Sind die Halbmesser $R$, $r$ der parallelen Grund-Ebenen und die Höhe $h$ gegeben, so hat man den Inhalt:

$K = \pi\,(R^2 + Rr + r^2)$

den abgekürzten Kegelmantel:

$F = \pi\,(R + r)\,s = \pi\,(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

**Abgestumpft** in der Stereometrie s. v. w. abgekürzt; als abgestumpfte Pyramide s. v. w. abgekürzte Pyramide.

**Abgestumpfte Ecken** und **Kanten** eines Krystalls sind in einer zusammengesetzten Krystallform die von den Abstumpfungsflächen fortgenommenen Ecken und Kanten der als Grundform des Krystalls zu denkenden einfachen Form. (S. Abänderungsflächen und Abstumpfungsflächen).

**Abgewickelte Linie** s. v. w. Evolute. S. Abwickelung.

**Abhang** (Hydraul). Das Verhältnifs der lothrechten Höhe des geneigten Wasserspiegels in einem Graben, Kanal, Flufs u. s. w. zur waagerechten Länge desselben. Damit das Wasser noch fliefsen könne, ist ein Gefälle erforderlich von mindestens 1 Zoll auf 100 preufs Ruthen (in krautigen und engen Gräben viel mehr), dies giebt den A. $= \frac{1}{14400}$. Im Wegebau sagt man Steigung, das Maximum der Steigung bei Chausseen in Preufsen ist mit 6 Zoll auf 1 Ruthe, also die Steigung $\frac{1}{24}$ festgesetzt (vergleiche Abdachung).

**Abirrung des Lichts** s. v. w. Aberration. (s. d.)

**Abkürzung** eines algebraischen Ausdrucks zur Erleichterung der Entwickelung oder Rechnung geschieht zweckmäfsig in Gleichungen mit zusammengesetzten Coefficienten als:

$$\frac{a + 2b - 3c}{2d - 4f + g}\,x$$

wofür man $A \cdot x$ setzen, die Rechnung durchführen und in das Resultat den ursprünglichen Ausdruck wieder einsetzen kann.

**Ablenkung des Lichtstrahls.** 1. Durch ein Medium von anderer Dichtigkeit. Wenn der Lichtstrahl aus einem dünneren in ein dichteres Medium, wie z. B. aus Luft in Wasser, oder aus einem dichteren in ein dünneres, wie z. B. aus Wasser in Luft tritt, ist die A. die Differenz zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungs∠. Ist $S$ ein Lichtpunkt, der den Wasserspiegel in

Fig. 8.



*a* mit dem **Einfallsloth** *Ee* unter dem Einfallswinkel $EaS=\eta$ trifft, und wird der Strahl nach der Richtung *as*, also unter dem Brechungswinkel $sae=\beta$ gebrochen, so ist $\eta-\beta$ die A. des Strahls. Da ein und dasselbe Medium einen constanten **Brechungsexponenten** $n=\frac{\sin\eta}{\sin\beta}$ hat, der z. B. für Luft und Wasser = 1,336 beträgt, so ist die A. ($\delta$) für jedes $\eta$ und für jedes $\beta$ zu berechnen.

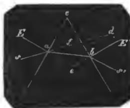
Es sei für den Strahl aus Luft in Wasser der Einfalls $\angle\,\eta=45°$, so ist $1{,}336=\frac{\sin 45°}{\sin\beta}$, woraus $\angle\beta=31°\,57'$, also $\delta=45°-31°57'=13°3'$.

Der gröfste Winkel, den ein Strahl mit dem Einfallsloth *Ea* bilden kann ist 90°. Hierbei geht der Strahl ‡ der Wasserfläche fort, er trifft somit die Fläche nirgend, oder auch, je nachdem man die Sache ansieht, in jedem einzelnen Berührungspunkt mit der Wasserebene, z. B. in *a*. Dann hat man $1{,}336=\frac{\sin 90°}{\sin\beta}$, woraus $\sin\beta=\frac{1}{1{,}336}$ und $\beta=48°\,27^1/_2{}'$.

Ein im Wasser befindlicher leuchtender Punkt wirft nach allen Punkten des Wasserspiegels Strahlen, einer dieser Strahlen nach einem so weit entfernten Punkt des Spiegels, dafs er mit dem Einfallsloth daselbst einen $\angle$ von 48° $27^1/_2{}'$ bildet, tritt nicht mehr aus, er geht längs der Oberfläche fort; alle Strahlen derselben Lage bilden auf dem Wasserspiegel eine Kreislinie, von der aus der Spiegel als eine erleuchtete Ebene erscheint. Man nennt den zu dem Einfalls $\angle=90°$ gehörenden Brechungs $\angle$, hier 48° $27^1/_2{}'$ den **Grenzwinkel**.

2. **Durch ein Prisma.** *A.* Ein Lichtstrahl, der durch ein Prisma geht, erleidet 2 A., eine beim Eintritt und die

Fig. 9.



andere beim Austritt: der Strahl *sa* wird bei *a*, wo er aus der Luft in Glas tritt, nach der Linie *ab* gebrochen, in *b* tritt er aus dem Glase in die Luft und erfährt daselbst die Brechung *abs'* und zwar geschehen beide Brechungen nach einerlei Gesetz, indem, wenn *Ee* und *E'e* die Einfallslothe sind

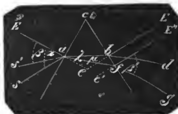
$\sin Eas : \sin bae = \sin E'bs' : \sin eba$

der kleinere Winkel *s'fd*, den der austretende Strahl *bs'* mit dem eintretenden *sa* bildet, ist die A. oder die Total-A. des Lichtstrahls, nämlich

$=\angle Eas - bae + E'bs' - eba = \angle fab + fba = \angle dfb.$

*B.* Es ist von grofser Wichtigkeit, die Bedingungen zu kennen, unter welchen ein Strahl durch ein gegebenes Prisma die kleinste Total-A. erfährt, und diese finden bei jedem Prisma statt, wenn der Strahl so einfällt, dafs der innerhalb des Prisma gebrochene Strahl mit beiden Prismenflächen gleiche Winkel bildet. Es werde der Strahl *sa* nach der Linie *ab*

Fig. 10.



gebrochen, so dafs $\angle cab=\angle cba$, so wird dieser Strahl in *b* wieder gebrochen und tritt nach der Richtung *bd* aus dem Prisma, so dafs $\angle dbE'=\angle saE$ ist. Die Total-A. des Strahls *sa* ist demnach der Winkel, den *sa* und *bd* in ihrer Verlängerung bilden. Bezeichnet man den Einfalls $\angle\,Eas$ mit $\alpha$, seinen Brechungs $\angle\,bae$ mit $\lambda$, so ist auch $\angle abe=\lambda$; und der Austritts $\angle\,E'bd=\alpha$; mithin die Total-A.

$$=\alpha-\lambda+\alpha-\lambda=2(\alpha-\lambda) \qquad (1)$$

*s'* unter dem Einfalls $\angle\,\beta<\alpha$ sei ein zweiter Strahl, der in der Linie *af* unter dem $\angle\,fae=\lambda-\mu$ gebrochen werde, und dieser Strahl trete in *fg* aus, unter dem $\angle E''fg=\beta'$, so ist $\angle afe'=\angle abe+\angle baf=\lambda+\mu$. Die Total-A. des Strahls *s'a* $=\beta-(\lambda-\mu)+\beta'-(\lambda+\mu)=\beta+\beta'-2\lambda$ und es ist nur zu zeigen, dafs $\beta+\beta'>2\lambda$ Nun ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\lambda-\mu)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}=\frac{\sin\beta'}{\sin(\lambda+\mu)} \qquad (2)$$

Löst man den Bogen *s* in eine unendliche Reihe nach den fortlaufenden Potenzen

des ihm zugehörigen Sinus auf, so erhält man

$$Arc(sin=s)=s+\frac{1}{2}\frac{s^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{s^3}{5}+\dots$$

Da $s$ ein ächter Bruch ist, so ist jedes folgende Glied der Reihe kleiner als das ihm znnächst voranstehende, und es können für den vorliegenden Nachweis die ersten beiden Glieder genügen. Man hat demnach äufserst nahe

$$Arc\,(sin=s)=s+\tfrac{1}{6}s^3$$
$$Arc(sin=2\,s)=2s+\tfrac{1}{6}(2\,s)^3$$
$$=2\,(s+\tfrac{1}{6}s^3)+s^3$$
$$Arc(sin=3\,s)=3\,s+\tfrac{1}{6}(3\,s)^3$$
$$=3\,(s+\tfrac{1}{6}s^3)+4\,s^3$$
$$Arc(sin=n\,s)=n\,s+\tfrac{1}{6}(n\,s)^3$$
$$=n\,(s+\tfrac{1}{6}s^3)+\frac{n^3-n}{6}s^3$$

Während also die Sinus in dem Verhältnifs $1:2:3:\dots n$ wachsen, wachsen die zugehörigen Bogen in einem höheren Maafse nnd zwar in dem Verhältnifs

$$1:2+\delta:3+4\delta:\dots\dots n+\frac{n^3-n}{6}\delta$$

wo $\delta$ den Cnbns des einfachen Sinns bedentet.

Bezeichnet man $(s+\frac{1}{6}s^3)$ mit $A$, so ist

$$\frac{Arc\ sin\ 2\,s}{Arc\ sin\ s}=\frac{2\,A+\delta}{A}=2+\frac{\delta}{A}$$

$$\frac{Arc sin\,2\,n\,s}{Arc sin\,n\,s}=\frac{2\,n A+\dfrac{8\,n^3-2\,n}{6}\delta}{n\,A+\dfrac{n^3-n}{6}\delta}$$

$$=2+n^3\frac{\delta}{A}-\frac{n\,(n^3-n)}{6}\frac{\delta^2}{A^2}+\dots$$

wo jedes folgende Glied im absoluten Werth wieder kleiner ist als das ihm voranstehende.

Demnach ist sehr nahe

$$\frac{Arc sin\,2\,ns}{Arc sin\,ns}=2+n^3\frac{s^3}{s+\frac{1}{6}s^3}$$

Die Verhältnisse der Bogen nehmen also bei einerlei Verhältnifs deren Sinus mit den Quadraten der Vielfachen dieser Sinus zu:

$$\frac{Arc\,2\,s}{Arc\,s}<\frac{Arc\,4\,s}{Arc\,2\,s}<\frac{Arc\,6\,s}{Arc\,3\,s}\dots$$
$$<\frac{Arc\,2\,n\,s}{Arc\,n\,s}$$

und zwar ist der Unterschied zwischen den ersten beiden $=3\frac{\delta}{A}$, der zwischen den folgenden $5\frac{\delta}{A}$ u. s. w.

Demnach ist

$$\frac{Arc\,2\,s}{Arc\,s}+3\,\frac{\delta}{A}=\frac{Arc\,4\,s}{Arc\,2\,s}$$

$$\frac{Arc\,4\,s}{Arc\,2\,s}+5\,\frac{\delta}{A}=\frac{Arc\,6\,s}{Arc\,3\,s}\ \text{u. s. w.}$$

So wie hier die Sinus-Qnotienten $\frac{2\,s}{s}=\frac{4\,s}{2\,s}=\frac{6\,s}{3\,s}$, so findet dies in Gl. I. statt, nnd da $\beta<\alpha<\beta'$, so ist

$$\frac{\beta}{\lambda-\mu}<\frac{\alpha}{\mu}<\frac{\beta'}{\lambda+\mu}$$

nnd zwar so, dafs wenn $\frac{\beta}{\lambda-\mu}+k\,\delta=\frac{\alpha}{\lambda}$

$$\text{und}\ \frac{\alpha}{\lambda}+k'\,\delta=\frac{\beta}{\lambda+\mu}$$

$k<k'$ nnd zwar im Verhältnifs auf einander folgender nngerader Zahlen $3:5:7\dots$.

Nnn hat man

$$\beta+k\,\delta\,(\lambda-\mu)=\frac{\alpha\,(\lambda-\mu)}{\lambda}$$

$$\beta'-k'\delta\,(\lambda+\mu)=\frac{\alpha\,(\lambda+\mu)}{\lambda}$$

mithin $\beta+\beta'=2\,\alpha+\delta\mu\,(k'+k)+\delta\lambda\,(k'-k)$

Da nnn die letzten beiden Glieder positiv sind, so ist

$$\beta+\beta'>2\,\alpha$$

Für den Beweis, dafs $\beta+\beta'>2\,\alpha$, war der Einfalls$\angle\,\beta<\alpha$, denkt man sich $gf$ als eintretenden Strahl, so tritt derselbe in $as'$ ans. Der Einfalls$\angle\,\beta'$ ist dann $>\alpha$ nnd es ist somit auch für solche das Gesetz bewiesen.

Bezeichnet man die kleinste Total-A. (Gl. 1) $2\,(\alpha-\lambda)$ dnrch $D$, den Brechnngs$\angle\,acb$ des Prisma (Fig. 10) mit $c$, so ist

$$c+\angle\,neb=2\,R$$
$$2\,\lambda+\angle\,aeb=2\,R$$
$$2\,\lambda=c$$
$$2\,\alpha-2\,\lambda=D$$
$$\text{woraus}\ D=2\,\alpha-c$$

Wird $2\alpha-c>90^\circ$, so wird $D=180-(2\alpha-c)$

Die hier gewonnenen Resnltate sind also folgende:

1. Die geringste totale A. ($D$) des Lichtstrahls dnrch ein Prisma in 2 hinter einander erfolgenden Brechungen geschieht, wenn der innerhalb des Prisma gebrochene Strahl mit beiden Brechungsflächen einerlei Winkel bildet; der Einfalls$\angle\,\alpha$ wird = dem Austritts$\angle$, einer kann für den anderen gelten, beide Brechungs$\angle\,\lambda$ innerhalb des Prisma sind gleich grofs nnd jeder gleich dem halben, von den brechenden Flächen gebildeten brechenden Winkel $c$ des Prisma, und die totale Ablenkung des Strahls $D$ ist = dem doppelten Einfallswinkel weniger dem brechenden Winkel des Prisma.

Der Brechungs-Exponent für Glas ist im Mittel $=\frac{3}{2}$; d. h.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \lambda}=\frac{3}{2}$$

oder $\sin \lambda = \sin \frac{1}{2} c = \frac{2}{3} \sin \alpha$; mithin hat man für jedes gegebene $c$ auch $\alpha$ und gegenseitig. Das gröfste $\alpha$ ist $90°$ im Grenzwerth, wenn der Strahl längs oder $\neq ac$ gerichtet ist. Dann ist $\sin \frac{1}{2} c = \frac{2}{3} = 0{,}666$; woraus $\frac{1}{2} c = 41\frac{3}{4}°$ und mithin der gröfstmögliche brechende $\angle\, c$ des Prisma $= 83\frac{1}{2}°$, die Total-A. ($D$) ist $(180° - 96\frac{1}{2})° = 83\frac{1}{2}°$. Dieser Strahl unter $\alpha = 90°$ als Grenze $\neq ac$, wenn er in das Prisma eintreten könnte, wäre bei dem Prisma von $c = 83\frac{1}{2}°$ zugleich der einzige Strahl, welcher wieder auszutreten vermag. Denn ein beliebiger anderer Strahl $sa$ unter dem Einfalls $\angle\, a < 90°$ hat einen Brechungs $\angle\, bae < 41\frac{3}{4}°$; er sei $= 41\frac{3}{4}° - \omega$. Dieser Strahl hat in $cb$ den Brechungs $\angle\, eba$.

Nun ist $\angle\, aeb = 180° - 83\frac{1}{2}° = 96\frac{1}{2}°$
also $\angle\, abe = 180° - 96\frac{1}{2}° - (41\frac{3}{4}° - \omega)$
$= 41\frac{3}{4}° + \omega$.

Der Strahl $ab$ tritt also nicht aus, sondern geht in das Prisma zurück.

Demnach ist für den brechenden Winkel $c$ eines Glasprisma $83\frac{1}{2}°$ das Maximum als Grenzwerth.

Je kleiner $c$ wird, desto kleiner wird der Brechungs $\angle\, \lambda = \frac{1}{2} c$, desto kleiner also auch der ihm zugehörige Einfalls $\angle\, \alpha$ und desto kleiner zugleich $D$.

**Ablenkung der Magnetnadel** von der nach dem magnetischen Pol gerichteten Horizontalen geschieht durch die Nähe von Eisenmassen. Besonders nachtheilig wird sie auf Schiffen, und es gehören für jedes neu erbaute Seeschiff besondere genaue Untersuchungen, um den Einflufs der eisernen Baustücke und Geräthe, als Anker, Ketten, auf die Nadel des Compasses zu erfahren und Correctionen, um die wahre Richtung der Magnetnadel aus der unrichtigen, die für jede Lage des Schiffes eine andere ist, augenblicklich zu finden.

Je weiter die Entfernung auf der Erde vom magnetischen Pol, desto näher ist die frei spielende Nadel der Horizontalen; ganz horizontal spielt sie im magnetischen Aequator, der den Erdaequator in zwei Punkten schneidet. In den magn. Polen der Erde (zwischen 70° und 80° geogr. Br.), steht die Magnetnadel vertical, die Horizontalkraft des Magnetismus ist hier = Null. Aus diesem Grunde ist die Einwirkung der Eisenmassen auf die horizontale Ablenkung der Nadel in dem magn. Aeq. am geringsten, an den magn. Polen am stärksten. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

**Ablösung von Bauverpflichtungen und Bauberechtigungen.** Stehen 2 Personen $A$ und $B$ in dem Verhältnifs zu einander, dafs der Erste ein dem Zweiten zugehörendes Bauwerk, wenn es baufällig geworden ist, wieder neu herzustellen hat, so ist jener Erste der Bauverpflichtete, dieser Zweite der Bauberechtigte. Das Verhältnifs kann der Art sein, dafs solcher Pflicht-Neubau nur einmal geschehen mufs; in den meisten Fällen jedoch erstreckt sich die Verpflichtung auf sogenannte ewige Zeiten, so dafs das Bauwerk, wenn es seiner augenblicklichen Beschaffenheit wegen muthmaafslich in $n$ Jahren zum ersten Mal, seiner Construction und Bestimmung zufolge von da ab alle $m$ Jahre baufällig wird, also zum ersten Mal nach $n$ Jahren und von da ab alle $m$ Jahre neu erbaut werden mufs. Der erste Fall ist in dem letzten enthalten, wenn man in diesem für $m = \infty$ setzt.

Soll dies Verhältnifs gegen Entschädigung des Berechtigten aufgelöst werden, so geschieht die Ablösung dadurch, dafs der Verpflichtete dem Berechtigten entweder augenblicklich eine Summe Geldes $K$ giebt (Ablösung durch Kapital), oder dafs er ihm eine jährliche Rente $R$ zahlt (Ablösung durch Rente).

Ist der Zinsfufs $z$ (4 bis 5 Procent) bestimmt, nach welchem ein jetzt gezahltes Kapital $K$ sich verzinsen soll, um die Baukosten $B$ in jenen $n$ und wiederholten ferneren $m$ Jahren zu geben, so finden 3 Principien statt:

1. Das Princip mit einfachen Zinsen. Das jetzt gezahlte Kapital $K$ soll mit jährlich zu erhebenden Zinsen nach $n$ Jahren die Baukosten $B$ geben und das noch übrig gebliebene Kapital $K$ soll mit dessen jährlich zu erhebenden Zinsen nach $m$ Jahren wieder $B + K$ geben. Und so fort.

Für diesen Fall ist

$$K = \frac{1 + \frac{100}{m z}}{1 + \frac{z}{100} \cdot n} \times B$$

$$R = \frac{1 + \frac{100}{m z}}{n + \frac{100}{z}} \times B$$

Für den Fall, dafs das Bauwerk nur

einmal, nämlich nach $n$ Jahren neu zu bauen ist, hat man für $m=\infty$

$$K=\frac{1}{1+\frac{s}{100}\cdot n}\times B,\text{ und } R=\frac{1}{n+\frac{100}{s}}\times B$$

Dieses Ablösungsprincip ist aber nicht billig, denn die jährlich erhobenen Zinsen $=\frac{s}{100}K$ können von dem Empfänger jährlich in eine Sparkasse gelegt werden und ihm $s'$ Procent Zinsen einbringen; oder er kann sie in seiner Wirthschaft verwenden, wo er sie vielleicht zu einem höheren Zinsfuſs als $s$ verwerthet; der Verpflichtete aber, besonders wenn er Mehreres abzulösen hat, kann die Zinsen direct zum Zinsfuſs $s'$ verwerthen. Bezeichnet man die jährlichen Zinsen von $\frac{s}{100}K=\frac{s}{100}\times\frac{s}{100}K$ mit $k$, so hat man nach $n$ Jahren eingenommen $(n-1+n-2+\ldots\ldots+1)k=\frac{1}{2}n(n-1)k$, also für $n=100$ Jahre $=4950\cdot k$ Zinsen; ist $B=1000$ Thlr., $s=4$, so ist $k=1{,}6$ Thlr. und die Summe sämmtlicher Zinsen $=4950\times 1{,}6$ Thlr. $=6920$ Thlr.

2. Das Princip mit Zwischenzinsen. Es ist dasjenige, bei welchem die eben betrachteten zu viel gezahlten und eingenommenen Zinsen mit berücksichtigt werden.

Für dieses Princip ist

$$K=\frac{1+\frac{ms}{100}\left[1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right]}{\frac{ms}{100}\left[1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right]\left[1+\frac{ns}{100}\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)\right]}\times B$$

$$R=\frac{1+\frac{ms}{100}\left[1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right]}{m\left[1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right]\left[1+\frac{ns}{100}\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)\right]}\times B$$

Dividirt man zuerst Zähler und Nenner mit $m$, so erhält man für $K$

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{s}{100}\left[1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right]}{\frac{s}{100}\left(1+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)\left[1+\frac{ns}{100}\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)\right]}\times B$$

für $m=\infty$ fällt das erste Glied $=\frac{1}{m}=0$ des Zählers fort, der Zähler hebt sich nun mit dem ersten Factor des Nenners und man hat für einen einzigen Neubau nach $n$ Jahren

$$K=\frac{1}{1+\frac{ns}{100}\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)}\times B$$

$$R=\frac{\frac{s}{100}}{1+\frac{ns}{100}\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{s}{100}\right)}\times B$$

3. Das Princip mit Zins auf Zins. Bei diesem sollen nicht allein die *ad* 1 und 2 gedachten einfachen Zinsen als verzinst gerechnet, sondern das augenblicklich zu zahlende Kapital soll zu Zinses-Zinsen verliehen gedacht werden. Für dieses Princip ist

$$K=\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)^m}{\left[\left(1+\frac{s}{100}\right)^m-1\right]\left(1+\frac{s}{100}\right)^n}\times B$$

und

$$R=\frac{s\left(1+\frac{s}{100}\right)^m}{100\left[\left(1+\frac{s}{100}\right)^m-1\right]\left(1+\frac{s}{100}\right)^n}\times B$$

Um zu ermitteln, wie groſs $K$ und $R$ werden, wenn nur einmal, nach $n$ Jahren, neu zu erbauen ist, hat man

$$\frac{1}{K}=\left[\left(1+\frac{s}{100}\right)^n-\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{s}{100}\right)^m}\right]\times B$$

für $m = \infty$ wird das zweite Glied der Klammergröfse = 0, daher

$$\frac{1}{K} = \left(1 + \frac{z}{100}\right)^n \times B \text{ und}$$

$$K = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B \text{ und desgl.}$$

$$R = \frac{z}{100} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B$$

Eine Ablösung auf diese Weise ist der Natur der Sache nicht angemessen. Denn wenn die *ad* 1 gedachten einfachen Zinsen in der Wirthschaft verwendet werden, und hier besonders zu Verbesserung des abgelösten Bauwerks, so werden die damit eingebrachten neuen Baustücke mit der Zeit baufällig, sie hören auf zu sein, und bei einem Kapital, welches Zinses-Zinsen tragen soll, ist Grundbedingung, dafs Kapital nebst Zinsen nicht an sein aufhören, sondern dafs sie unverletzt, oder, wie man es nennt, eisern bleiben.

Somit ist nur das zweite Princip das allein richtige für Ablösungen von Bau-Verpflichtungen und Berechtigungen, und für dieses gelten die von mir herausgegebenen und bei G. Bosselmann erschienenen Tabellen zur Berechnung der Rente bei Ablösung etc.

**Abmessung (Dimension)** ist die Gröfse einer Ausdehnung, eine Länge; sie kann sich also nur auf Raumgröfsen beziehen. Eine Linie hat nur eine Abmessung, die Linie selbst, als ihre Längen-Ausdehnung; eine Fläche hat 2 A., welche Länge und Breite heifsen, indem die Fläche nach 2 Richtungen ausgedehnt ist; ein Körper hat 3 A., Länge, Breite und Höhe, indem derselbe nach 3 Richtungen ausgedehnt ist. Ein Raumgegenstand von 4 A. ist undenkbar.

Werden die Raumgröfsen algebraisch behandelt, so wird jede A. durch einen Buchstaben ausgedrückt; in Folge eines Calcüls sind Ausdrücke, wie

$$a;\ \frac{b^2}{c};\ \frac{ac^2}{c^2};\ \sqrt{a \cdot b};\ \sqrt[3]{a d^2} \text{ u. s. w.}$$

Linien (weil jeder nur von einer Abmessung ist); die Ausdrücke:

$$a b;\ c^2;\ \frac{d^3}{a};\ \frac{e f^3}{g^2}$$

sind Flächen (weil jeder 2 Abmessungen zeigt). Die Ausdrücke:

$$a \cdot b \cdot c;\ d^3;\ \frac{g^2 f^2}{a}$$

sind Körper (jeder hat 3 Abmessungen). Die Ausdrücke:

$$\frac{ab}{c^2};\ \frac{de}{fg}$$

haben keine Abmessung und sind abstracte Zahlen oder Coefficienten.

**Abplattung der Erde.** Hierunter versteht man das Verhältnifs des Längen-Unterschiedes zwischen dem Durchmesser des Aequators und der Erdaxe zu dem Durchmesser. Bezeichnet $D$ den Durchmesser des Aequators, $d$ den kleineren Durchmesser der Erdaxe, so ist die A. = $\frac{D-d}{D}$, also eine abstracte Zahl, die etwa $\frac{1}{300}$ beträgt. Auch wird bisweilen unter A. das Verhältnifs $\frac{D-d}{d}$ verstanden.

Dafs der Aequator-Durchmesser gröfser ist als die Axe, hat seinen Grund in der Rotation der Erde, wodurch die Umfangspunkte des Aequators eine grofse Geschwindigkeit erhalten, während die Pole hierbei in Ruhe bleiben, so dafs früher, wo die Erde, wie die Geognosie unabweisbar lehrt, in flüssigem Zustande sich befunden hat, eine Anschwellung der um den Aequator befindlichen Masse hat stattfinden müssen, und die Erde aus der Kugel, der natürlichen Form flüssiger, einer und derselben Centralkraft unterworfener Massen in die des Sphäroids übergegangen ist.

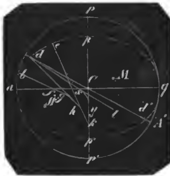
Dieser angeführte Grund ist hypothetisch, seine Richtigkeit aber wird unterstützt durch die wirkliche Wahrnehmung der Erdabplattung:

1) Mittelst der Breitengradmessungen, indem die Grade nach den Polen zu immer länger werden.
2) Mittelst der Pendelschwingungen, welche nach den Polen hin immer schneller geschehen.
3) Mittelst Beobachtung des Schwankens der Erdaxe, indem Sonne und Mond, wenn sie in der Erd-Aequator-Ebene sich nicht befinden, auf deren beide Halbkugeln eine ungleiche Anziehung ausüben.

Dafs aus dem Zunehmen der Breitengrade nach den Polen hin auf die A. der Erde geschlossen werden mufs, und von dieser auf jene, erklärt sich dadurch, dafs mit der A., also mit der elliptischen Form eines durch beide Pole genommenen Erddurchschnitts die Krümmungshalbmesser vom Aequator zum Pol hin immer zunehmen, also der für den Pol am gröfsten ist, und Marbach giebt pag. 876. Bohnenbergers elementaren Beweis wie folgt:

Sind $f, g, h, k$ die Mittelpunkte der Krümmungen für die Bogen $ab$, $bd$, $de$, $ep$, so wird gezeigt, dafs $af + fg + gh + hk = kp < aC + Ck$, woraus $Cp < aC$.

Fig. 11.




Sind nnn die $\angle afb$, $bgd$, $dhe$ nnd $ekp$ einander gleich, so wachsen deren zugehörige Bogen in Verhältnifs der ihnen zugehörenden Halbmesser, und theilt man den Quadrant $aP$ in 90 gleiche Theile, so müssen die Bogen anf $ap$, von denen jeder einen Grad ausmacht, von $a$ bis $p$ fortwährend wachsen.

Denkt man sich durch die 90 Durchschnittspnnkte wie $f$, $g$, $h$, $k$ eine Curve gelegt, so erhält man die Curve der Mittelpnnkte für sämmtliche Krümmungshalbmesser, so dafs die von jedem einzelnen Punkt zwischen den beiden zunächst liegenden Radien gezeichneten Kreisbogen, wie $ab$ aus $f$, $bd$ aus $g$, $de$ aus $h$ und $ep$ aus $k$, sehr annähernd die elliptische Form des Erdquadranten bilden. Die Radien wie $af$, $bg$, $dh$, $ek$ sind zugleich die Schwerlinien für die Punkte auf den Bogen $ab$, $bd$, $de$, $ep$, d. h. die Richtungen, nach welchen die Bleilothe daselbst die lothrechte Linie angeben, daher mnfs man sich die Mittelpunktscurve der Radien viel näher an den Mittelpnnkt $C$ gerückt denken, etwa wie Fig. 11 durch $xy$ angedeutet ist.

Dafs diese Schwerlinien seitwärts von dem Mittelpunkt $C$, dem wirklichen Schwerpunkt der Erde, und für den Quadrant $ap$ nach einerlei Richtnng seitwärts fallen, erklärt sich folgendermafsen.

Gesetzt, die Erde wäre eine Kngel, so würde in jedem Punkt der Oberfläche, wie in $A$, die Schwerlinie genau nach dem Mittelpnnkt $C$ der Erde, hier nach $AC$ gerichtet sein, weil beiderseits von $AC$ gleich viel Masse nnd in einerlei Entfernung von $A$ vorhanden ist. Ist die Erde dagegen abgeplattet, mithin $d$ statt $A$ der Pnnkt deren Oberfläche, so fehlt links das kleine Stück Masse $Ada$, und rechts das bei weitem gröfsere $AdpP$.

Es liegt zwar dem ersten fehlenden Stück das gleich grofse Stück $A'qd'$, und dem zweiten das ihm gleich grofse Stück $A'd'p'P'$ symmetrisch gegenüber, so dafs von beiden Seiten des Durchmessers $aq$ gleich viel Masse fehlt, also auch gleich viel Masse vorhanden ist. Dagegen wirkt die Schwere nicht nur direct, wie die Gröfsen der dieselbe afficirenden Massen, sondern zugleich indirect, wie die Quadrate deren Entfernung; die Masse $dd'p\,ad$ oder deren Schwerpunkt $M'$ ist aber dem Punkt $d$ viel näher als die ihr gleiche Masse $dd'qpd$, oder deren Schwerpunkt $M$, und daher trifft die Schwerlinie von $a$, (d. h. das in $a$ messende Bleiloth) unterhalb $C$, etwa nach der Richtung $al$.

Für $a$ nnd $p$ fallen die Schwerlinien durch $C$; je näher der Pnnkt der Erdoberfläche von $a$ nach $p$ hin an $a$ liegt, desto näher fällt seine Schwerlinie an den Mittelpunkt $C$; je näher ein solcher Pnnkt von $p$ nach $a$ hin an $p$ liegt, desto näher fällt ebenfalls dessen Schwerlinie an den Mittelpunkt $C$; es mufs also einen Punkt zwischen $a$ und $p$ geben, wo die Abweichung der Schwerlinie vom Mittelpnnkt $C$ der Erde ein Maximnm ist, nnd es findet dieser Pnnkt ziemlich in der Mitte zwischen $p$ und $a$ oder für $\angle ACa = 45°$ statt.

Bei den unvermeidlichen Fehlern, welche mit jeder Gradmessung verbunden sind, als ungleichen Einflufs der verschiedenen Wärmegrade bei den Temperaturwechseln der Atmosphäre auf die Maafsstäbe, Ungenauigkeit der Winkelmefsinstrnmente, Luft- nnd Lichttänschungen beim Abnehmen der Winkel, Fehler beim Nivelliren der gemessenen Längen und deren Reduction auf den Meeresspiegel als Horizont, Beobachtnngsfehler n. s. w.; bei allen diesen Fehlern, die sich auch wohl gegenseitig znm Theil compensiren, ist es klar, dafs die vielen angestellten Gradmessungen nicht ganz znverlässige Resnltate gewähren, und man hat aus den Consequenzen von Gradmessnngen die Abplattung der Erde von $\frac{1}{297{,}48}$ bis auf $\frac{1}{302{,}78}$ berechnet.

Beträgt der Grad im Aequator 15 geogr. Meilen, so hat man den ersten dem Aequator zunächst liegenden Meridiangrad nngefähr 14,9 Ml., den 90sten zunächst dem Pol ungefähr 15,047 Ml.

Nach Sabine's Messungen hat Muncke berechnet
den Halbmesser des Aeq. = 3271952 Toisen
die halbe Erdaxe . . . . = 3260643 „
den Unterschied also 11309 Toisen
giebt zu 1,035003 preufsische Klafter = 11708,849 Klafter = 70229 preufs. Fufs oder 2,926 preufs. Meilen oder 2,972 geogr. Meilen, also gegen 3 geograph. Meilen. Oder der Durchmesser des Aequators = 1719, die Erdaxe 1713 geogr. Meilen. (Das Nähere s. u. Gradmessungen, Ellipsoid.)

Dafs man aus den Pendelschwingungen an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche auf deren Abplattung schliefsen kann, liegt gleichfalls in dem oben gedachten Gesetz der Schwerkraft: am Aeq. ist der Mittelpunkt (der Schwerpunkt) der Erde am entferntesten, an einem der Pole am nächsten. Unterm Aequator wirkt also die Schwere am geringsten, unter den Polen am stärksten, dort fällt ein Körper langsamer, hier rascher, mithin macht einerlei Pendel in einerlei Zeit am Aequator die wenigsten Schwingungen, an den Polen die meisten Schwingungen. Ein Pendel, welches während einer Secunde eine Schwingung machen soll (das Secundenpendel), mufs also am Aequator am kürzesten, unter dem Pol am längsten sein, die Länge desselben beträgt dort 991, am Pol $996\frac{1}{4}$ Millimeter. (Das Nähere s. u. Pendelschwingungen.)

Das Schwanken der Erdaxe und einige Unregelmäfsigkeiten in der Bewegung des Mondes werden von den Astronomen ebenfalls aus der A. der Erde hergeleitet, und zwar in Folge des oben gedachten Gesetzes der Schwerkraft; aus den Beobachtungen hierüber beträgt die Abplattung der Erde $\frac{1}{304,6}$ bis $\frac{1}{318}$

Aus der Geschwindigkeit der Erdoberfläche bei ihrem Umschwung um ihre Axe mit Voraussetzung von ehemals tropfbarer Flüssigkeit des Erdballs hat Newton die Abplattung = $\frac{1}{230}$ berechnet. (Das Nähere s. u. Centrifugalkraft.)

**Abplattung der Weltkörper.** Alle Weltkörper, die aufser einer Bahnbeschreibung auch noch um ihre Axe rotiren, müssen nach dem vor. Art. in der Richtung dieser Axe abgeplattet sein, und zwar um so mehr, je gröfser die Länge und die Winkelgeschwindigkeit des Aequator-Halbmessers ist.

Unsere Sonne hat Rotation um die Axe und somit höchst wahrscheinlich haben sie auch alle Fixsterne, die gleichfalls Sonnen sind; dagegen hat bei der Sonne wegen ihres Lichteindrucks eine A. durch Beobachtung noch nicht nachgewiesen werden können, und es kann dies um so weniger bei den Fixsternen geschehen, die wegen ihrer Fernen uns nur als Lichtpunkte erscheinen.

Diejenigen Weltk., bei denen wir eine A. nachweisen können, sind allein die zu unserem Sonnensystem gehörenden Planeten. Bei den Asteroiden ist es wegen ihrer Kleinheit noch nicht möglich gewesen, und auch bei dem Merkur, der Venus und dem Mars sind die Beobachtungen und Angaben der A. unsicher.

Merkur mit 670 Meilen Durchmesser, einem Umschwung in 24 St. 5 Min. soll $\frac{1}{253}$ A. haben, also eine gröfsere als die Erde, was höchst unwahrscheinlich ist.

Venus bei etwa 1690 Meilen Durchm. und einem Umschwung in $23\frac{1}{2}$ Stunden, also in beiden Beziehungen der Erde sehr nahe kommend, eine A. = $\frac{1}{306}$, welches mit der ziemlich genauen Ermittelung der A. unserer Erde übereinstimmt.

Mars mit einem Durchm. nach verschiedenen Angaben im Mittel von 950 Ml., einem Umschwung in $24\frac{2}{3}$ Stunden, eine A. = $\frac{1}{343}$, welches nicht unwahrscheinlich ist.

Jupiter, der hiernach folgende und gröfste Planet mit beinahe $11\frac{1}{4}$ Erddurchm., also über 19000 Ml. Durchm., vollendet einen Umschwung um seine Axe in weniger als 10 Stunden; es ist aber auch ganz analog der Theorie eine sehr grofse A. nämlich von $\frac{1}{12,73}$ (nach Struve zeigt sich der Aequator-Durchm. 38,44″, die Axe 35,64″), also von nahe 1750 Ml. beobachtet worden, während sie bei der Erde nur gegen 6 Ml., oder auf den Jupiter bezogen $6 \times 11\frac{1}{4} = 67\frac{1}{2}$ Ml. : 1750 Ml. beträgt.

Saturn mit nahe $9\frac{1}{4}$ Erddurchm., also etwa 16750 Ml. Durchm., macht einen Umschwung um die Axe ebenfalls in nahe 10 Stunden, hat gleichfalls eine A. von $\frac{1}{13}$, indem den neuesten Beobachtungen zufolge der Aequator zur Axe wie 17,0 zu 15,7 sich verhält.

Uranus, der entfernteste Planet (aufser dem noch nicht zuverlässig genug beobachteten Neptun) mit 4,34 Erddurchm., also mit 7460 Ml. Durchm., soll eine A.

$= \frac{1}{60}$ haben. Die Zeit seines Umschwungs ist noch nicht ermittelt.

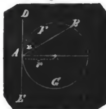
Monde, wie z. B. der unserer Erde, haben keine Rotation um ihre Axen, sie können also auch nicht abgeplattet sein, und es ist an ihnen auch keine A. beobachtet worden.

Die Beobachtungen stimmen also, soweit es überhaupt möglich, genau überein mit der Theorie, nach welcher eine A. jedem rotirenden Weltk. nothwendig zukommt.

**Abschnitt** einer Figur (Segment) ist der Theil derselben, welcher von einer durch zwei Punkte ihres Umfangs gezogenen geraden Linie abgeschnitten wird; A. eines Körpers der Theil, welcher von einer durch den Körper gelegten Ebene abgeschnitten wird.

**Abschnittswinkel** (beim Kreise) der Winkel, den eine Tangente *DE* in *A* mit einer von d. Berührungspunkt aus gezogenen Sehne bildet.

Fig. 12.



$\angle DAB$ ist der $\angle$ des Abschn. *AFB*, u. $\angle EAB$ der $\angle$ des Abschnitts *AGB*.

Setzt man $\angle DAB = \alpha$, den Halbmesser des Kreises $= r$, so hat man

Sehne $AB = 2r \sin \alpha$, und

Abschnitt $ABF = (\frac{\alpha}{180}\pi - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)\, r^2$

Für $\alpha = 0$ wird die Sehne $= 0$ und der Abschnitt $= 0$

Für $\alpha = 90°$ wird die Sehne $= 2r$, der Abschnitt $= \frac{\alpha}{180}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$

Für $\alpha = 180°$ wird die Sehne $= 0$, der Abschnitt $= \pi r^2$.

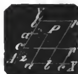
**Abscisse** ist eine gerade Linie, durch welche man die Lage eines oder mehrerer außer ihr gelegenen Punkte bestimmt, und zwar mit Hülfe von anderen geraden Linien, deren Längen und deren Lagen zur ersten gegeben werden. Die Lage des Punktes *P* gegen die Abscisse *AB* wird gegeben, wenn man die Länge *PD*, den $\angle \alpha = PDB$ und den Abstand *AD* von einem festen Punkt *A* der geraden Linie *AB* kennt: *AD* heißt die A. von *P*, *PD* die Ordinate, *A* der Anfangspunkt der A.

Fig. 13.



Hat man mehrere mit *PAB* in einerlei Ebene liegende Punkte *p*, *p'* u. s. w. gegen *AB* zu bestimmen, so nimmt man von *A* aus 2 unter $\alpha$ geneigte gerade Linien *AX* und *AY* und man hat für den Punkt *P* die Abstände *Aa* und *Aa'*, für *p* die Abstände *Ab* und *Ab'*, für *p'* die Abstände *Ac* und *Ac'* u. s. w. Man sieht, daß für die A. in *AX* die Abstände in *AY* die Ordinaten und für die in *AY* liegenden A. die Abstände in *AX* Ordinaten sind, daher führen A. und Ordinaten den gemeinschaftlichen Namen Coordinaten, *A* heißt der Anfangspunkt der Coordinaten, $\alpha$ der Coordinatenwinkel; die beiden geraden Linien durch den Anfangspunkt *A* heißen Coordinaten-Axen, die *AX* heißt die Axe der *X*, die *AY* die Axe der *Y*, die Abstände *Aa*, *Ab*, *Ac* . . . . bezeichnet man mit $x, x', x'' \ldots$ die $Aa', Ab', Ac' \ldots$ $y, y', y''$ u. s. w.

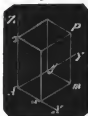
Fig. 14.



Ist der Coordinaten $\angle \alpha$ ein rechter $\angle$, so heißen die C. normale, rechtwinklige oder orthogonale Coordinaten.

Sind die Lagen einer Reihe von Punkten, die alle in verschiedenen Ebenen liegen, zu bestimmen, wie z. B. die auf einander folgenden Punkte einer krummen Linie von doppelter Krümmung, so sind 3 Coordinaten-Axen erforderlich, welche die 3 Dimensionen des Raumes zu vertreten haben. Es seien diese die der *X*, der *Y* und der *Z*; der Punkt *P* wird gegen dieselben bestimmt, indem man $Pm \pm AZ$, $mx \pm AY$, $my \pm AX$ zieht, vollendet man das Parallelepiped, so erhält man *Ax*, *Ay* und *Az* als die 3 Coordinaten für *P*.

Fig. 15.



Die Reduction der Coordinaten eines Punkts *P* auf zwei andere gegebene Coordinaten-Axen desselben Anfangspunkts und in derselben Ebene findet man wie folgt.

Der Coordinaten $\angle$ zwischen den Axen der *X* und der *Y* sei $\alpha$, die neue Axe der *X'* habe mit der Axe der *X* den $\angle \beta$,

Fig. 16.




die der $Y'$ mit der der $Y$ den $\angle\gamma$; $AC=x$; $AB=y$; $AD=x'$; $AE=y'$

$$AG=AE\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=y'\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$GC=PF=PE\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=x'\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

$$\text{I. } AG+GC=x=y'\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+x'\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

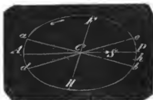
ferner ist $EG=AE\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}$

$$EF=EP\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\text{II. } EG-EF=y=y'\cdot\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}-x'\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

**Absiden** sind in der elliptischen Bahn eines Planeten die Endpunkte der großen Axe. Da die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse sich befindet, so ist die eine A. zugleich das Perihelium (die Sonnennähe), die andere das Aphelium (die Sonnenferne). Von den A. aller Planetenbahnen interessirt uns die der Ekliptik, der Bahn unserer Erde um die Sonne am meisten.

Fig. 17.




Bedeutet $A$ das Aphel, $P$ das Perihel, $S$ den Stand der Sonne in dem einen Brennpunkt, $C$ den Mittelpunkt der Ekliptik, $F$ den Frühlingspunkt, $H$ den Herbstpunkt, so geht die gerade Verbindungslinie $FH$ durch $C$. Diese Linie steht auf der Absidenlinie schief, so dafs $\angle FCA$, die Länge des Aphels als der östliche Abstand desselben vom Frühlingspunkt $= 99^\circ\ 52'$ und also $\angle HCA$ der Abstand des Herbstpunkts vom Aphel $= 80^\circ\ 8'$ beträgt, während dessen Länge $= HAF = 180^\circ$ ist. Man darf also die Absiden nicht mit den Sonnenwenden verwechseln, diese normal auf $FH$, etwa wie $a$, $b$ liegen $9^\circ\ 52'$ westlich von den A., so dafs die Sommerwende $a$ um so viel westlich vom Aphel und die Winterwende $b$ um so viel westlich vom Perihel abliegt.

Die Erde bewegt sich in der Ekliptik nach der Richtung der gezeichneten Pfeile von Abend nach Morgen mit ungleichförmiger Geschwindigkeit: in $A$ ist diese am kleinsten, in $P$ am gröfsten; beide Ellipsenhälften $AHP$ und $PFA$ werden aber gleichzeitig, also jede in einem halben (anomalistischen) Jahr durchlaufen. Man kann daher die Punkte $A$, $P$ durch Beobachtung folgender Art finden.

Man nehme in demselben Jahr mehrere Punkte $a$, $d$ ..., $b$, $e$ ... in der Ekliptik nahe $A$ und $P$, messe deren Länge von $F$ aus und beobachte die Zeit, in der die zwischen liegenden Bogen durchlaufen werden. Von den einander gegenüber liegenden Punkten wähle man zwei, deren Längen-Unterschied nahe $180^\circ$ ist, $a$ sei der erste, $b$ der zweite Punkt, der Bogen $aHb$ sei in der Zeit $T'$ durchlaufen und beide seien um einen kleinen Bogen $\delta$ geringer als $180^\circ$ an Länge unterschieden, so wähle den an $b$ zunächst liegenden Beobachtungspunkt $h$; es kann der kleine Bogen $bh$ in der beobachteten bekannten Zeit $t$ als gleichförmig durchlaufen betrachtet werden, desgleichen der noch kleinere Bogen $\delta$ und man erhält die Zeit $x$ für die noch von $b$ aus zu durchlaufende Länge $\delta$ durch die Proportion:

$$bh:\delta=t:x$$

$$\text{woraus } x=\frac{\delta}{bh}\cdot t$$

wonach die Zeit $T'$ von $a$ nach dem corrigirten Punkt $b'=T'+\frac{d}{bh}\cdot t$ gefunden ist.

Gesetzt, die Zeit $T'$ wäre gröfser als die bekannte halbe Umlaufszeit $T$, so ist damit erwiesen, dafs zwischen $a$ und $b$ das Aphel $A$ durchlaufen worden, weil in $A$ die geringste Geschwindigkeit stattfindet und weil also für die halbe Ellipse $FAH$ mehr als die halbe Umlaufszeit erforderlich ist; die Punkte $a$ und $b$ haben also

die gezeichnete Lage. So wie wenn die durchlaufene Zeit kleiner als die halbe Umlaufszeit gefunden wird, diese Punkte jedenfalls die Lage $d, e$ haben, weil in $P$ die gröſste Geschwindigkeit stattfindet und für die halbe Ellipse $HPF$ weniger als die halbe Umlaufszeit erforderlich ist.

Nun ist die Zeit für die halbe Ellipse $AHP$ = der Zeit durch die Bogen $(aHb' + b'P - aA)$.

Die Zeit für $aHb' = T'$ ist beobachtet, berechnet und $T' > T$; mithin $T' - T$ = der Zeit für $aA - b'P$.

Da $a$ und $b'$ sehr nahe an $A$ und $P$ genommen worden, die Abnahme der Geschwindigkeit von $a$ bis $A$ und die Zunahme von $b'$ bis $P$ nur gering sind, so können die Geschwindigkeiten von $a$ bis $A$ und von $b'$ bis $P$ als gleichförmig angesehen werden. Bezeichnet man den bekannten Weg der Sonne innerhalb 24 Stunden bei $A$ mit $w = 57' \, 11,''4$; den bei $P$ mit $w' = 61' \, 10,''3$; die Zeiten für die Bogen $aA$, $b'P = x$ und $y$, so hat man

$$w : \angle aCA = 24 \text{ Stunden} : x$$
$$w' : \angle b'CP = 24 \text{ Stunden} : y$$

Da die $\angle aCA$ und $b'CP$ als Scheitel$\angle$ einander gleich sind, so hat man

$$w' : w = x : y$$

woraus $w' - w : w' = x - y : x$

und $w' - w : w = x - y : y$

Nun ist $w' - w = 61' \, 10,''3 - 57' \, 11,''4$
$= 3' \, 58,''9$

$$x - y = T' - T$$

daher $x = \dfrac{61' \, 10,''3}{3' \, 58,''9} \times (T' - T)$

$$y = \frac{57' \, 11,''4}{3' \, 58,''9} \times (T' - T)$$

der Bogen $aA$, der zu der Länge $Fa$ addirt werden muſs, um die Länge von $A$ zu finden, ist nun

$$= \frac{x}{24 \text{ Stunden}} \times 57' \, 11,''4$$

der Bogen $b'P$, der zu $FAHb'$ addirt werden muſs, um die Länge $FAHP$ zu finden.

$$= \frac{y}{24 \text{ Stunden}} \times 61' \, 10,''3.$$

**Absidenlinie**, die gerade Verbindungslinie beider Absiden (s. d.) einer Planetenbahn, also zugleich deren groſse Axe.

**Absolut** (von absolvĕre, ablösen). Abgelöst, für sich allein, ohne Beziehung zu etwas Gleichem, Aehnlichem, oder in irgend einem Zusammenhang Befindlichen betrachtet; im Gegensatz von r e l a t i v (referre, beziehen) oder s p e c i f i s c h.

**Absolute Bewegung.** Diejenige B., d. h. stete Ortsänderung einer Raumgröſse oder eines materiellen Punkts in derselben, welche man ohne Rücksicht auf die Bewegung anderer mit ihr in Zusammenhang stehenden Raumgröſsen betrachtet. Ein fester Gegenstand auf der Erdoberfläche scheint in R u h e zu sein, allein er bewegt sich um die Erd-Axe und mit dieser um die Sonne; dagegen ist er in Betracht aller um ihn befindlichen theils ruhenden, theils sich bewegenden Gegenständen in r e l a t i v e r R u h e. Die Bewegung eines Körpers auf der Erde, welche man wahrnimmt, ist nur dessen r e l a t i v e B., seine a b s o l u t e B. ist die, welche er zugleich mit der Erdoberfläche macht.

**Absolutes Gewicht**, das wirkl. Gew. eines Körpers, verglichen mit einer Gewichts-Einheit, im Gegensatz zu seinem specifischen Gew., einer Verhältniſszahl, welche ausdrückt, ein Wievieltes das Gew. des Körpers von dem eines anderen Körpers ist, wenn beide einerlei Volumen haben.

**Absolutes Glied.** Das Glied in einer Gleichung, welches eine Unbekannte nicht als Factor enthält. In der Gleichung: $x^3 + ax^2 - bx + c = 0$ ist $c$ das abs. Gl.

**Absolute Gröſse** einer Festung wird in dem Falle von r e l a t i v e r G. derselben unterschieden, wenn sie auſser dem Flächenraum, der durch zusammenhangende Wall-Linien als Umriſs bestimmt wird, noch auſserhalb derselben einzelne Werke besitzt, welche durch zu denkende gerade Linien mit einander verbunden als Umriſs den ersten Umriſs umschlieſsen. Der erstere innere Flächenraum heiſst A. G., der von dem äuſsersten Umriſs begrenzte Flächenraum die relative G. der Festung.

**Absolute Kraft**, die Kraft, welche auf einen Körper dieselbe Wirkung ausübt, gleichviel, ob dieser in Ruhe oder in Bewegung ist (Schwerkraft oder Attraction, Kraft der Wärme auf die Ausdehnung der Körper).

**Absolute Länge** bei ähnlichen Kreis- oder Curvenbogen, die wirkliche Längen-Ausdehnung derselben nach einer Längen-Einheit gemessen.

**Absolute Primzahl** ist jede Primzahl an und für sich betrachtet, als 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. im Gegensatz von r e l a t i v e r Primzahl, nämlich eine Zahl in Beziehung auf eine oder mehrere andere, wo diese alle oder auch nur zum Theil Primzahlen sein können. Z. B. 7 und 15 sind relative Primzahlen, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wenngleich 15 keine Primzahl, sondern eine zusammengesetzte Zahl ist, eben so sind 8 und 9 relative Primzahlen, obgleich jede von beiden eine zusammengesetzte Zahl ist.

**Absolute Ruhe**, das wirkliche Verblei-

ben an einem und demselben Ort. Wir kennen keinen Körper, der in abs. R. sich befände, und auch von der Sonne und den Fixsternen ist sie bei Betrachtung der Attraction der Weltkörper zu einander kaum anzunehmen. (Vergl. Absolute Bewegung.)

**Absoluter Werth** einer Gröfse ist deren Quantität, ohne Rücksicht, ob sie positiv oder negativ zu nehmen ist: in $x = \pm \sqrt{3}$ ist $\sqrt{3}$ der abs. W. von $x$.

**Absolute Zahl,** eine Z. hinsichtlich ihrer Quantität und ohne Rücksicht auf ihr positives oder negatives Vorzeichen.

**Absorption.** Die Aufsaugung von Gasen durch feste und flüssige Körper; letztere wird auch als Auflösung der Gase in Flüssigkeiten erklärt, aber wohl mit Unrecht. Denn aufgelöst wird ein Körper, wenn er von einem anderen Körper durchdrungen wird, während hier die Gase in die Poren der Flüssigkeit dringen. Je kälter feste Körper und Flüssigkeiten sind, desto mehr Gas wird von ihnen absorbirt. Peröse feste Körper absorbiren oft so viel atmosphärische Luft, dafs diese eine bedeutende Verdichtung im Innern derselben erfährt, wodurch Wärme frei wird, die, wenn sie in brennbaren Körpern stattfindet, bis zu deren Selbst-Entzündung gesteigert werden kann.

**Abstand** zweier Punkte in einer Ebene und im freien Raum ist die Länge deren geraden Verbindungslinie.

A. eines Punktes von einer geraden Linie oder von einer Ebene, die Länge des von ihm auf die Linie oder die Ebene gefällten Lothes.

A. zweier Parallel-Linien, das von der einen Linie auf die andere gefällte Loth, welches überall zwischen beiden Linien gleich grofs ist.

A. zweier Punkte auf einer Kugel-Oberfläche, der kleinere Bogen des gröfsten Kreises durch dieselben als deren kürzeste Verbindungslinie.

A. eines Gestirns vom Scheitel, Scheitelabstand, Zenithdistanz, der zwischen einem Stern und dem Zenith eines Orts der Erdoberfläche, nämlich dem äufsersten Punkt des in dem Ort errichteten Loths auf der scheinbaren Himmelskugel zu denkende Bogen eines gröfsten Kreises, des Scheitelkreises; er wird direct durch einen Winkel gemessen und ist das Complement der Höhe des Gestirns über dem Horizont.

**Absteckung** von Linien auf dem Felde. Eine gerade Linie wird in beiden Endpunkten durch Stangen (Absteckstangen) bezeichnet, welche 6, 8, auch wohl 16 Fufs lang, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll stark sind und bei langen Linien besondere Auszeichnungen, als Fahnen, Kreuze oder Strohwische an dem oberen Ende erhalten. Ist ein Berg in der Linie, so dafs man von einem Ende das andere Endsignal nicht sehen kann, so müssen Zwischenstangen eingerichtet werden; hierzu sind mindestens 2 Stangen erforderlich, von welchen man nach jedem der beiden Endpunkte sehen kann, und an jeder Stange ein Mann, von denen jeder die Stange des andern durch Winken mit der Hand richtig einvisirt. Kreise, Ellipsen und andere Krümmungen werden, wenn sie eine bedeutende Ausdehnung haben, zuvor auf Papier gezeichnet, Hauptlinien als Abscissen genommen, die Ordinaten berechnet und demgemäfs auf dem Felde abgesteckt.

Bei Befestigungsbauten werden die mittelst der Absteckschnur (etwa 100 Klafter lang, 2 bis 3 Linien stark) bezeichneten geraden Linien in dem Erdboden mittelst Hacken und Spaten gefurcht.

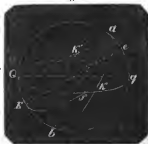
**Absteigende Reihe,** eine Reihe von der Form:

$$ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \pm \ldots \pm wx$$

in welcher also die Exponenten der Grundzahl in den auf einander folgenden Gliedern abnehmen.

**Absteigender Knoten** (☋) ist der Durchschnittspunkt der Bahn eines Planeten mit der Ebene der Ekliptik, wenn er aus deren nördlichen in die südliche Halbkugel tritt, wogegen aufsteigender Knoten (☊) ein solcher Durchschnittspunkt, wenn der Planet aus der südlichen in die nördliche Halbkugel tritt. Die gerade Verbindungslinie beider Knoten heifst Knotenlinie. Bedeutet *Qq* den Aequator, *Ee* die Ekliptik, *bkak'b* die Bahn eines Planeten, *f* den Frühlingspunkt, so ist *k* der aufsteigende Knoten, *fk* seine Länge, *k'* der a. K., *fkek'*

Fig. 18.



seine Länge und *kk'* die Knotenlinie. Ebenso heifsen die Durchschnittspunkte der Mondbahn mit der Ekliptik aufsteigende u. a. K.

**Absteigendes Zeichen.** Jedes der 6 Zeichen des Thierkreises, in welchen die Sonne von der Sommer-Sonnenwende nach der südlichen Halbkugel bis zur Winter-Sonnenwende (für die nördliche Halbkugel nämlich) scheinbar hinabsteigt, so wie aufsteigendes Zeichen jedes der 6 Z., in welchen die Sonne von der Winterwende zur Sommerwende zu uns scheinbar heraufsteigt, indem nämlich die Sonne still steht und die Erde in der Ekliptik, wenn die Sonne aufzusteigen scheint, wirklich absteigt, und wenn die Sonne abzusteigen scheint, durch die aufsteigenden Zeichen wirklich ihren Weg nimmt.

Fig. 19.




Bedeutet der Kreis die Ekliptik, *N* Norden, *S* Süden, *F* den Frühlingspunkt, *H* den Herbstpunkt, so standen vor 4 bis 5000 Jahren die Zeichen wie angegeben: der Steinbock (♑) in der Winterwende ist das südlichste, der Krebs (♋) in der Sommerwende das nördlichste Z. Die Sonne stieg von ♑ durch Wassermann (♒), Fische (♓), trat bei Widder (♈), dem Frühlingspunkt, in die nördliche Halbkugel, und weiter durch Stier (♉), Zwillinge (♊) in den Krebs (♋) in die Sommerwende; von hier wieder hinab durch Löwe (♌), Jungfrau (♍) in die Waage (♎), wo sie in die südliche Halbkugel tritt, und weiter durch Skorpion (♏), Schütze (♐) zur Winterwende. Die zuerst genannten 6 Zeichen sind daher die aufsteigenden, die zuletzt genannten 6 die absteigenden Z.

Seit der Zeit des grauen Alterthums bis heut sind die Nachtgleichenpunkte *F* und *H* um etwa 30° vorgerückt und *F* befindet sich jetzt in dem Sternbild der Fische.

**Absteigung eines Gestirns** (Descension) ist der Punkt des Aequators, der mit einem Gestirn in dem Horizont eines Orts der Erde zugleich untergeht, während Aufsteigung (Ascension) derjenige Punkt des Aequators ist, der mit einem Gestirn zugleich aufgeht. Für Orte im Aequator selbst heifst die A. gerade, für alle anderen Orte der Erdoberfläche heifst sie schief, der Unterschied zwischen der geraden und schiefen Absteigung als Bogen gemessen, heifst der Absteigungs-Unterschied (Descensional-Differenz). (S. das Weitere in Aufsteigung und Absteigung der Gestirne.)

**Absteigungs-Unterschied**, s. u. Absteigung.

**Abstofsende Kraft**, die einer Masse beiwohnende K., vermöge welcher eine andere Masse der ersten nur bis zu einem gewissen Grade nahe kommen kann; sie ist der anziehenden K. entgegengesetzt. Die Undurchdringlichkeit der Atome eines jeden Stoffs ist eine a. K. für die Atome aller anderen Stoffe. Die Wärme dehnt alle Körper aus; sie wirkt also durch ihr Eindringen zwischen die Atome und indem sie zugleich dieselben von einander entfernt, auf jeden Körper als a. K. Die Centrifugalkraft wirkt als a. K. auf die Weltkörper bei deren Bewegung um eine Sonne in Ellipsen, während die Attraction als anziehende K. wieder dahin wirkt, dafs deren Entfernung von einander nicht in's Unendliche geht. Die Elasticität zweier starren Massen wirkt bei deren Zusammentreffen als a. K. auf die Aenderung ihrer Geschwindigkeit und unter Umständen auch auf die Aenderung ihrer Richtungen.

**Abstofsung** (Repulsion), der Erfolg der Wirkung einer abstofsenden Kraft.

**Abstofsungskraft** s. v. w. abstofsende Kraft.

**Abstract** ist abgesondert; in der Mathematik: abgesondert von physischen Beschaffenheiten gedacht.

**Abstracte Mathematik** s. v. w. reine Mathematik, welche von Gegenständen der Erfahrung abstrahirt.

**Abstracte Zahl.** Eine Z. ohne Beziehung auf Gegenstände, als 3; 5; $(m+n)$; im Gegensatz von concreter Zahl (3 Fufs, 5 Thaler). Man sagt auch für erstere unbenannte, für letztere benannte Zahl.

**Abstracter Begriff**, ein Begriff, der einer grofsen Anzahl von verschiedenen Gegenständen zukommt, von deren Verschiedenheit jedoch abstrahirt wird. Z. B. Pflanze, Körper.

**Abstürzung** eines Walles (Kriegsw.). die Höhe dessen steiler Vorderfläche von der Oberkante bis zur Unterkante, wo das Terrain anschliefst, also auch bis zur Sohle des trockenen oder zum Wasserspiegel des nassen Grabens, wenn solcher unmittelbar vor dem Wall sich befindet.

**Abstumpfungsflächen** eines Krystalls sind die kleineren untergeordneten Flächen, welche statt der Kanten oder Ecken der als Grundform zu denkenden einfachen Form vorhanden sind und dadurch die Form des Krystalls zu einer zusammengesetzten Krystallform machen.

Man denke sich ein gleichschenkliges Dreieck als geraden Durchschnitt der Kante einer einfachen Krystallform, ziehe nahe der Spitze eine gerade Linie zwischen die Schenkel des Winkels und bewege dies Dreieck geradlinig in normal auf dasselbe befindlicher Richtung, so entsteht durch die Schenkel des Dreiecks die Kante der einfachen Krystallform, und wenn man das an der Spitze abgeschnittene kleine Dreieck fortnimmt, die zusammengesetzte Form, indem statt der Kante eine Fläche, eine A. eingeführt wird, die mit dieser Kante ∦ ist und deren beide stumpfere Kanten, welche sie mit den beiden Flächen der einfachen Form bildet, ebenfalls ∦ sind.

Ist die kleine gerade Linie in dem gleichschenkligen Dreieck der Grundlinie ∦ gezogen, so wird ein kleines gleichschenkliges Dreieck abgeschnitten; die aus der kleinen Grundlinie desselben bei ihrer Fortbewegung entstehende A. bildet mit den beiden Flächen der Grundform 2 Kanten von gleichen Neigungswinkeln, gleiche Kanten genannt, und heifst eine gerade A.

Ist die kleine Linie der Grundlinie nicht ∦ gezogen, so entsteht durch dieselbe eine A., deren Kanten mit den beiden Flächen der Grundform ungleich sind, und heifst eine schiefe A. Betrachtet man die fehlende Kante der Grundform, so nennt man diese eine abgestumpfte Kante und diese ist also entweder gerade oder schief abgestumpft.

Denkt man sich die Spitze $h'$ der abgekürzten Pyramide, Fig. 6, pag. 6, als fehlende Ecke einer einfachen Krystallform und statt derselben die Fläche $A'$, so ist die Ecke $h'$ abgestumpft und die Fläche $A'$ ist deren A. Sind die Kanten, welche diese A. mit sämmtlichen Flächen der Grundform bildet, einander gleich, so ist die A. gerade, sind die Kanten ungleich, so heifst die A. schief; die Ecke ist also entweder gerade oder schief abgestumpft. Ist die A. schief und so gelegen, dafs sie mit zweien eine Kante bildenden Flächen der Grundform gleiche Kanten bildet, so heifst die A. auf diese Kante gerade aufgesetzt; sind beide Kanten ungleich, so heifst die A. schief aufgesetzt. Gerade aufgesetzt ist eine A. auf eine Kante, wenn die durch diese Kante auf die A. normal gelegte Ebene den Winkel zwischen beiden neu gebildeten Kanten halbirt.

**Absürd** (ungereimt) ist eine gemachte Annahme, wenn richtige Folgerungen aus derselben auf einen Widerspruch gegen dieselbe führen.

Fig. 20.



Es werde z. B. behauptet $\alpha+\beta<\delta$

bewiesen ist $\alpha+\beta+\gamma=2$ R.

desgl. $\delta+\gamma=2$ R.

daher ist $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\gamma$

aber auch $\gamma=\gamma$

folglich $\alpha+\beta=\delta$

Es kann also nicht $\alpha+\beta<\delta$ sein, mithin war obige Behauptung absurd.

Man erhält eben so absurde Resultate aus richtigen Annahmen und unrichtigen Schlüssen und Folgerungen:

Nimmt man z. B. von irgend einer Zahl $a>1$ die zweite Wurzel, hierauf die dritte u. s. w., so wird jede folgende $n+1$te Wurzel kleiner als die vorhergehende $n$te, sie bleibt aber immer $>1$. Dagegen kann man der Zahl 1 durch Vergröfserung von $n$ beliebig nahe kommen, und die Zahl 1 ist also offenbar deren Grenzwerth, so dafs $\sqrt[\infty]{a}=1$ ist. Potenziirt man nun nach den Regeln der Arithmetik zu beiden Seiten mit $\infty$, so erhält man $1^\infty=a$, also $1^\infty$ auch $=b$ und gleich jeder beliebigen Zahl, die $>1$ ist. Es bleibt aber 1 zu jeder noch so hohen Potenz erhoben $=1$. Das Absurde liegt darin, dafs Unendlichkeit keine Gröfse ist, und mathematische Folgerungen nur auf Gröfsen sich erstrecken können.

Ein gleich ungereimtes Resultat erhält man, wenn man mit Null als Gröfse operirt. Z. B.

Jede Gröfse ist sich selbst gleich, also $0=0$

Nun ist $3\times0=0$

und eben so $4\times0=0$

daher $3\times0=4\times0$

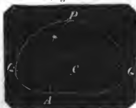
nach 1 ist aber $0=0$

Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten, also $\frac{3\times 0}{0} = \frac{4\times 0}{0}$
Zähler und Nenner mit gleicher Zahl dividirt bleiben gleich, folglich hier mit 0 dividirt, giebt 3 = 4.

**Abtrift.** Der Winkel, den die horizontale gerade Linie, in welcher der Lauf des Schiffes erfolgt, mit der horizontalen Längenmittellinie des Schiffes bildet, und zwar derjenige, von dessen in dieser Mittellinie befindlichen Spitze aus die Schenkel nach der Hinterseite (dem Hinterdeck) des Schiffes gerichtet sind. Der der A. gleiche Scheitelwinkel, dessen Schenkel von der Winkelspitze ab nach dem Vorderdeck gerichtet sind, heifst der Leeweg. Den zuerst gedachten Schenkel, den Lauf, bezeichnet die Furche, die das Schiff in dem Wasser hinter sich sichtbar zurückläfst (das Kielwasser), den zweiten Schenkel bezeichnet die gerade Verbindungslinie beider Steven, des Vorder- und des Hinterstevens, Hölzer, die an beiden Enden des Schiffs in den Kiel und zwar in dessen Normalebene gerichtet eingesetzt sind. Beide Schenkel werden von dem Hinterdeck aus durch einen besonders aufgestellten Compafs visirt und der Winkel gemessen (mit dem Peilcompafs gepeilt).

**Abweichung** (Declination) **eines Gestirns.** Die durch einen gröfsten Kreisbogen gemessene Entfernung des Sterns vom Aequator. Bedeutet $P$ einen Pol der Himmelskugel, $QAq$ den Aequator, so trifft das Loth aus $P$ den Mittelpunkt $C$

Fig. 21.



desselben, die Entfernung $SA$ des Sterns $S$ von $Qq$ auf $QAq$ senkrecht mufs also durch den Pol $P$ gehen. Der Kreis $PSA$ bis zu dem zweiten Pol gezogen, heifst Abweichungskreis, Declinationskreis des Sterns $S$. Je nachdem das Gestirn $S$ in der nördlichen oder südlichen Halbkugel liegt, ist seine Abweichung $SA$ eine nördliche oder südliche A. Gestirne, die in der Richtung $CS$ hinter einander, so wie die, welche in denselben Parallelkreise sich befinden, haben einerlei A. Gestirne in der Aequator-Ebene haben die A. = 0, Gestirne in der Richtung der Axe $CP$ haben die A. = 90°.

Die A. eines Gestirns ist = seiner beobachteten Mitlagshöhe ($Sh$) weniger der bekannten Aequatorhöhe ($Qh$) des Orts; ist letztere gröfser als $Sh$, so ist die A. negativ, d. h. sie ist südlich. Eben so ist die A. = der Polhöhe ($Ph$) des Orts weniger der beim Culminiren des Sterns gemessenen Zenithdistanz.

Aus der gegebenen Länge $l$ und der Breite $b$ eines Gestirns findet man dessen A. aus der Formel

$$\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin (k+e)}{\sin k}$$

wo e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet und $K$ aus $tg\, k = \frac{tg\, b}{\sin l}$ gefunden wird.

**Abweichung der Magnetnadel** (Declination der Magnetnadel), der Winkel, den der magnetische Meridian mit dem Erdmeridian bildet.

Die magnetischen Pole, zwischen 70 und 80° geographischer Breite liegend, ändern zwar ihren Ort auf der Erde; in jedem Augenblick jedoch zeigt eine frei spielende Magnetnadel durch ihre feste Lage die Richtung der Verbindungslinie derselben, und diese bis zu beiden Polen verlängert gedacht, giebt den magn. Meridian für den Standort der Nadel, und die durch diese Linie und den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene ist die Ebene des magn. Meridians. Jeder Ort auf der Erdoberfläche in jedem andern magn. Meridian hat also eine andere A.

Es giebt nur wenig Orte auf der Erde, in welchen die Magnetnadel genau nach Süden und Norden zeigt, wo also die magn. Abweichung = Null ist. Nach dem Obigen sollte dies in allen Punkten desjenigen gröfsten Kreises der Erdoberfläche stattfinden, in welchem die magn. Pole und zugleich die geogr. Pole der Erde liegen. Je nachdem die magn. A. in Beziehung auf den Nordpol der Erde nach Ost oder West hin gerichtet ist, hat man eine östliche oder westliche magn. A. Aus den beobachteten magn. A. in zwei verschiedenen nach geogr. Länge und Breite bekannten Orten kann man die magn. Pole auf der Erdoberfläche construiren oder auch deren Lage nach geogr. Länge und Breite berechnen.

Es sei $Qq$ der Aequator, $P$ der Nordpol; $A$, $B$ seien zwei Orte, in welchen die magn. A. beobachtet worden. Beträgt

dieselbe $\alpha$ in $A$ und $\beta$ in $B$, so legt man an die Meridiane $PAD$, $PBE$ in $A$ und $B$ unter dem $\angle\ PAM = \alpha$ und $\angle\ PBM = \beta$

Fig. 22.

gröfste Kreise, und es sind deren Durchschnittspunkte $M$ in der nördl. Halbkugel und dem $M'$ in der südl. die magn. Pole, deren Axe durch den Mittelpunkt $C$ der Erdkugel geht, und die magn. Pole sind durch Construction gefunden.

Aus der geogr. Breite $AD$ von $A$ und der $BE$ von $B$ erhält man die Polar-Abstände $PA = 90° - AD$ und $PB = 90° - BE$. Bedeutet $PQ$ den ersten Meridian, so ist Bog. $QD$ oder $\angle\ QPA$ die Länge von $A$, Bog. $QE$ oder $\angle\ QPB$ die Länge von $B$, also $\angle\ APB$ = dem bekannten Längen-Unterschied von $A$ und $B$; daher sind aus dem sphärischen $\triangle\ APB$ der Abstand $AB$, desgl. $\angle\ PAB$ und $\angle\ PBA$ zu berechnen.

Nun ist $\angle\ MAB = \angle\ PAB - \alpha$, $\angle\ MBA = \angle\ PBA + \beta$; aus dem sphär. $\triangle\ MAB$ also die Seite $AM$ zu berechnen; endlich aus dem sphär. $\triangle\ PAM$, nämlich aus $PA$, $AM$ und $\angle\ PAM = \alpha$ der $\angle\ APM$ und die Seite $PM$ zu berechnen.

Nun ist $\angle\ APM + \angle\ QPA$ die geogr. Länge von $M$, und $90° - PM$ die geogr. Breite von $M$, womit $M$ der Lage nach berechnet ist.

Construirt oder berechnet man auf die gezeigte Weise für mehrere Punkte der Erde die magn. Pole, so treffen sie nicht in einerlei Punkten zusammen, auch die Verbindungslinien der nördl. und südl. erhaltenen schneiden nicht den Erdmittelpunkt. Daher nehmen mehrere Naturforscher 4 solcher Punkte an, die innerhalb der Polarzonen fallen, und nennen sie magn. Convergenz-Punkte, und auch diese sind der Ortsänderung unterworfen. Bedenkt man aber, dafs die Abweichungen bei einer Magnetnadel ihrer Kürze wegen nicht allzu genau gemessen werden können und dafs diese A. an verschiedenen Orten auch noch von vielen theils bekannten, theils unbekannten anderweitigen Ursachen oft augenblicklich, oft auf längere Zeit constant geändert werden, so bleibt die Theorie der A. noch unaufgeklärt.

So sind die jährlichen Schwankungen der Magnetnadel höchst wahrscheinlich mit abhängig von der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, so dafs die Nadel von der Frühlingsnachtgleiche bis zur Sommerwende nach Osten, und die ganze übrige Jahreszeit nach Westen sich bewegt. Nordlichter ändern die Richtung der Magnetnadel augenblicklich.

Die Ortsänderungen (Schwankungen) der magn. Pole oder Convergenzpunkte und mit diesen die der magn. A. geschehen ununterbrochen. Dagegen sind dieselben bald östlich, bald westlich, und geraume Zeit hindurch so ziemlich in einerlei Grenzen. In Paris hatte die (westliche) A. von 1807 bis 1832 zwischen 22° 34' und 22° 3' geschwankt. In Berlin war sie im Jahre 1805 = 18° 5'; im Jahre 1829 = 17° 31' westlich.

Das Wissen der augenblicklichen A. der Magnetnadel in irgend einem Ort auf offener See ist für den Schiffer von der gröfsten Wichtigkeit: Er erfährt bei Tage aus dem zu messenden Stand der Sonne und deren bekannten Abweichung (z. B. 22. Juli $23\frac{1}{4}°$ nördl.), bei Nacht aus dem Stande von Fixsternen und deren bekannten Parallelkreisen die geogr. Breite des Orts, oder dessen Aequatorhöhe, und mit dieser (s. Abendweite) die Abend- oder Morgenweite der Sonne. Es sei diese der Rechnung oder den Schiffstabellen nach 45° nördlich. Beobachtet er nun eine derselben und den Winkel, den die Nadel mit ihr bildet, so erfährt er die A. der Nadel. Ist nämlich der Winkel der Nadel mit der Morgenweite = 65°, so ist die A. derselben = 20° westlich; dieselbe A. erhält er, wenn er den Winkel zwischen Nadel und Abendweite beobachtet, der dann = 25° gefunden wird.

**Abweichungskreis, Declinationskreis,** s. Abweichung eines Gestirns.

**Abwickelnde Linie, Evolvente,** s. u. Abwickelung.

**Abwickelung** einer krummen Linie $ABC$ geschieht, indem ein biegsamer Faden um dieselbe gelegt, in einem Punkt, z. B. $C$ befestigt, und von einem anderen Punkt, z. B. $A$ aus, unter steter Anspannung nach $C$ hin bis $E$, wo $EC$ in $C$ an $ABC$ Tangente ist, fortbewegt wird. Die Linie $ADE$ heifst die abwickelnde Linie,

Fig. 23.




Evolvente, die Linie *ABC* die abgewickelte Linie oder Evolute.

**Abwickelungslinie** s. v. w. abwickelnde Linie.

**Abziehen** (eine Zahl von einer anderen), von einer Zahl so viel Einheiten fortnehmen, als eine ihr gleichartige zweite Zahl enthält. Oder: Aus zweien Zahlen eine dritte bestimmen, die in ihren Einheiten angiebt, wie viel Einheiten die eine weniger enthält als die andere.

**Abzugsgraben**(-kanal, -rinne, -röhre). Ein Graben etc., der von einem Teich, Sumpf etc. aus angelegt wird, um stehendes Wasser abzuführen. Gräben und Rinnen sind oben offen, Kanäle offen und unterirdisch, Röhren immer unterirdisch.

**Acceleration** (Beschleunigung) ist die Länge, um welche der Weg eines sich bewegenden Punkts oder Körpers in jeder folgenden Zeit-Einheit (Secunde) gröfser wird, bleibt die A. in jeder Secunde gleich grofs, so heifst die Bewegung gleichförmig beschleunigt, ist die A. in jeder Secunde veränderlich, so heifst die Bewegung ungleichförmig beschleunigt.

**Achromatisch** (χρωμα Farbe und α Verneinungs-Vorsylbe, also: farbenlos, ungefärbt) nennt man Gläser, durch welche der Lichtstrahl farblos gebrochen wird. Der Art: Ablenkung des Lichtstrahls zeigt, dafs jeder Lichtstrahl, der aus einem Mittel in ein anderes von anderer Dichtigkeit, z. B. aus Luft in Glas übergeht, eine Aenderung seiner Richtung, eine Ablenkung, eine Brechung erleidet. Hier ist noch hinzuzufügen, dafs jeder Lichtstrahl, sowohl der primitive, von einem selbstleuchtenden Körper, wie: der Fixsterne, der Sonne, des elektrischen Funkens u. s. w., als auch der secundäre, der reflectirte, wie der vom Monde, oder von irgend einem erleuchteten Körper der Erde, aus mehreren parallelen Farbenstrahlen besteht, die vereinigt zu einem weifsen Licht sich zusammensetzen, dafs jeder dieser Farbenstrahlen, je nachdem seine Farbe ist, ein verschiedenes Brechungsvermögen hat, dafs daher der Lichtstrahl in dem Brechungspunkt zerspaltet, jeder Farbenstrahl, wie es in dem Regenbogen zu sehen ist, wenn die Sonne auf eine Regentropfenwolke scheint, eine besondere Richtung nimmt, der Strahl also in gröfserer Breite und verschiedenfarbig erscheint, und ein farbiges und undeutliches Bild von dem Gegenstande liefert, von dem er ausgegangen ist.

Diese Verbreiterung des Lichtstrahls, dessen Farbenzerstreuung und die Undeutlichkeit des Bildes wächst mit dem Winkel, in welchem der Lichtstrahl unzerspaltet sich brechen würde, bei den Linsengläsern also, wenn die Strahlen ∦ deren Axe einfallen, an deren Rändern am stärksten, nach der Mitte hin allmählich abnehmend, und bei den Fernröhren mufste man deshalb den Rand der Gläser, besonders den des Objectivglases, mit einem breiten undurchsichtigen Ring, gewöhnlich von schwarzer Pappe, Blendung genannt, versehen, damit nur die durch die mittlere Oeffnung, die Apertur, also die in der Nähe der Axe einfallenden Strahlen zu einem möglichst deutlichen Bilde vereinigt würden.

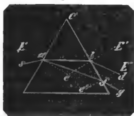
Newton, der die Zerlegung des Lichtstrahls in Farbenstrahlen durch ein Glasprisma beobachtet und gelehrt, war der Ansicht, dafs die Farbenzerstreuung, die Dispersion des Lichtstrahls der brechenden Kraft des durchsichtigen Körpers proportional sei, und dafs es unmöglich sei, Gläser zu construiren, die den Lichtstrahl ablenken (die Hauptnothwendigkeit für Fernröhre), ohne ihn zugleich in Farben zu zerlegen, bis Euler, das aus Linsen bestehende und dennoch achromatische menschliche Auge betrachtend, den Vorschlag that, statt eines Glases zwei Gläser mit zwischen gefülltem Wasser zu nehmen. John Dollond, Optiker in London, machte Versuche, erhielt durch Verbindung von Glas mit Wasser zuerst Färbung ohne Brechung, und mittelst eines in Wasser gestellten Glasprisma auch Brechung ohne Färbung; der Achromatismus war erfunden, und es gelang demselben Dollond, achromatische Linsen, ohne das Wasser als Zwischenmittel, aus verschiedenen Glasarten zusammen zu setzen. Diese beiden Glasarten, die auch noch jetzt dazu angewendet werden, sind das Flintglas und das Crownglas. Beide Glasarten bestehen, wie jedes Glas, aus Kieselerde und Kali; das Flintglas (von

dem engl. Wort: **Flint**, Feuerstein, also deutsch Feuersteinglas, weil der Feuerstein eine grofse Menge von Kieselerde enthält) mit einem Zusatz von Bleioxyd, dem es auch seine gröfsere Farbenzerstreuungskraft verdankt, das Crownglas (Kronenglas), wegen seiner schönen weifsen Farbe so genannt, ohne weitere Beimischungen, hat eine geringere Zerstreuungsfähigkeit. Aus diesem wird die biconvexe Objectivlinse gefertigt und aus Flintglas eine Hohllinse, welche, mit jener verbunden, deren farbige Strahlen wieder in parallele weifse Lichtstrahlen zusammenlenkt.

2. Zur Erklärung des Achromatismus gebrochener Strahlen soll das Folgende die Fortsetzung des Art.: **Ablenkung des Lichtstrahls** sein.

Es sei *sa* der in das Prisma eintretende Lichtstrahl, *ab* der innerhalb gebrochene, *bd* der austretende Strahl, und zwar bei der kleinsten Total-Ablenkung *D*, so wird der Lichtstrahl in Farbenstrahlen zerlegt, nach *ab* geht der rothe Strahl, der die geringste Brechung erleidet, die übrigen

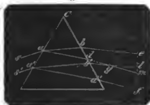
Fig. 24.



Farbenstrahlen haben Richtungen, von *a* aus, unterhalb *ab* und zwar der Reihe nach orange, gelb, grün, blau und violett. Dieser letzte Strahl von der stärksten Brechung sei *af*, so ist $\angle afe' > \angle abe$, daher auch $\angle gfE'' > \angle dbE''$, d. h. die austretenden Strahlen zwischen *db* und *gf* divergiren, und man sieht einen regenbogenfarbigen Rand *bf*.

3. Läfst man von einem leuchtenden Körper, z. B. der Sonne, durch eine kleine Oeffnung eines geschlossenen Fensterladens Licht auf ein Prisma fallen, so seien *sa*, *s'a'* die hier $\parallel$ gezeichneten Grenzstrahlen; deren Brechungen in Roth seien *ab*, *a'b'*; in Violett *ad*, *a'd'*; zwischen *bd* und *b'd'* treffen die übrigen Farbenstrahlen der beiden Grenzstrahlen *sa*, *s'a'*. Die austretenden Strahlen seien *be*, *dm*, *b'l*, *d'f*. Da nun *be* und *dm* (s. No. 2) divergiren, *be* $\parallel$ *b'l* und *dm* $\parallel$ *d'f*, so müssen sich die mittleren Strahlen, violett *dm* und roth *b'l*, in einem Punkt z. B. *g* schneiden.

Fig. 25.

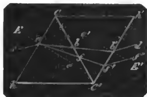


Zwischen *a* und *a'* fallen eine unendliche Menge Lichtstrahlen $\parallel$ *sa* auf das Prisma. Deren rothe Strahlen $\parallel$ mit und zwischen *ab* und *a'b'*, die violetten $\parallel$ mit und zwischen *ad* und *a'd'*; die zwischen *d* und *b'* austretenden Strahlen enthalten also alle Farbenstrahlen und in dem Farben$\triangle$ *db'g* sind sämmtliche, einen Lichtstrahl ausmachende Farben mit einander, folglich zu einem reinen weifsen Licht zusammengesetzt. In *g* durchkreuzen sich diese Lichtstrahlen und geben auf einer Tafel *ef* ein reines weifses Bild *lm*.

Innerhalb *bd* tritt nur ein einziger violetter Strahl aus, nämlich *ad*, mehrere blaue, noch mehr grüne, gelbe, orange und die meisten rothen Strahlen; innerhalb *b'd'* tritt nur ein einziger rother Strahl aus, nämlich *a'b'*, mehr orange, noch mehr gelbe, grüne, blaue und die meisten violette; *el* und *mf* auf der Tafel sind also farbige Bilder, die von *e* in starkem Roth bis *l* zum schwachen Blau und von *f* in starkem Violett bis *m* in schwachem Orange in einander verschmelzen. Bedeckt man *bd* und *b'd'* mit einer Blendung (s. No. 1.), so hat man durch die Apertur *db'* ein reines Lichtbild *lm* ohne Farbenränder.

4. Legt man an die Fläche *CC'* ein zweites Prisma *Ch'C''*, so dafs *C'h'* $\parallel$ *Ch*, so

Fig. 26.



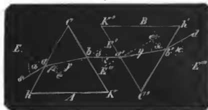
geht der rothe Strahl *ab* bis *b'* geradlinig fort, es ist das Loth *E'e'* $\parallel$ *Ee*, $\angle ab'e' = \angle b'ae$, mithin bildet der austretende

Strahl $b'd$ den $\angle db'E' = \angle Eas$, es ist $b'd$ $\ddagger$ $sa$ und der rothe Strahl $b'd$ hat keine Ablenkung erlitten.

Der violette Strahl $af$ geht geradlinig bis $f$, hier macht er mit dem Einfallsloth in $f$ den mit $\angle fae$ gleichen $\angle$, mithin hat er auch einen mit $\angle Eas$ gleichen Austritts$\angle$, und $ff'$ ist $\ddagger$ $b'd$. Der Lichtstrahl $as$ hat also die Parallelität seiner Farbenstrahlen erhalten, und erscheint in seiner ursprünglichen Reinheit, allein er ist in paralleler Richtung geblieben, also nicht abgelenkt worden.

5. Es sei $ab$ die in dem Prisma $A$ gebrochene Richtung irgend eines Strahls $sa$. Das dem $A$ gleiche, aus gleichem Stoff bestehende Prisma $B$ befinde sich in beliebiger Entfernung von $A$, doch so, dafs die Flächen $Ch$ und $C'h'$, sowie $Ck$ und $C'k'$ $\ddagger$ seien; der in $b$ austretende Strahl $ba'$ trifft das Prisma $B$ in $a'$, wird in $a'b'$ gebrochen und tritt in der Richtung $b'd$ wieder aus.

Fig. 27.



Es sind nun die Einfallslothe

$Ee \ddagger E'''e'$ und $E'e \ddagger E''e'$

daber $\delta = \varepsilon$

ferner $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\eta} = \frac{\sin x}{\sin\vartheta} =$

dem beiden Prismen zugehörigen Brechungs-Exponent,

folglich $\angle\gamma = \angle\eta$

mithin $a'b' = ab$

hieraus $\angle\beta = \angle\vartheta$

und folglich $\angle\alpha = \angle x$

woraus $b'd \ddagger sa$

Der Strahl $sa$ ist nicht gebrochen, und es ist daher gleichgültig für die Wirkung, ob die form- und stoffgleichen Prismen dicht an einander oder in beliebiger Entfernung von einander ab liegen.

6. Sind beide Prismen $A$ und $B$ von verschiedenem Stoff, haben also beide verschiedene Brechungs-Exponenten, so ist es ebenfalls gleichgültig, ob der Strahl $ab$ erst durch die Luft geht, oder ob beide Prismen dicht an einander liegen. Denn der Brechungs-Exponent von $A$ sei $= \varphi$, der von $B = \mu$. So ist für den Fall, dafs beide P auseinander liegen:

$$\frac{\text{Luft}}{A} = \varphi = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\text{Luft}}{B} = \mu = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\eta} = \frac{\sin\delta}{\sin\eta}$$

$$\text{mithin } \frac{A}{B} = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{\sin\gamma}{\sin\eta}$$

Liegen nun beide Prismen an einander, so ist der Einfallswinkel in $B = \gamma$; mithin wird, wenn der Strahl aus $A$ in $B$ tritt, durch den Einfallswinkel $\gamma$ derselbe Brechungswinkel $\eta$ erzeugt.

7. Es sei $ABC$ ein Prisma, dessen brechender Winkel $= \omega$, dessen Brechungsexponent für den rothen Strahl $= \mu$, für den violetten $= \mu'$. Es soll ein zweites Prisma $ADC$ von anderem gegebenen Stoff angelegt werden, so dafs für den unter einem bestimmten Einfalls$\angle$ $\alpha$ auf die Fläche $AB$ treffenden Lichtstrahl Ablenkung und Farblosigkeit hervorgeht.

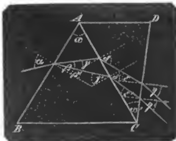
Das Prisma $ADC$ habe für Roth den Br.-Exp. $= \varphi$, für Violett $= \varphi'$; es ist der brechende Winkel $\omega'$ zu finden.

Der rothe Strahl giebt bei dem Einfalls$\angle$ $\alpha$ die Brechungs$\angle$, der Reihe nach, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ und den Austritts$\angle$ $\eta$.

Der violette Strahl, bei demselben Einfalls$\angle$ $\alpha$ die Brechungs$\angle$ $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, $\varepsilon'$ und den Austritts$\angle$ $\eta'$.

Die Aufgabe ist, $\omega'$ so zu bestimmen, dafs $\eta' = \eta$ werde.

Fig. 28.



$$\text{Es ist } \mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \quad \mu' = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}$$

$$\varphi = \frac{\sin\eta}{\sin\varepsilon}; \quad \varphi' = \frac{\sin\eta}{\sin\varepsilon'}$$

Wäre zwischen $AC$ Luft, so hätte $\angle\gamma$ für Roth einen Austritts$\angle$ $x$ und $\delta$ den selben Eintritts$\angle$ $x$; und es ist

$$\frac{\sin x}{\sin \gamma} = \mu \text{ und } \frac{\sin x}{\sin \delta} = \varphi$$

daher $\mu \sin \gamma = \varphi \sin \delta$

und da $\gamma + \beta = \omega$

also $\gamma = \omega - \beta$

so ist $\mu \sin(\omega - \beta) = \varphi \sin \delta$

woraus $\sin \delta = \frac{\mu}{\varphi} \sin(\omega - \beta)$

Eben so erhält man für Violett

$$\sin \delta' = \frac{\mu'}{\varphi'} \sin(\omega - \beta')$$

Nun ist $\delta + \varepsilon = \omega'$

Also

$$\text{I. } \sin(\omega' - \varepsilon) = \frac{\mu}{\varphi} \sin(\omega - \beta)$$

$$\text{II. } \sin(\omega' - \varepsilon') = \frac{\mu'}{\varphi'} \sin(\omega - \beta')$$

Hierzu

III. $\varphi \sin \varepsilon = \varphi' \sin \varepsilon'$

Mithin 3 Gleichungen für die 3 unbekannten Gröfsen $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\omega'$, aus welchen also $\omega'$ gefunden wird.

8. Gehlers physikalisches Wörterbuch, Bd. 7, pag. 941 bis 943 (Verfasser Brandes) lös't diese Aufgabe mit Hülfe der Differenzialrechnung, da jedoch die Mathematik bei diesem Wörterbuch nur Hülfswissenschaft ist: Satz für Satz in Resultaten, denen nur mit Hülfe eigenen Zwischenrechnens zu folgen ist. Beide Prismen hier liegen auseinander, es entstehen also mit den Ein- und Austrittswinkeln 8 Winkel, die nach einander mit $\varphi$ bis $\varphi^{VII}$ bezeichnet sind; auch ist mit $\mu$ der reciproke Werth $\frac{1}{\mu}$ bezeichnet. Das dort gegebene interessante Beispiel soll hier mit den vorstehenden 3 Gleichungen durchgeführt werden.

Ein Wasserprisma hat den brechenden $\angle \omega = 20°$, der Einfalls $\angle \alpha = 15°$; $\mu' - \mu$ [dort mit $d\frac{1}{\mu}$ bezeichnet] ist angegeben $= 0{,}0068$

Nämlich Roth $\mu$ wohl $= 1{,}3321$

Violett $\mu' = 1{,}3389$

$\mu' - \mu = 0{,}0068$

Dies Prisma soll durch ein Flintglasprisma achromatisirt werden.

$\varphi' - \varphi \left[ d\frac{1}{\varphi} \right]$ ist angegeben 0,0213

Nämlich Roth $\varphi$ wohl $= 1{,}63074$

Violett $\varphi' = 1{,}65204$

$\varphi' - \varphi = 0{,}0213$

Nun ist $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\mu} = \frac{\sin 15°}{1{,}3321}$

giebt $\log \sin \beta = 9{,}2884594 - 10$

woraus $\beta = 11° \, 12' \, 12{,}55''$

[Brandes findet $\beta = 11° \, 12' \, 13''$]

Eben so ist $\log \sin \beta' = \log \frac{\sin 15°}{1{,}3389}$

$= 9{,}2862481 - 10$

woraus $\beta' = 11° \, 8' \, 45{,}08''$

[Brandes findet $\beta' = 11° \, 8' \, 45''$]

Es ist nun $\omega - \beta = 8° \, 47' \, 47{,}45''$

und $\omega - \beta' = 8° \, 51' \, 14{,}92''$

folglich (Gleich. I. und II.)

$$\log \sin(\omega' - \varepsilon) = \log \frac{1{,}3321}{1{,}63074} \cdot \sin 8° \, 47' \, 47{,}45''$$
$$= 9{,}09663525 - 10$$

und

$$\log \sin(\omega' - \varepsilon') = \log \frac{1{,}3389}{1{,}65204} \cdot \sin 8° \, 51' \, 14{,}92''$$
$$= 9{,}09602142 - 10$$

woraus $\omega' - \varepsilon = 7° \, 10' \, 34{,}30''$

und $\omega' - \varepsilon' = 7° \, 9' \, 57{,}61''$

Hieraus $\varepsilon' - \varepsilon = 36{,}69''$

[Brandes findet

$\omega' - \varepsilon = \delta = 7° \, 10' \, 34''$

$\omega' - \varepsilon' = \delta' = 7° \, 9' \, 59''$

also $\delta' - \delta = 35''$]

Aus Gleichung III. erhält man

$$\varphi : \varphi - \varphi' = \sin \varepsilon' : \sin \varepsilon' - \sin \varepsilon$$

da $\varepsilon' - \varepsilon$ nur 36,69'', so kann man ohne einen Irrthum zu begehen $\sin \varepsilon' - \sin \varepsilon = \sin 36{,}69''$ setzen; dann ist

$$\sin \varepsilon' = \frac{\varphi}{\varphi - \varphi'} \sin 36{,}69''$$

und

$$\log \sin \varepsilon' = \log \frac{1{,}63074}{-0{,}0213} \cdot \sin 36{,}69''$$

also

$$\log \sin(-\varepsilon') = \log \frac{1{,}63074}{0{,}0213} \cdot \sin 36{,}69''$$
$$= 8{,}1341275 - 10$$

woraus $-\varepsilon' = 46' \, 49{,}10''$

Nun ist $\omega' - \varepsilon' = 7° \, 9' \, 57{,}61''$

also $\omega' = 6° \, 23' \, 8{,}51''$

Aus $\angle \varepsilon' = -46' \, 49{,}10''$

und $\varepsilon' - \varepsilon = + \quad 36{,}69''$

hat man $\angle \varepsilon = -47' \, 25{,}79''$

[Brandes findet $\varepsilon = -46' \, 34''$

$\varepsilon' = -45' \, 57''$]

Um nun $\eta$ mit $\eta'$ zu vergleichen, hat man:

$\sin \eta = \varphi \cdot \sin \varepsilon = 1{,}63074 \times \sin(-47' \, 25{,}79'')$

$\sin \eta' = \varphi' \sin \varepsilon' = 1{,}65204 \times \sin(-46' \, 49{,}10'')$

Also

$\log \sin(-\eta) = \log 1{,}63074 \times \sin 47' \, 25{,}79''$

$= 8{,}3521480 - 10$

woraus $\eta = -1° \, 17' \, 20{,}98''$

und

$\log \sin(-\eta') = \log 1{,}65204 \cdot \sin 46' \, 49{,}10''$

$= -8{,}3521490 - 10$

woraus $\eta' = -1° \, 17' \, 20{,}99''$

so dafs der Unterschied zwischen $\eta$ und $\eta'$ nur 0,01 Secunde beträgt.

[Brandes erhält $\eta = 1° \, 15' \, 57''$

$\eta' = 1° \, 15' \, 55''$]

Dafs beide Rechnungen mit einander differiren, und dafs bei Brandes $\eta$ und $\eta'$ nicht ganz gleich grofs gefunden werden, liegt darin, dafs dort die Differenzen $\varphi-\varphi'$; $\mu-\mu'$ als Differenziale angesehen werden, was nur näherungsweise richtig ist.

Der einfallende Strahl hat in Roth und Violett den $\angle \alpha = 15°$; der zuerst gebrochene Strahl

in Roth $\beta = 11° \, 12' \, 12{,}55''$
in Violett $\beta' = 11° \; 8' \, 45{,}08''$

$\beta - \beta' = 3' \, 27{,}47''$

Dieselben Strahlen gegen die zweite Fläche *AC* die Differenz $\gamma' - \gamma = 3' \, 27{,}47''$.

Die hieraus in dem 2ten Prisma gebrochenen Strahlen

$\delta = 7° \, 10' \, 34{,}30''$
$\delta' = 7° \; 9' \, 57{,}61''$

Differenz $\delta - \delta' = 36{,}69''$

Dieselben Strahlen, in *CD* treffend, die Differenz

$\epsilon' - \epsilon = 36{,}69''$

und die austretenden Strahlen $\eta'$ und $\eta$ die Differenz $\eta' - \eta$ nur 0,01 Secunden.

Die Totalbrechung oder Ablenkung beträgt $15° + 1° \, 17' \, 21'' = 16° \, 17' \, 21''$.

**Achse** ist ein Körper, um welchen andere mit demselben fest verbundene Körper sich drehen. Die Mittellinie einer festen Achse, welche während der Umdrehung allein in unveränderlicher Lage bleibt, welche aber, wenn die Achse sich fortbewegt, nur die Richtung angiebt, in welcher das System in jedem Augenblick sich fortbewegt, ohne sich zu drehen, ist die Axe der Achse und des ganzen Systems. (Vergl. Axe.)

**Achteck.** 1. Eine aus 8 Seiten bestehende Figur. Die Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke (Im $n$eck $= 2n - 3) = 13$.

Die Anzahl der Dreiecke, in die es zerlegt werden kann, $n - 2 = 6$, und zwar durch $n - 3 = 5$ Diagonalen.

Die Anzahl aller möglichen Diagonalen $\frac{1}{2} n(n-3) = 20$.

Die Summe sämmtlicher Umfangswinkel $2n - 4 = 12 \, R\angle$.

Die gröfstmögliche Zahl der convexen Winkel $n - 3 = 5$.

(Vergl. Viereck, Fünfeck, Sechseck, Vieleck.)

2. Regelmäfsiges Achteck.
($F$=Inhalt des A. im Kreise,
$F'$ desselben um den Kreis.)

$$x = \frac{4}{n} R\angle = \frac{1}{2} R\angle = 45°$$

$$y = \frac{2n-4}{n} R\angle = \frac{3}{2} R\angle = 135°$$

$$s = r\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r \sin 22\tfrac{1}{2}° = r \times 0{,}7653668$$

$$S = 2r\,(\sqrt{2}-1) = 2r \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}° = r \times 0{,}8284272$$

$$r = \tfrac{1}{2} s\sqrt{2(2+\sqrt{2})} = \tfrac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 22\tfrac{1}{2}° = s \times 1{,}3065628$$

$$r = \tfrac{1}{2} S(\sqrt{2}+1) = \tfrac{1}{2} S \cot 22\tfrac{1}{2}° = S \times 1{,}2071068$$

$$F = 2r^2\sqrt{2} = 4r^2 \sin 45° = r^2 \times 2{,}8284272$$

$$F = 2s^2(1+\sqrt{2}) = 2s^2 \cot 22\tfrac{1}{2}° = s^2 \times 4{,}8284272$$

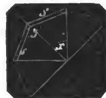
$$F' = 8r^2(\sqrt{2}-1) = 8r^2 \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}° = r^2 \times 3{,}3137088$$

$$F' = 2S^2(\sqrt{2}+1) = 2S^2 \cot 22\tfrac{1}{2}° = S^2 \times 4{,}8284272$$

Soll man die Seite des regulären Achtecks finden, wenn der Inhalt $F$ gegeben ist, so hat man

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)F} = \sqrt{\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}° \cdot F} = 0{,}4550899\sqrt{F}.$$

Fig. 29.



3. Geometrische Construction des regulären Achtecks.

Fig. 30.



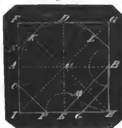

1. Wenn der Halbmesser $R$ des umschriebenen Kreises gegeben ist, so nimm $CA = CB = r$, beschreibe den Kreis, errichte in $C$ den normalen Durchmesser $DE$, halbire die vier rechten Centriwinkel, so erhält man die acht Punkte in der Peripherie, die man der Reihenfolge nach mit Sehnen verbindet.

2. Wenn der Halbmesser $r$ des inbeschriebenen Kreises gegeben ist. Man verfahre wie *ad* 1, construire das Quadrat *FGHI* und in den Punkten *K*, *L* u. s. w. Normalen auf *CF*, *CG* u. s. w. bis an die

Seiten des Quadrats, so erhält man das reg. Achteck.

Nach construirtem Quadrat kann man auch nach der Formel $S=2r(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2r^2}-r)$ verfahren. Zieht man nämlich

Fig. 31.



$BE$, so ist diese $=\sqrt{2r^2}$, beschreibt man nun den Bogen $HM$ aus $B$, so ist $EM=\sqrt{2r^2}-r=$ der halben Seite $S$, beschreibt man nun aus den Punkten $A$, $E$, $B$ u. s. w. mit $EM$ als Radius, Halbkreise über $FI$, $HI$ u. s. w., so erhält man die Durchschnittspunkte $N$, $O$, $P$, $Q$, .... von denen man $O$ mit $P$ u. s. w. durch gerade Linien verbindet.

3. Wenn eine Seite $S$ gegeben ist. Nimm $AB=S$, verlängere $S$ durch $B$, errichte in $B$ auf $AB$ das Loth $BD$, halbire $\angle DBM$ durch $BE$, nimm $BE=AB$, ziehe $AE$, zeichne über $AE$ das Quadrat $AEGH$, halbire $HG$ in $N$, ziehe $BI$ durch $N$, halbire $AH$ in $O$, $EG$ in $P$, ziehe $KL$ durch

Fig. 32.



$O$, $P$, nimm $CI=CK=CL=CB$, so bilden die Punkte $A$, $B$, $E$, $L$, $G$, $I$, $H$, $K$ die acht Ecken des verlangten Achtecks.

**Achtelkreis** (Octant), der achte Theil eines Kreis-Umfangs.

**Achtflach** (Octaëder), ein Körper, der von acht gleich grofsen gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

**Achtflächner**, der deutsche Name des Octaëders in der Krystallographie.

**Achtundvierzigeck**. Eine aus 48 Seiten bestehende Figur. (Vergl. Viereck, Fünfeck, Sechseck, Vieleck.)

Reguläres Achtundvierzigeck. Bei denselben Bezeichnungen wie beim Achteck hat man

$$s=\frac{4}{n}R\angle=\frac{1}{12}R\angle=7^\circ 30'$$

$$y=\frac{2n-4}{n}R\angle=\frac{23}{12}R\angle=172^\circ 30'$$

$$s=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=2r\sin 3^\circ 45'$$
$$=r\times 0,1308062$$

$$S=2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=2r\,tg\,3^\circ 45'$$
$$=r\times 0,1310870$$

$$r=s\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\tfrac{1}{2}s\,cosec\,3^\circ 45'$$
$$=s\times 7,6448995$$

$$r=\tfrac{1}{2}S\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=\tfrac{1}{2}S\cot 3^\circ 45'$$
$$=S\times 7,6285263$$

$$F=48r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=24r^2\sin 7^\circ 30'$$
$$=r^2\times 3,1326288$$

$$F=48s^2\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=12s^2\cdot\cot 3^\circ 45'$$
$$=s^2\times 183,08463$$

$$F=48r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=48r^2\,tg\,3^\circ 45'$$
$$=r^2\times 3,1460880$$

$$F=12S^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=12S^2\cot 3^\circ 45'$$
$$=S^2\times 183,08463$$

**Addiren**. Mehrere gleichartige, nach irgend einem System geschriebene Zahlen zu einer einzigen Zahl durch Zusammenzählen vereinigen, und diese nach demselben System darstellen. Die einzelnen Zahlen heifsen Summanden, das Resultat die Summe.

**Addition**. 1. Die Rechnungsart oder das Verfahren beim Addiren. Das Zeichen, welches die Addition verlangt, das Additionszeichen ist ein stehendes Kreuz (+), *plus* genannt: $a+b$, $5+6$ heifst: es soll $a$ zu $b$, 5 zu 6 addirt werden; man liest: $a$ *plus* $b$, 5 *plus* 6.

Nur gleichartige Gröfsen können addirt werden, also nur solche, die sich auf einerlei Einheit beziehen.

2. Bei unbenannten Zahlen addirt man also Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern

u. s. w., Zehntel zu Zehnteln, Hundertel zu Hunderteln u. s. w.

Beispiele.

| | |
|---|---|
| 124356 | 0,5340 |
| 75180 | 12,79 . . |
| ·1921 | 218,321 . |
| 35272 | 4,0009 |
| 236729 | 235,6459 |

Man setzt die gleichen Einheiten unter einander. Um bei Decimalen nicht zu irren, füllt man die fehlenden Stellen mit Nullen oder Punkten aus; letzteres kann auch bei ganzen Zahlen geschehen. Die Einersumme ist 9, die Zehnersumme 22, mithin 2 Zehner und 2 Hunderter; letztere werden zu den Hundertern addirt und man erhält 1700, d. i. 1 Tausender und 7 Hunderter u. s. w. Eben so verfährt man bei den Decimalbrüchen.

3. Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, addirt man zum zweiten Mal und zwar von unten nach eben, wenn man zuerst von eben nach unten addirt hat. Es ist aber möglich, dafs die Reihenfolge von Zahlen in beiden Rechnungen irgend wo übereinstimmt, daher ist die Probe sicherer, bei welcher man zum zweiten Mal in derselben ersten Richtung addirt und mit einer um 1 gröfseren oder geringeren Zahl anfängt. Man sagt also bei der Proberechnung $7+0+1+2=10$ und schreibt 9; $6+8+2+7=23$ und nimmt 22, statt des Restes 2 für die Hunderter nimmt man 3 und sagt $3+3+1+9+2=18$ u. s. w.

4. Eine dritte Prüfungsweise ist die sogenannte Neunerprobe: Nämlich die Summe der Ziffern der Summanden durch 9 dividirt, giebt denselben Rest, der entsteht, wenn man die Summe der Ziffern der Summe durch 9 dividirt.

In 124356 ist die Summe der Ziffern = 21
„ 75180 „ „ „ „ „ = 21
„ 1912 „ „ „ „ „ = 13
„ 35272 „ „ „ „ „ = 19
Summe = 74

In 236729 ist die Summe der Ziffern = 29

$\frac{74}{9}=8+\frac{2}{9}$, $\frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}$ — Der Rest ist in beiden gleich grofs, folglich die Addition richtig ausgeführt.

In dem zweiten Beispiel ist die Summe der Ziffern der Summanden = 61, der Summe 34, jede Zahl mit 9 dividirt giebt den Rest 7.

Eine vierte Prüfungsweise ist die Eilferprobe: Man nimmt die Summe der Zahlen in den ungeraden Stellen von der Rechten zur Linken und subtrahirt davon die Summe der Zahlen in den geraden Stellen. In dem ersten Beispiel ist die Summe der ungeraden Stellenzahlen

$11+8+10+7=36$, die der geraden
$10+13+3+12=38$
Differenz $=-2$

und da diese negativ ist, so addirt man 11 hinzu, giebt die Probezahl = 9; in der Summe erhält man $19-10=9$. Beide Probezahlen stimmen überein, und daher ist die Addition richtig ausgeführt.

In dem zweiten Beispiel mufs von den Einern als erste Stelle ausgegangen und nach links und rechts gezählt werden.

Die ungeraden Stellen geben
$3+11+12+13=39$
Die geraden Stellen
geben . . . . . . $9+8+5+0=22$
Differenz = 17
hiervon 11 abgezogen giebt die Probezahl . . . . . . . . . . . . . . . 6
in der Summe hat man $20-14$. . . = 6

Beide letztgenannten Proben, die Neuner- und die Eilferprobe, sind trüglich, indem auch unrichtige Summen mit den Summanden einerlei Probezahl geben können.

5. Bei Addition von periodischen Decimalbrüchen thut man wohl, die Stellen bis auf den spätesten Eintritt einer Periode zu ergänzen, also das Exempel 1 wie 2 zu schreiben.

| 1) | 2) |
|---|---|
| 0,594 . . . . | 0,59444 . . . |
| 0,7 . . . . . . | 0,77777 . . . |
| 0,30065 . . | 0,30065 . . . |
| | 1,67287 . . . |

Die letzte Stellenreihe $=4+7+5=16$ ist das Resultat für jede spätere Reihe, es mufste also die 1 zu jeder folgenden hinzugezählt werden, und die Periode fängt mit der Zahl 7 an.

Bei Brüchen ist die Einheit = 1 dividirt durch den Nenner. Die Addition von Brüchen gleicher Nenner besteht in der Addition der Zähler, deren Summe den Nenner eines Summanden erhält, z. B. $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+2+1}{8}=\frac{6}{8}$. Haben die Brüche verschiedene Nenner, so müssen dieselben auf einen gemeinschaftlichen Nenner (Generalnenner) gebracht werden. Es geschieht dies, indem man die kleinste Zahl sucht, in welche sämmtliche Nenner aufgehen, und jeden Zähler der Summanden so vielfach nimmt, als dessen gegebener Nenner geworden ist: z. B. $\frac{5}{7}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$.

Die kleinste Zahl, in welche 7; 8 und 4 aufgehen, ist 56. Man hat demnach

$$\frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{40+21+14}{56} = \frac{75}{56}$$

7. Bei benannten Zahlen addirt man die Zahlen, die sich auf einerlei Gegenstand beziehen, also z. B. Pfennige mit Pfennigen, Groschen mit Groschen, Thaler mit Thalern; ebenso bei Centnern, Pfunden, Lothen u. s. w.

8. Bei allgemeinen Gröfsen ist die Summe der mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten die mit + ausgedrückte Additionsforderung: $a+b+c$ bleibt als Summe $a+b+c$, $a+a$ ist $=2a$; $3b+7b=10b$. Zusammengesetzte Gröfsen werden mit ihren gleichen Buchstaben unter einander gestellt und addirt:

$$\begin{array}{rl} & a+5b+6c+d \\ & 3a+7b+c+3d \\ \hline \text{Summe} & 4a+12b+7c+4d \end{array}$$

Die Addition von Gröfsen mit entgegengesetzten Vorzeichen geschieht nach dem Begriff derselben, nämlich dafs deren gleiche Quantitäten sich gegenseitig aufheben, sich zu Null machen: $a-a=0$; $3C-3C=0$.

$$\begin{array}{rl} & -7a+3b+5c-3a \\ & -4a+2b-c+2a \\ \hline \text{Summe} & -11a+5b+4c-a \end{array}$$

**Additionszeichen** s. u. Addition. 1. In zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrükken wird für die erste Gröfse, wenn sie *plus* ist, das Zeichen nicht gesetzt. Man schreibt nicht $+a-b$, sondern $a-b$.

**Additiv** ist eine Gröfse, wenn man sie dem Verlangen einer Aufgabe gemäfs zu einer Zahl addiren, d. h. diese letzte um die Summe der Einheiten, welche die additive Zahl enthält, vermehren soll. In den Ausdrücken

$$a+b;\ c-(a+b)$$

sind $a$ und $b$ additiv; aus dem zweiten Beispiel geht hervor, dafs additiv mit positiv nicht zu verwechseln ist.

**Adhärenz,** die Kraft, vermöge welcher zwei gleichartige oder ungleichartige Körper mit ihren Oberflächen sich anziehen, an einander haften. Z. B. zwischen zwei polirten Körpern, zwischen Wasser und Gefäfswandungen. (S. Adhäsion.)

**Adhäsion.** Die Wirkung der Adhärenz, Anziehung zweier gleichartiger oder ungleichartiger Körper bei gegenseitiger Berührung deren Oberflächen, oder Bestreben der auf den Oberflächen beider Körper befindlichen Massentheilchen, bei deren Berührung wechselseitig an einander haften zu bleiben.

Die A. ist darin von der Cohäsion, der Wirkung der Cohärenz, verschieden, dafs bei dieser sämmtliche Massentheilchen eines Körpers das Bestreben haben, wechselseitig an einander haften zu bleiben, und somit der mechanischen Zerstörung des Körpers entgegen zu wirken.

Die Reibung ist nicht A., sondern die Folge von dem gegenseitigen Ineinandergreifen der Hervorragungen des einen Körpers in die Vertiefungen des anderen, wodurch eine Verschiebung beider Körper längs deren Oberflächen erschwert wird. Beide Wirkungen, die Reibung und die A., wachsen mit dem Druck, den beide Körper auf einander ausüben. Für die Gröfse der Reibung bei gleich bleibendem Druck zweier Körper auf einander ist die Gröfse deren Berührungsflächen gleichgültig, während die A. dagegen mit derselben zunimmt, weil sie mit der Summe der zur Berührung kommenden, materiellen Theilchen, deren jedem eine gleich grofse Kraft der Adhärenz inne wohnt, wachsen mufs. Aus diesem letzten Grunde wächst auch die A. mit der Glätte der sich berührenden Körper-Oberfläche, während die Reibung mit dem Grade der Glätte sich vermindert.

Beide Wirkungen, die Reibung und die A., unterstützen sich gegenseitig zum Widerstande gegen das Verschieben der Körper längs deren Oberflächen: Rauhe Riemen über hölzernen Riemenscheiben bei Maschinen ziehen zum gröfsten Theil vermöge der Reibung; eine gröfsere Zugkraft haben glatte Riemen über eisernen mit möglichst sauber polirter Oberfläche versehenen Riemenscheiben vermöge der stärkeren Wirkung der Adhäsion zwischen Riemen und polirtem Eisen.

Wenn die sehr glatten ebenen Oberflächen zweier Körper über einander geschoben oder über einander gerieben werden, so kann zwischen mehreren einzelnen Flächen-Elementen die atmosphärische Luft fortgeschafft worden sein; die auf den Körper wirkende Atmosphäre äufsert sich dann mit ihrer ganzen Druckkraft auf diese Flächen-Elemente mit cc. 15 Pfund pro □Zoll Fläche und verstärkt dadurch die Wirkung der A. Bei der Art, wie die Riemenscheibe den Riemen in jedem Augenblick ergreift und herumführt, ist ein theilweises Fortquetschen der zwischen befindlichen Luft wohl denkbar. Dafs der Riemen wegen der convexen Scheiben-Oberfläche nicht von der Seite herabrutscht, liegt nicht in der A., sondern einzig in der Centrifugalkraft.

Die Zugkraft der Locomotive in den beiden Treibrädern beruht auf der durch gleitende Reibung verstärkten Wirkung der A. zwischen den Radbahnen und den Schienen, während bei deren Laufrädern und den Rädern aller übrigen Wagen die A. durch deren Wälzung über die Schienen

bedeutend vermindert wird. Man stellt sich dies wohl am überzeugendsten vor, indem man sich erstens einen Lastwagen nicht durch eine Locomotive, sondern durch eine andere horizontal angebrachte Kraft fortgezogen denkt, wobei also nur die geringe wälzende Reibung zwischen Rädern und Schienen zu überwinden ist; und zweitens, indem man einen so schweren Eisenbahnzug annimmt, dafs die Locomotive denselben nicht fortschaffen kann, in diesem Fall nämlich drehen die Treibräder sich auf derselben Stelle, und zwar schleifend auf den Schienen. Es ist mithin bei der fortschreitenden Bewegung der Locomotive in jedem Augenblick eine Schleifung zwischen den Bahnen der Treibräder und den Schienen im Beginnen.

Die Gröfse der A. zwischen zweien Körpern hangt auch ab von deren physikalischen Beschaffenheit: Weiche Stoffe, wie Blei, haben eine gröfsere A. als harte, wie Eisen. Man kann zwei Bleiplatten durch mäfsigen Druck so innig mit einander verbinden, dafs sie schwer wieder zu trennen sind.

Zwischenmittel vermindern und vermehren die A. Zwischen 2 sonst stark adhärirende polirte Metallflächen einen Bogen Papier gebracht, hebt die A. auf. Wasser zwischen Eisen vermindert gleichfalls dessen A. Eisenbahnzüge auf nassen Schienen werden verzögert, Glatteis auf Schienen hebt die A. ganz auf, Schmiermittel zur Verminderung der Reibung und der Abnutzung wirken vermöge der A. mit den reibenden Flächen. Flüssiger Leim auf Holzflächen gestrichen adhärirt bedeutend, beide Hölzer zusammengeschraubt, den Leim trocknen lassen, giebt noch diesem durch Cohäsion Festigkeit seiner einzelnen Theilchen unter sich, und die Hölzer sind nicht mehr zu trennen. Schmiere zwischen Zapfen und Lager ohne Drehung eintrocknen lassen, Versiegelung mit Siegellack u. s. w., geben dieselben Adhäsions-Erscheinungen.

Feste Körper adhäriren mit Flüssigkeiten, mit anderen nicht, man sagt: sie werden von denselben benetzt oder nicht.

Die Leinenfaser, Holz, Eisen, werden von Wasser benetzt, von Quecksilber nicht; Harze adhäriren mit Oel, mit Wasser nicht. Hierauf gründet sich die Adhäsions-Erscheinung, welche man Capillarität (Haarröhrchen-Anziehung) nennt: Wasser in sehr enge, oben und unten offene Glasröhrchen eingesogen, fliefst nicht heraus, es mufs mit Anwendung von äufserer Kraft, durch Stofs, oder heraus geblasen werden, weil die A. des Wassers gegen die Röhrenwandungen sowohl die Cohäsion der Wassertheilchen unter sich bei dem so geringen Querschnitt, als auch die Schwere derselben übersteigt. Auf dieser Erscheinung beruht das Aufsaugen von Oel, Brennspiritus in einen Docht, die gänzliche Durchnässung eines Waschschwamms, der nur unterhalb und zum geringen Theil im Wasser liegt, die Durchnässung von Holzkohlen, Ziegelmehl und anderer poröser aufgehäufter Körper, die blofs mit der untersten Schicht in Wasser liegen. Dachplatten aus Gufseisen leiten das Wasser, womit sie vom Regen benetzt werden, vermöge ihrer Porosität bis auf das innere Sparrwerk, und veranlassen so dessen Zerstörung. (Vergl. Anziehung, Cohäsion, Capillarität.)

**Ad infinitum** s. v. w. bis in's Unendliche. Z. B. $a + a^2 + a^3 + \dots$ ad inf.

**Aechter Bruch** (eigentlicher Bruch). Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als dessen Nenner, als $\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{n}{n+m}$.

**Aehnlich** (∼) ist übereinstimmend in der Form.

1. Analytisch ähnlich sind gleichartige Ausdrücke, wenn deren gleichliegende Gröfsen in einerlei Verhältnifs stehen. Z. B. die Flächen- oder Planzahlen $ab$, $cd$, wenn $a:c=b:d$; die Körperzahlen $abc$ und $def$, wenn $a:d=b:e=c:f$; die beiden gleichartigen Gleichungen

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$
$$y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$$

wenn $a:\alpha=b:\beta=c:\gamma$, und es haben die 3 Wurzeln der ersten Gleichung zu den 3 Wurzeln der zweiten Gleichung dasselbe Verhältnifs.

2. Geometrisch ähnlich sind Linien, wenn deren kleinste Theile in einerlei Verhältnifs und nach einerlei Ordnung genommen, einerlei Lage gegen einander haben. Daher sind alle geraden Linien einander und alle Kreislinien einander ähnlich. Kreisbogen sind einander ähnlich, wenn sie gleiche aliquote Theile ihrer vollständigen Kreislinien sind.

Alle Parabeln sind einander ähnlich, denn nimmt man in mehreren Parabeln nach einander die Parameter $p$, $2p$, $3p$ u. s. w. und die Abscissen von dem Scheitel aus zu $p$ gehörig $x_1$; $x_2$; $x_3$; zu $2p$ gehörig $2x_1$; $2x_2$; $2x_3$; zu $3p$ gehörig $3x_1$; $3x_2$; $3x_3$ u. s. w., so erhält man aus der Gleichung $y^2=px$ die dazu gehörigen Ordinaten für den Parameter $p$:

$y_1=\sqrt{px_1}$; $y_2=\sqrt{px_2}$; $y_3=\sqrt{px_3}$ u. s. w.

für den Parameter $2p$

$y' = \sqrt{2p \cdot 2x_1} = 2\sqrt{px_1}$ mithin $y' = 2y_1$

$y'' = \sqrt{2p \cdot 2x_2} = 2\sqrt{px_2}$ mithin $y'' = 2y_2$

für den Parameter $3p$

$y' = \sqrt{3p \cdot 3x_1} = 3\sqrt{px_1}$ mithin $y' = 3y_1$

u. s. w.,

so dafs also die Ordinaten mit den Abscissen und mit den Parametern in einerlei Verhältnifs stehen.

Ellipsen sind ähnlich, wenn deren Axen einerlei Verhältnifs haben.

Geradlinige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in eine Lage gebracht werden können, dafs je 2 Seiten ⫲ laufen; ihre gleichliegenden Seiten haben einerlei Verhältnifs.

Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden, von denen jedes Dreieck in der einen Figur dem gleichliegenden in der andern ähnlich ist.

Kreisflächen und reguläre Vielecke von gleich viel Seiten sind einander ähnlich, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonalen; ähnliche Ellipsenflächen verhalten sich wie die Quadrate der grofsen oder der kleinen Axen.

Körper sind ähnlich, wenn beliebig gleichgelegte Durchschnitts-Ebenen ähnliche Figuren geben; sie bilden ähnliche Körper-Abschnitte.

Alle Kugeln und alle regulären Körper von gleich viel Seitenflächen sind einander ähnlich.

Kegel sind ähnlich, wenn sie als Abschnitte eines von der Spitze aus unendlich weit fortgeführten Kegels betrachtet werden können, wobei die Durchschnitts-Ebenen ⫲ laufen.

Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen sich wie ihre Durchmesser verhalten.

Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grund-Ebenen ähnlich sind, und die gleichliegenden Seitenkanten mit den gleichliegenden Grundkanten in beiden einerlei Verhältnifs haben.

**Aehnliche** Dreiecke, Figuren, Gröfsen, Körper, Körper-Abschnitte s. u. ähnlich.

**Aehnlich-gleich**, eigentlich: ähnlich und gleich, congruent (≅) ist Uebereinstimmung in Gröfse und Form.

**Aehnlichkeit** ist Uebereinstimmung in der Form.

**Aequal** (gleich) ist Uebereinstimmung in der Quantität.

**Aequator**, Aequator des Himmels, Himmels-Aequator, Welt-Aequator. Ist für uns nicht wahrnehmbar, sondern nur scheinbar vorhanden. Unsere Erde nämlich dreht sich alle 24 Stunden einmal um ihre Axe von Westen nach Osten, und da jeder Punkt der Erdoberfläche uns still zu stehen scheint, so scheint uns, als ob die ganze Himmelskugel alle 24 Stunden um dieselbe Axe von Ost nach West sich bewegte. Es

Fig. 33.




sei $S$ die Sonne, $E$ und $E'$ seien die Endpunkte der grofsen Axe der Ekliptik, so dafs $EE'$ circa 42 Millionen Meilen beträgt, $s$ sei irgend ein Fixstern, so ist Beobachtungen zufolge $\angle sE'D = \angle sED$, mithin $\angle E'sS = 0$. Die Entfernung der Fixsterne von unserem Sonnensystem ist also so grofs, dafs ein Vorrücken der Erdaxe auf 42 Millionen Ml. Länge, deren Richtungen immer ⫲ zu einander bleiben (s. Aequator der Erde), unbemerkbar ist, und somit erscheint in allen Punkten der Ekliptik die Erdaxe in ihrer beiderseitigen Verlängerung bis in unendliche Ferne die stillstehende Weltaxe, desgleichen in jedem Punkte der Ekliptik die allseitige Verbreiterung des Erd-Aequators bis in's Unendliche der Welt-Aequator zu sein. Diese Kreisebene wird in 360°. getheilt.

Von diesem Aequator oder dem Erd-Aequator aus, ist jedes Gestirn, wo es am Himmel sich auch befinde, 12 Stunden lang über und 12 Stunden lang unter dem Horizont, und jedes beschreibt einen vollen Kreis, von denen der des im Aeq. selbst befindlichen Gestirns als der gröfste erscheint. Daher der Name Aequator (Gleicher, Gleichmacher).

Jeder andere Planet hat eine Ekliptik von anderer Neigung gegen seinen Aeq., jeder andere Planet hat also eine andere scheinbare Weltaxe und einen anderen scheinbaren Welt-Aequator.

Die Lehre von der Attraction der Weltkörper unter einander ist zwar nur hypothetisch, allein sie stimmt mit allen

Beobachtungen und Erfahrungen für unser Sonnensystem haarscharf überein und ist somit für dieses als richtig begründet. Man mufs daher annehmen, dafs, wenn die gesammte Welt Bestand haben soll, die Sonne mit ihren Planeten und deren Trabanten eben so mit allen übrigen Sonnen des Weltalls (den Fixsternen) und den ihnen zugehörigen Systemen in Attractionsverhältnissen stehen und folglich um einander sich bewegen.

In neuerer Zeit hat man bei der jetzt so aufserordentlichen Schärfe der Beobachtungs-Instrumente auch wirklich fortschreitende Bewegungen der Sonne und einiger Fixsterne gefunden, zunächst also Orts-Veränderung unseres Sonnensystems, und es beträgt nach Bessel die relative Bewegung der Sonne und des 6. Sterns im Schwan täglich 834000 geogr. Ml. Wie viel unser Sonnensystem allein und der Stern im Schwan allein sich bewegt, also deren absolute Bewegung, ist noch nicht ermittelt, und man hat nur berechnet, dafs die Fortrückung des genannten Sterns in 700 Jahren etwa einen Grad ausmacht; ebenso ist der Stern nicht bekannt, um welchen als Sonne die planetarischen Bewegungen geschehen.

Der Raum, dieser einfache Begriff, ist als begrenzt undenkbar, er ist also unendlich, und da in jeder Raum-Abtheilung sich Weltkörper bewegen können und sich auch wohl bewegen werden, so ist die Anzahl der Sonnen des Weltalls wiederum eine unendliche. Demnach ist es wieder undenkbar, dafs eine einzige Sonne von Gröfse, welche die der übrigen übertrifft, still stände und das ganze Weltall um dieselbe sich bewegte; im Gegentheil ist anzunehmen, dafs sämmtliche Sonnensysteme gruppenweise um einander sich bewegen, so dafs eine einzige gröfste Sonne einer Gruppe als fester Punkt derselben durch eine Summe von um sich herum kreisenden Sonnensystemen vertreten wird, und dafs dies ganze System höherer Ordnung, z. B. der $n$ten wiederum mit anderen Systemen höherer Ordnung zu einem System der $n+1$ten Ordnung wird u. s. f.

Dieser Betrachtung zufolge wäre eine Weltaxe und ein Welt-Aequator nicht vorhanden.

**Aequator der Erde.** Die auf der Erdaxe normal befindliche und von beiden Polen gleich weit abstehende Kreislinie: Die durch den Kreis gedachte Ebene heifst die Aequator-Ebene; diese theilt die Erdkugel in zwei Hälften, in die nördliche Halbkugel mit dem Nordpol und in die südliche mit dem Südpol.

Der Erd-Aequator wird, wie jeder Kreis-Umfang, in 360° getheilt; die ganze Länge desselben erfährt man also, wenn man einen Grad genau gemessen hätte; allein es ist dies mit besonderen Schwierigkeiten verbunden, und daher kommt es, dafs die Angabe der Länge eines Grades im Aequator so verschieden angegeben wird. Man setzt die Länge des Aequators genau 5400 geogr. Meilen, einen Grad also = 15 geogr. Meilen; nun aber herrscht eben so grofse Verschiedenheit in der Angabe über die Länge der geogr. Meile.

Nach Picard's Messungen beträgt diese 3804 Toisen, die Toise = 1,949037 Meter, giebt 7414 Meter zu 3,186199 preufs. Fufs = 23622 preufs. Fufs.

Vega giebt sie an: 7420,158 Meter = 0,9850876 preufs. Ml. Dies sind 1970,1752 preufs. Ruthen = 23642,1 preufs. Fufs, so dafs die geogr. Meile um 29,8248 preufs. Ruthen oder 358 preusf. Fufs kleiner ist als die preufs. Meile.

Der Durchmesser des Aequators ist $\frac{5400}{\pi} = 1718,87$ geogr. Ml. und nach den letzten Angaben = 1275,4313 Myriameter = 1693,24 preufs. Ml.

Die Erde dreht sich um ihre Axe, und aufserdem noch um die Sonne; die erste vollständige Umdrehung vollbringt sie in 24 Stunden, die letztere in einem Jahr. Die Bahn um die Sonne (die Ekliptik), in der also der Erdmittelpunkt sich fortdauernd befindet, ist gegen den Aequator um etwa $23\frac{1}{2}$ Grad geneigt, sie durchschneidet diesen also in zwei entgegengesetzten Punkten und ist in zwei entgegengesetzten Punkten demselben am fernsten.

Es sei $AB$ die beliebig erweiterte mittlere Durchschnittslinie der Ebene des Erdäquators ($Q$) einerlei mit der des Aequators, des Welt-Aequators, $SW$ die mittlere Durchschnittslinie der Ekliptik ($E$), also $\angle AsW = 23\frac{1}{2}°$, so ist der Punkt $s$ der Stand der Sonne, und $S$, $W$ sind die Sonnenwenden (s. Absiden).

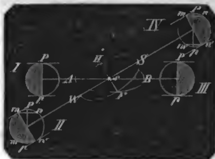
Denkt man das die Figur betrachtende Auge, welches jetzt normal auf die Linien $AB$ und $SW$ gerichtet ist, um den $\angle AsW$ seitwärts nach $sF$ oder $sH$ sich bewegt, so sieht man ungefähr den $Q$ in der elliptischen Form $FAHB$ und die $E$ wie $FSHW$; $FH$ ist die Durchschnittslinie des $Q$ mit der $E$; $F$ der Frühlingspunkt, $H$ der Herbstpunkt, $S$ die Sommerwende, $W$ die Winterwende, und $s$ steht in demjenigen beider Brennpunkte, der $E$, dafs $Ss < Ws$.

Die Erde bewegt sich in der $E$ von $F$

nach *S*, *H*, *W* bis wieder *F* innerhalb eines Jahres, während sie zugleich alle 24 Stunden sich selbst um ihre Axe dreht, die dabei immerwährend normal auf den *A*, auf die Ebene *AHBF* gerichtet verbleibt, und Erdaxe und Erdäquator also immerwährend # mit sich selbst sich fortbewegen.

Diese Axendrehung der Erde geschieht

Fig. 34.




ferner der Art, dafs wenn man auf *SHW* etwa in *H* mit dem Gesicht nach *W* gerichtet, die Sonne zu Füfsen sich stehend denkt, die Erdkugel in der Gegend des Aequators so in die Hand nimmt, dafs der Nordpol zur Rechten fällt, und sie als Kegelkugel entläfst.

Die Jahreszeiten: Frühling, Sommer, Herbst, Winter, beginnen für die von uns bewohnte, die nördliche Halbkugel, wenn die Sonne in *F*, *S*, *H*, *W* uns zu stehen scheint; also der Frühling beginnt, wenn die Erde wirklich in den Herbstpunkt *H* tritt, wo dann die Sonne ihr gegenüber in *F* zu sein scheint; der Sommer, wenn die Erde in *W*, der Herbst, wenn sie in *F*, und der Winter, wenn die Erde von *F* kommend in *S* tritt.

Damit nun ein deutliches Bild von der Beleuchtung der Erde durch die Sonne in jedem Standpunkt, den sie in der *E* einnimmt, entstehe, denke man den *A* in seiner Ebene *FBHA* verbleibend, sich so weit drehend, dafs *F* in *B*, und *H* in *A* fällt, so ergiebt *SW* die Richtung der Sonnen-Strahlen auf die Erde, wenn diese in den Punkten *S* und *W* sich befindet, und *AB* die Richtung der Strahlen auf die Erde, wenn diese in den Punkten *F* und *H* ihren Ort hat; wenn, wie es der Wirklichkeit gemäfs ist, Axe und Aequator der Erde, diese in allen Punkten der *E* befindlich gedacht, immer # mit einander verbleiben, und wie dies in der Zeichnung, wo *P* den Nordpol und *p* den Südpol bedeutet, beobachtet ist.

Steht die Erde in dem Herbstpunkt *H*, so scheint die Sonne in dem Frühlingspunkt *F* zu stehen. Da *H* durch *A* vertreten wird, so hat die Erde den Stand *I*.

Die mit *AB* gezeichneten Parallelen zeigen die Grenzen zwischen der erleuchteten und der nicht erleuchteten Halbkugel, indem die Sonne, wegen ihrer grofsen Ferne, von *P* bis *p* nach einerlei Richtung # *AB* zu stehen scheint, und während der Drehung der Erde um *Pp* innerhalb 24 Stunden haben alle Punkte der Erdoberfläche 12 Stunden Tag und 12 Stunden Nacht. Es ist Aequinoctium.

Dieselbe Erscheinung findet statt, wenn die Erde von *H* über *W* nach Verlauf eines halben Jahres in den Frühlingspunkt *F* tritt, wo dann, da *F* durch *B* vertreten ist, die Erde den Stand *III* einnimmt. Aus diesem Grunde heifsen die Punkte *F* und *H* auch die Aequinoctialpunkte.

Bewegt sich die Erde aus *H* nach *W* hin, so rückt sie allmählich aus dem Stand *I* in den Stand *II*, die beleuchtete Halbkugel erweitert sich immer mehr von *P* nach der Linken und vermindert sich um gleich viel fortdauernd von *p* nach der Rechten, die nördliche Halbkugel erhält immer mehr, die südliche immer weniger Beleuchtung; in dem Stande *II*, wo die Erde in *W* (in der Sonnenferne, dem Aphelium) steht, hat die Beleuchtung der nördlichen Halbkugel ihr Maximum, in der südlichen ihr Minimum erreicht; die mit der Richtung *sW* der Strahlen parallelen Linien tangiren die Erdoberfläche in *m* und *n'*; in dem Parallelkreis *mn* haben die Bewohner den Tag 24 Stunden lang, von dort his zum Pol *P* geht die Sonne nicht mehr unter; von dem Kreise *m'n'* ab bis zum Südpol *p* ist Nacht.

Bewegt sich die Erde von *W* nach *F* hin, so rückt die beleuchtete Halbkugel wieder nach *P* rechts und nach *p* links, und wie von *I* bis *II* die Sonne den Bewohnern der nördlichen Halbkugel immer höher stieg, so scheint sie denselben jetzt immer mehr hinab zu sinken, der Parallelkreis *mn*, in welchem bei *II* der längste Tag 24 Stunden ist, und von wo aus his zum Nordpol die Sonne nicht mehr untergeht, rückt immer mehr dem Nordpol *P* zu, so wie der Kreis *m'n'*, von wo aus bis zum Südpole *p* dauernde Nacht ist, diesem Südpol immer näher

rückt, bis endlich, wenn die Erde in den Frühlingspunkt *F* getreten ist, die Beleuchtung wie in der Stellung *III* geschieht; es ist Aequinoctium und der Herbst beginnt.

Von hier ab rückt die Erde von *F* nach *S* (Stellung *IV*), die Strahlen werden von Tag zu Tage schräger auf *Pp*, für die nördliche Halbkugel senkt sich die Sonne immer tiefer, für die südliche steigt sie immer höher, und dies Verhältnifs erreicht sein Maximum in Stellung *IV*, wenn die Erde in den Sommerpunkt *S* tritt, wo die Sonne im Winterpunkt *W* zu sein scheint, und für die nördliche Halbkugel der Winter wirklich anhebt. Jetzt ist von dem Parallelkreise *mn* bis zum Nordpol dauernde Nacht, von dem Kreise *m'n'* bis zum Südpol dauernder Tag.

Den Bewohnern der nördlichen Halbkugel scheint die Sonne von der Stellung *II* bis *IV*, indem die Erde von *W* über *F* nach *S* sich bewegt, fortdauernd zu sinken, von der Stellung *IV* bis *II* dieselbe fortdauernd zu steigen, in *W* und *S* scheint sie still zu stehen und sich zu wenden; daher heifsen die Punkte *S* und *W* die Sonnenstillstandspunkte, die Solstitialpunkte, auch die Wendepunkte, die Sonnenwenden, die Wenden; und zwar *W* der Sommerstillstandspunkt, das Sommersolstitium, der Sommerwendepunkt, die Sommersonnenwende, die Sommerwende; *S* der Winterstillstandspunkt, das Wintersolstitium, der Winterwendepunkt, die Wintersonnenwende, die Winterwende. Desgleichen heifsen die Punkte *F* und *H* die Aequinoctialpunkte, die Nachtgleichenpunkte, die Aequinoctien, die Nachtgleichen; und zwar *F* das Frühlings-Aequinoctium, die Frühlings-Nachtgleiche, und *H* das Herbst-Aequinoctium, die Herbst-Nachtgleiche.

Mit den Namen: Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt würden viel entsprechender diejenigen ihnen entgegengesetzt liegenden Punkte bezeichnet werden, welche die Erde wirklich einnimmt. Allein man hat die von den alten Astronomen herrührenden Namen beibehalten, indem man bis zu Galilei's Zeiten nicht wufste, dafs die Erde um die Sonne sich dreht, sondern die Drehung der Sonne und des ganzen gestirnten Himmels um die Erde, wie es uns scheint, für Wahrheit nahm, wie dies schon in dem Artikel „Absteigendes Zeichen" angegeben worden, indem also die alten Astronomen mit den Namen: Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt diejenigen Punkte der Himmelskugel bezeichneten, in welche beim Eintritt der jedesmaligen Jahreszeiten ihnen die Sonne wirklich rückte, uns aber jetzt zu rücken scheint.

Der Name Aequator, Gleicher, Gleichmacher rührt daher, dafs wenn die Sonne in *F* und *H*, also in der *E* und zugleich im *A* steht, aller Orten der Erde Tag und Nacht gleich ist, so wie alle Gestirne, vom *A* aus betrachtet, einen halben Tagekreis über und einen halben Tagekreis unter dem Horizont beschreiben, wie dies schon im vor. Art. angeführt worden ist.

**Aequator, magnetischer.** Ist der von den beiden magnetischen Polen der Erde gleich weit abstehende und auf deren Verbindungslinie normal genommene Kreis, welcher den geogr. Aeq. in zwei Punkten schneidet. Die Magnetnadel steht in allen Punkten desselben horizontal, sie hat keine Inclination. (Vergl. Ablenkung und Abweichung der Magnetnadel.)

**Aequatoreal.** Ein astronomisches Instrument, welches die Abweichung eines Gestirns und zugleich dessen gerade Aufsteigung mifst. Skizze Fig. 35. erläutert das Princip und die Construction des übrigens ziemlich complicirten Instruments: *ab* ist ein in Grade und Minuten eingetheilter Kreis, an einer Axe *cd* normal und unverrückbar befestigt; *gk* ein zweiter, gleichfalls in Grade und Minuten getheilter Kreis, an der Axe *cd* unverrückbar der Art befestigt, dafs seine Ebene ∦ der Axe, also normal auf *ab* und ∦ mit der Theillinie *ef*, welche 0° und 180° auf *ab* zeigt. *lm* ist ein Fernrohr, ebenfalls an der Axe *cd*, jedoch drehbar befestigt, wobei aber die Axe des Fernrohrs immer ∦ der Kreisebene *gk* verbleibt. Um feinere Theilungen ablesen zu können, bewegt sich der Kreis *ab* um die tangirenden Nonien *e*, *f*; eben so ist die Theilung des Kreises *gk* mit Nonien *n*, *n* versehen.

Bezeichnet *hh* den Horizont, *cs* die Richtung nach dem Zenith der Sternwarte, so wird das Instrument so aufgestellt, dafs die Ebene des Kreises *ab* ∦ dem Welt-Aequator (woher *ab* der Aequatorealkreis heifst), also die Axe *cd* ∦ der Weltaxe ist, und dafs die Nullpunkte der Nonien *e* und *f* in den Meridian der Sternwarte kommen und darin verbleiben. Aufser diesen Nonien ist das ganze Instrument um die Axe *cd* drehbar.

Zur Beobachtung eines Gestirns wird das Instrument so gedreht, dafs die Axe des Fernrohrs in dessen Abweichungskreis fällt, hierauf diese Axe nach dem

Fig. 35.




Stern selbst gerichtet, das Instrument fixirt und die Theilung abgelesen. Der Aequatorealkreis giebt offenbar einen Bogen an, welcher zu der geraden Aufsteigung des Zeniths entweder angezählt oder von derselben abgezogen werden muſs, um die gerade Aufsteigung des Gestirns zu erhalten, die Theilung des Kreises *gk* aber unmittelbar die Abweichung des Gestirns, woher der Kreis *gk* am A. der Abweichungskreis genannt wird.

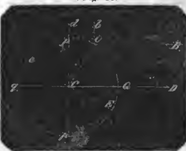
**Aequatoreal - Horizontalparallaxe** (in der nautischen Astronomie). Horizontalparallaxe ist der kleine Winkel, den ein im Horizont stehendes Gestirn, also bei dessen Auf- oder Untergang mit dem Beobachtungsort und dem Mittelpunkt der Erde bildet. Bezeichnet man die Entfernung des Gestirns von der Erde mit $l$, den Halbmesser der Erde mit $r$, den Winkel mit $\varphi$, so ist $tg\ \varphi = \frac{r}{l}$.

Unter A. versteht man nun die Horizontalparallaxe, wenn der Beobachtungsort im Aequator liegt, oder für jeden anderen Ort der Erdoberfläche, wenn man die Abplattung der Erde für Bestimmung des Winkels auſser Acht läſst und den Halbmesser der Erde auch dort gleich dem in der Aequator-Ebene setzt.

Berechnet man aber für einen auſserhalb des Aequators liegenden Ort dessen kleinere Entfernung $r'$ vom Erdmittelpunkt aus der Abplattung der Pole $= \frac{1}{300}$ im Mittel, und der bekannten geographischen Breite des Orts und sucht $\varphi$ aus $tg\ \varphi = \frac{r'}{l}$, so ist dieser $\angle\ \varphi$ die Local - Horizontalparallaxe.

**Aequatorhöhe eines Orts der Erde.** Ist die Höhe, in welcher der unendlich weit verlängert gedachte Erd-Aequator, also der Himmels-Aeq., wenn er sichtbar wäre, gesehen werden würde; also der $\angle\ BOD$, den der Horizont $OD$ des Orts $O$ mit der Richtung des Aeq. $qQ$, oder mit $OB \ddagger qQ$ bildet. Denn ein in $CD$ unendlich weit gelegener Punkt wird von $O$ aus in der Linie $OB \ddagger CD$ gesehen. Man hat das Maaſs des $\angle\ BOD$ in einem Bogen des durch $O$ genommenen Meridians, wenn man durch den Mittelpunkt $C$ der Erdkugel die Linie $CE$ dem

Fig. 36.




Horizont $OD \ddagger$ zieht. Die A. von $O$ ist mithin = Bogen $EQ$. Die A. ergänzt die geographische Breite des Orts $O$ (Bogen $OQ$), sowie die Polhöhe desselben Orts ($= \angle\ dOb =$ Bogen $eP$) zu 90°. Die Erdpole $P$, $p$ haben keine A., weil ihre Horizonte mit dem Aeq. $\ddagger$ laufen, also mit diesem den $\angle$ = Null bilden. Im Aeq. selbst ist die A. = 90°. Berlin (alte Stern-

warte) hat 52° 31′ 13″ nördl. Breite, mithin die A. = 90° − 52° 31′ 13″ = 37° 28′ 47″. Ein in der Aequator-Ebene befindliches Gestirn würde also unter diesem ∠ mit dem Horizont von Berlin culminiren.

**Aequilateral,** gleichseitig, heifst:
1. Eine Figur, wenn alle ihre Seiten gleich lang sind.
2. Eine Hyperbel, wenn ihre conjugirten Axen gleich lang sind: Es sei $C$ der Mittelpunkt der Hyperbeln zweier entgegengesetzten Kegelschnitte, deren Scheitel $S$ und $S'$ sind, so ist $SS'$ die Haupt-Axe der Hyperbeln. Sind nun $AA$ und $A'A'$ deren Asymptoten, so sind die gleich grofsen Normalen $BB$ und $B'B'$ auf $SS'$ deren Nebenaxen; sind $SS'$ und $BB$ einander gleich, so heifsen die Hyperbeln gleichseitig.

Fig. 37.



**Aequilibrium,** Gleichgewicht von Kräften, ist vorhanden, wenn sich ihre Wirkungen einander aufheben, wenn also dadurch, dafs sie auf einander wirken, dennoch ihr Zustand in Absicht auf Ruhe oder Bewegung nicht geändert wird. Man hat daher Gleichgewicht während der Ruhe, wann das System der Kräfte, statt in Folge deren gegenseitigen Einwirkung auf einander sich zu bewegen, in Ruhe verbleibt, und Glgw. während der Bewegung, wenn das System der Kräfte in ihrer ursprünglichen Bewegung weder nach Richtung, noch nach Geschwindigkeit geändert wird.

**Aequinoctialkreis** s. v. w. Aequator.

**Aequinoctialpunkte.** Die beiden Punkte, in welchen der Aequator von der Ekliptik geschnitten wird. (Vergl. Aequator und Aeq. der Erde.) Beide Punkte theilen den Aequator wie die Ekliptik in zwei gleiche Theile.

**Aequinoctialuhr.** Ist als Sonnenuhr und unter den Sonnenuhren die einfachste Uhr, allein ihr Gebrauch hat manches Unbequeme. Die Stundenradien auf dem Zifferblatt um den Zeiger haben nämlich alle einerlei Bogenabstand von einander, und wie bei der Taschenuhr in 12, so wird die Kreisscheibe der A. in 24 gleiche Theile getheilt, welche die Stundenlinien geben; dann mufs aber das Zifferblatt in eine mit dem Aequator parallele Ebene gebracht werden, so dafs der senkrecht darauf befestigte Zeiger, ein schwacher Cylinder, ∦ der Weltaxe steht, und der Schatten des Zeigers giebt die Tageszeit in der richtigen Stunde (wahre Sonnenzeit, nicht mittlere) an. Die Richtigkeit der gleichen Theilung, welche übrigens allen anderen ungleichen Theilungen senkrechter oder horizontaler oder festgestellt schiefer Sonnenuhrscheiben zu Grunde liegt, beruht darauf, dafs in der Aequator-Ebene die Sonne auf senkrechte Gegenstände wirklich Schatten wirft, die in gleichen Zeiten gleiche Winkel-Abstände von einander haben, weil der Aequator fortwährend ∦ mit sich selbst verbleibt.

An den Tagen der Aequinoctien, den 21. März und 22. September, steht die Sonne im Aequator selbst, mithin wird das Zifferblatt nicht beschienen, und der Schatten des Zeigers ist nicht sichtbar; im Frühling und Sommer steht die Sonne nördlich, im Herbst und Winter südlich vom Aequator, in der ersteren Jahreshälfte wird also die eine Seite, in der zweiten die andere Seite der Zifferblattscheibe beschienen, beide Seiten sind daher einzutheilen und der Zeiger mufs auf beiden Seiten hervorragen.

Zum Aufstellen, wie eine Sonnenuhr mit z. B. senkrechter Scheibe, ist die A. also nicht tauglich, man hatte sie als Taschenuhr in Form eines Rädchens mit dünnen Speichen und breiterem Kranz, auf dessen innerer Fläche die Theilung fortgesetzt war, so dafs ein Theil des Zeigerschattens auf der Innenfläche die Stunden angab, die Sonne mochte nördlich oder südlich vom Aequator stehen; an einem Häkchen mit Bügel frei hangend, setzte sich die Radscheibe in die Aequator-Ebene, indem zugleich ein kleiner Compafs die Richtung des Meridians angab. Solch eine Uhr mufste also für einen Ort von anderer geogr. Breite anders aufgehängt werden, um richtig zu sein.

**Aequinoctium.** Die Zeit der Tag- und Nachtgleiche auf allen Punkten der Erde. (Vergl. Aequator der Erde.)

**Aequivalent** (Chemie), ein Begriff als Erfolg des durch unzählige Versuche bestätigten Gesetzes: „Wenn 2 Stoffe $A$, $B$, jeder einzeln mit einem dritten Stoff $C$ sich so verbinden, dafs zu einer constanten Gewichtsmenge von $C$, $m$ Gewichtstheile von $A$ oder $n$ Gewichtstheile von $B$ treten, und jeder der beiden Stoffe $A$ und $B$ kann sich auch mit den Stoffen $D$, $E$, $F$ .... verbinden, so geschehen die Verbindungen von $A$ und $B$ mit einer constanten Gewichtsmenge eines jeden dieser Stoffe in demselben Gewichtsverhältnifs $m : n$."

So z. B. verbinden sich mit

100 Th. Sauerstoff 488,857 Th. Kalium oder auch 290,897 Th. Natrium.

Wenn man nun durch Versuch gefunden hat, dafs mit 80 Th. Schwefel 194,81 Th. Kalium sich verbinden, so hat man die Menge des Natriums, die sich mit 80 Th. Schwefel verbinden, nicht mehr nöthig, durch einen Versuch zu bestimmen, weil die Verbindung des Kaliums und des Natriums mit einer gleichen Menge Schwefel in dem Verhältnifs 488,857 : 290,897 geschieht, und man findet die Menge Natrium aus der Proportion:

$$488{,}857 : 290{,}897 = 194{,}81 : x$$

woraus $x = 115{,}92$ Th. Natrium für 80 Th. Schwefel.

Hat man eine Verbindung von 100 Sauerstoff + 290,897 Th. Natrium = 390,897 Th. Natron, und will das Natrium daraus durch Kalium ausscheiden, so hat man 488,857 Kalium dazu nötbig, es entsteht aus dem chemischen Procefs 588,857 Kali; 290,897 Natrium werden ausgeschieden. Die angegebenen Mengen Kalium und Natrium vertreten sich also einander und man nennt daher beide gegenseitig Aequivalente, sowie 194,81 Kalium und 115,92 Natrium in obiger Verbindung mit Schwefel einander vertreten und gegenseitig Aequivalente sind.

Die Experimentalchemie wird also zum Theil durch eine rechnende Chemie ersetzt.

2. Hält man die obigen Angaben zusammen, nämlich 488,857 Theile Kalium verbinden sich mit 100 Th. Sauerstoff zu Kali; 194,81 Th. Kalium mit 80 Th. Schwefel zu Schwefel-Kalium, so kann man fragen, in welchem Verhältnifs Sauerstoff und Schwefel für beide Verbindungen mit Kalium zu Kali und Schwefel-Kalium sich gegenseitig ersetzen; man findet dies aus der Proportion:

$$194{,}81 : 488{,}857 = 80 : x$$

woraus $x = 200{,}75$ Th. Schwefel für 100 Th. Sauerstoff.

So wie nun die Zahlen

| | |
|---|---|
| 488,857 | für Kalium |
| 290,897 | „ Natrium |
| 100,000 | „ Sauerstoff |
| 200,75 | „ Schwefel |

zusammen gehören, so kann man für alle übrigen einfachen Stoffe Zahlen ermitteln, die sich den obigen anschliefsen, indem man 100 Gewichtstheile als Aequivalent des Sauerstoffs zu Grunde legt.

Diese letzte Zahl ist nämlich auf Berzelius Vorschlag von den meisten Chemikern als Norm angenommen. Einige Chemiker nehmen den Wasserstoff und das Aequivalent desselben = 1 zur Norm, wonach dann der Sauerstoff das Aequivalent = 8 erhält.

Da das Gewicht eines zusammengesetzten Körpers = der Summe der Gewichte seiner Bestandtheile ist, so ist dessen Aequivalent auch = der Summe der Aequivalente seiner Bestandtheile.

| | | |
|---|---|---|
| Das Aequivalent des Kaliums | ist | 488,857 |
| „ „ „ Sauerst. | „ | 100,000 |
| das Aequivalent des Kali | = | 588,857 |

denn diese Gewichtsmenge des Kali ist erforderlich, damit das Kalium oder der Sauerstoff in ihm durch irgend einen dritten Körper und zwar mit der Gewichtsmenge, die dessen Aequivalent ausdrückt, abgeschieden werde.

3. Ein zweites äufserst wichtiges Gesetz ist: Wenn zwei Stoffe, *A* und *B*, in verschiedenen Gewichtsverhältnissen zu mehreren verschiedenartigen Verbindungen sich vermischen, so gehören zu einer gleich bleibenden Menge des einen Stoffs *A* nur solche Mengen des Stoffs *B*, die in einfachem Verhältnifs mit einander stehen. Die Verbindungen nämlich sind $A+B$, $A+1\frac{1}{2}B$, $A+2B$, $A+2\frac{1}{2}B$ u. s. w., die Mengen von *B* in den höheren Verbindungsstufen sind vielfache der Menge *B* in der niedrigsten Verbindungsstufe. Es heifst dies Gesetz daher das Gesetz der multiplen Proportionen.

So z. B. verbinden sich 200,75 Schwefel mit 100 Sauerstoff zu unterschwefliger Säure

| | | | |
|---|---|---|---|
| „ | 200 | „ „ | schwefliger Säure |
| „ | 250 | „ „ | Unterschwefelsäure |
| „ | 300 | „ „ | Schwefelsäure. |

Hiernach wäre die erste Verbindung

| | | |
|---|---|---|
| | 1 Aeq. Schwef. | + 1 Aeq. Sauerstoff |
| die zweite | 1 „ „ | + 2 „ „ |
| „ dritte | 1 „ „ | + 2½ „ „ |
| „ vierte | 1 „ „ | + 3 „ „ |

4. Die Entdeckung dieses Gesetzes, welches auch auf die Verbindungen zusammengesetzter Stoffe sich ausdehnt, verbunden mit dem erstgedachten Gesetz, war die Veranlassung der Entscheidung eines schon uralten Streits der Naturphilosophen, ob die Materie bis ins Unendliche theilbar sei oder nicht, und zwar dahin, dafs die Theilbarkeit eine Grenze habe; die kleinsten untheilbar gedachten Theilchen jedes Stoffes werden dessen Atoms genannt, und da die (relativen) Gewichte der Aequivalente für jede absolute Gewichts- oder Volum-Menge der Stoffe gilt, so gelten sie auch für die Atome der Stoffe; diese haben also mit den Aequivalenten desselben Stoffs einerlei Gewichtsverhältnifs, die Aeq.

selbst können als die Atome gedacht werden, und man kann von den ebengedachten 4 Verbindungen statt Aeq. den Begriff Atom setzen mit Ausnahme bei der dritten Verbindung (t : 2½), weil halbe Atome nicht existiren, und man mufs für diese Verbindung sagen: 2 Atome Schwefel verbinden sich mit 5 Atomen Sauerstoff zu Unterschwefelsänre.

Bei der gedachten ersten Verbindung, 1 Aeq. Schwefel + 1 Aeq. Sauerstoff, ist das eine Aeq. Schwefel = einem Atom gesetzt; es giebt aber Gründe, nach welchen die Naturforscher auch bei Verbindungen von 1 : 1 das eine oder das andere Aeq. = zweien Atomen setzen. So z. B. verbinden sich 12,88 Wasserstoff mit 100 Sauerstoff zu Wasser, es sollte also das Gewicht des Wasserstoff-Atoms zu dem des Sauerstoff-Atoms = 12,88 : 100 sein, und gleichwohl setzt man das Atomgewicht des Wasserstoffs auf die Hälfte = 6,44. Die Naturforscher nämlich nehmen an, dafs die Atome der permanenten Gase einerlei Volum haben, dafs mithin die specifischen Gewichte der Gase zugleich das Verhältnifs deren Atomgewichte ausdrücken; da nun aber das spec. Gew. des Wasserstoffs zu dem des Sauerstoffs = 6,44 : 100 ist, so wird festgestellt, dafs 1 Aeq. Wasserstoff = 2 Atomen Wasserstoff ist.

Diese Schlüsse auch auf die nicht permanenten Gase ausgedehnt, wiewohl nachgewiesen ist, dafs die Annahme des gleichen Volums der Atome nur für permanente Gase Geltung haben kann, und noch mehrere indirecte Schlüsse haben für viele einfachen Stoffe das Aeq. = zweien Atomen gesetzt. Die folgende Tabelle, gröfstentheils aus Schubarth's technischer Chemie entnommen, giebt bei solchen Stoffen 2 Zahlen, die erste einfache Zahl ist das Atomgewicht, die zweite doppelte Zahl das Aeq. desselben Stoffs.

**Tabelle**

**der Atomgewichte und Aequivalente der einfachen Grundstoffe.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aluminum | 171,167 | Brom | 499,8t0 |
| | 342,334 | | 999,620 |
| Antimon | 806,452 | Cererinm | 572,8 |
| | 1612,904 | Chlor | 221,64 |
| Arsenik | 470,042 | | 443,28 |
| | 940,084 | Chrom | 328,39 |
| Barytium | 856,880 | | 656,78 |
| Beryllium | 87,124 | Didym | 620,0 |
| | t74,248 | Eisen | 350,527 |
| Blei | 1294,489 | | 701,054 |
| | 2588,978 | Fluor | 117,717 |
| Bor | 136,204 | | 235,434 |
| Gold | 1229,415 | Rhodium | 651,387 |
| | 2458,830 | | 1302,774 |
| Jod | 792,996 | Ruthenium | 651,387 |
| | 1585,992 | | 1302,774 |
| Jridinm | 1233,500 | Sauerstoff | 100,000 |
| Kadminm | 696,770 | Schwefel | 200,75 |
| Kalinm | 488,857 | | 401,50 |
| Kalcium | 251,489 | Silber | 1349,66 |
| Kiesel | 277,312 | | 2699,32 |
| | 554,624 | Stickstoff | 87,53 |
| Kobalt | 368,99t | | 175,06 |
| | 737,982 | Stroutium | 547,825 |
| Kohlenstoff | 75,12 | | 1095,650 |
| | 150,24 | Tantalum | 1536,96 |
| Kupfer | 395,695 | | 3073,92 |
| | 791,390 | Tellurinm | 801,760 |
| Lanthan | 588,10 | | 1603,520 |
| Lithinm | 80,375 | Thorinm | 744,900 |
| Magnesium | 154,49 | Titanium | 303,662 |
| Mangan | 345,890 | | 607,324 |
| | 691,780 | Uranium | 740,512 |
| Molybdän | 598,525 | | 1481,024 |
| | 1197,050 | Vanadinm | 855,840 |
| Natrinm | 290,897 | | 1711,680 |
| Nickel | 369,765 | Wasserstoff | 6,44 |
| | 739,530 | | 12,88 |
| Osminm | 1244,487 | Wismuth | 1330,377 |
| Palladium | 665,90 | | 2660,754 |
| Phosphor | 196,143 | Wolframium | 1183,00 |
| | 392,286 | | 2366,00 |
| Platin | 1233,50 | Yttrium | 402,51 |
| | 2467,00 | Zink | 406,591 |
| Quecksilber | 1265,823 | Zinn | 735,294 |
| | 2531,646 | Zirkonium | 420,200 |
| | | | 840,400 |

Ein Mehreres s. u. Atom.

**Aërodynamik.** Die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen luftförmige, elastische (expansibel-flüssige) Körper in Ruhe verbleiben oder sich bewegen, je nachdem Kräfte unter gegebenen Bedingungen auf dieselben einwirken. Sie zerfällt daher in 2 Abtheilungen, in die Wissenschaft, welche lehrt, unter welchen Bedingungen Ruhe verbleibt, die Aërostatik, und die, welche lehrt, unter welchen Bewegung erfolgt, die Aëromechanik, Pneumatik.

**Aërodynamische Gesetze.**

1. Jeder luftförmige Körper hat Schwere, also Gewicht.

2. Kein luftförmiger Kp. hat eigenthümliche Dichtigkeit, er hat und behält fortdauernd das Bestreben, sich auszudehnen. Dies Bestreben heifst seine Elasticität, Expansivkraft, Spannkraft, Tension.

3. Jeder luftförmige Körper läfst sich durch mechanischen Druck zusammenpressen, geschieht dies, so übt er nach allen Richtungen einen gleich grofsen Gegendruck aus.

4. Luft in verschlossenem Gefäfs durch einen Druck $P$ auf eine bewegliche Fläche von $A$ □ Einheiten (□ Fufs, □ Zoll). also auf jede Flächen-Einheit mit dem Druck $\frac{P}{A}$ zusammengeprefst, übt auf jede Flächen-Einheit aller Gefäfswandungen einen Gegendruck aus $= \frac{P}{A}$

5. Die Spannkraft der Luft ad 4 ist mit deren dabei verminderten Volumen in umgekehrtem Verhältnifs. Beträgt bei dem Druck $\frac{P}{A} = p$ das Volumen der Luftmenge $= v$, so ist bei einem Druck $p'$ das Volumen $v' = \frac{p}{p'} \cdot v$ (Mariottesches Gesetz).

6. Jeder luftförmige Körper erleidet gleich grofse Einwirkung von der Wärme, und da er keine Cohäsionskraft besitzt, in gleichem Verhältnifs mit den Temperatur-Unterschieden. Luft von 0° $C$ habe das Volumen $= 1$, so hat sie, der Erfahrung gemäfs, bei 100° $C$ das Vol. $= 1 + 0{,}3666$; also bei 1° $C$ das V. $= 1{,}003666$ und bei 1000° $C$ das Vol. $1 + 3{,}666 = 4{,}666$.

Eingeschlossene Luft erhält also in Folge solches Ausdehnungsvermögens eine in gleichem Maafse veränderte Spannkraft: Es sei die Spannkraft eingeschlossener Luft bei 0° $C = p$, so ist dieselbe bei 100° $C = 1{,}3666 \times p$.

Das Gesetz ad 2 ist nicht erwiesen, eben so wenig, dafs (ad 6) ein luftförmiger Körper keine Cohäsion habe. Das Ausdehnungsbestreben beweis't sich nur bei der Luft, den Gasen und Dämpfen von derjenigen Dichtigkeit, wie sie uns bekannt sein können. Hätte die atmosphärische Luft z. B. keine specifische Dichtigkeit, sondern ein unbegrenztes Ausdehnungsbestreben, so würde die Atmosphäre der Erde bis in's Unendliche sich ausdehnen müssen; sie ist aber jedenfalls begrenzt, und die letzte Schicht der Erd-Atmosphäre hat dann die spec. Dichtigkeit der atmospärischen Luft. Luft von dieser Dichtigkeit hat denn also auch Cohäsion der Art, dafs eine, wenn auch nur geringe Kraft dazu gehört, um sie noch weiter auszudehnen.

Die unter der obersten Schicht befindliche zweite Schicht würde die natürliche Dichtigkeit der obersten haben, sie wird aber von dieser belastet, und erleidet nach dem Gesetz 2 eine dieser Belastung entsprechende Verdichtung, die dritte Schicht eine gröfsere Verdichtung durch die beiden obersten u. s. w., so dafs die der Erdrinde zunächst befindliche Luftschicht die dichteste aller über der Erdoberfläche befindlichen Luftschichten ist, und die nach dem Innern der Erde zu an Dichtigkeit immer zunehmen.

**Aëromechanik** s. u. Aerodynamik.

**Aërometrie** s. v. w. Aerodynamik.

**Aërostatik.** Ist die Lehre von dem Gleichgewicht der luftförmigen Körper (Luft, Gas, Dampf), unter sich und mit festen und flüssigen Körpern. (Vergl. Aërodynamik.)

Luftarten sind im Gleichgewicht, wenn jedes Theilchen derselben von allen Seiten einerlei Druck erhält; dies findet im Gleichgewicht während der Ruhe und während der Bewegung statt.

Erhält Luft von einer Seite einen gröfseren Druck, so wird die dem Druck zunächst ausgesetzte Luftschicht vermöge ihrer Elasticität comprimirt. Diese Compression verursacht wieder einen Druck auf die zunächst folgende Luftschicht, und diese Fortpflanzung der Wirkung von Schicht zu Schicht geschieht so lange, bis Gleichgewicht hergestellt, bis also einerlei Dichtigkeit aller Luftschichten hergestellt ist; können die Luftschichten ausweichen, so geschieht Bewegung.

Ein fester oder flüssiger Körper innerhalb in Gleichgewicht befindlicher Luft wird von allen Seiten gleich stark von derselben gedrückt; jeder Punkt seiner Oberfläche hat einen in gerader Linie durch den Schwerpunkt ihm gegenüber liegenden Punkt, der den gleichen entgegengesetzt gerichteten Druck empfängt, und somit heben sich alle Druckwirkungen der Luft auf den Körper einander auf, woher wir auch, in ruhender atmosphärischer Luft befindlich, keinen Druck derselben wahrnehmen. Körper, die in ruhender Luft sich bewegen, erfahren denselben Druck, als wenn sie ruheten, und die Luft bewegte sich mit derselben Geschwindigkeit ihnen entgegen.

Den eben betrachteten nicht wahrnehmbaren Druck einer Luft mifst man durch Säulen von Flüssigkeiten, deren Gewichte bekannt sind, als destillirtes Wasser, Quecksilber, absoluter oder bestimmt-gradiger Weingeist nach der Höhe dieser Säulen.

Eine oben und unten offene Glasröhre in Flüssigkeit getaucht, nimmt dieselbe bis zum Spiegel in sich auf, weil auf den Spiegel innerhalb und aufserhalb der Röhre der Luftdruck gleich ist; schliefst man auf einer Seite die Röhre, füllt dieselbe mit derselben Flüssigkeit, verschliefst sie, taucht das offene Ende ein, nimmt den Verschlufs fort, so fällt in der Röhre die Flüssigkeit nur bis auf einen Punkt, dafs das Gewicht der im Rohr verbleibenden Flüssigkeit dem Druck der Luft gegen

dieselbe das Gleichgewicht hält. So findet man, dafs die Atmesphäre auf die Erdoberfläche in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck ausübt gleich dem Druck einer 32 Fufs hehen Wassermasse, einer 28 pariser Zoll hohen Quecksilbermasse, d. i. auf jeden preufs. □Zell Grundfläche etwa 15 Pfnnd.

Hieranf gründet sich die Theorie und Construction des Barometers znr Messnng des Drucks der atm. Luft; die der Manometer znr Wahrnehmnng der Spannnng ven Dämpfen in Dampfkesseln.

Daher kommt es, dafs in einem hermetisch dichten Rohre das Wasser höchstens 32 Fnfs hoch aufsteigen kann.

Unser Brunnen (Pnmpe, Plumpe) ist ein aërostatischer Apparat (die Saugpumpe gehört nicht in die Hydrostatik, sondern in die A.): der an die Wandnngen des Brunnenrohrs möglichst dicht anschliefsende Kolben wird anf mehrere Zell tief hinabgesenkt, die leichte Ventilklappe öffnet sich, das unterhalb befindliche Wasser tritt über den Kolben; vom tiefsten Stande wieder in die Höhe gezogen, schliefst sich das Ventil, das Wasser wird mit anfgezogen, nnd fliefst ans der Tülle heraus. Während dieser Bewegung des Kolbens von nnten nach oben entsteht in jedem Zeit-Angenblick die Absicht zu Bildnng eines leeren Raums zwischen dem Kolben und dem im Rohr darunter befindlichen Wasser, aber der Druck der Luft anf den im Brunnenkessel befindlichen Wasserspiegel läfst es nicht dazu kommen, er treibt das Wasser in die Höhe, dem Kolben nach.

Die Fenerspritze ist eine hydrostatische Maschine (Druckpumpe), aber der Windkessel ein aërostatischer Apparat an derselben. Denn das in den Windkessel gepumpte Wasser steigt in die Höhe und verdichtet die atm. Luft in demselben so weit, dafs deren Druck der Strahlhöhe entspricht und den Strahl nnunterbrochen entsendet.

Ein Luftball (auch Aërostat genannt) steigt mit seiner Belastnng, wenn sein summarisches Gewicht geringer ist als die Differenz zwischen dem Gewicht der von dem Ball verdrängten atm. Luft nnd dem Gewicht der in dem Ball befindlichen leichteren Lnft; und er steigt bis zu der Höhe, In welcher die atmesphärische Luft so viel dünner ist, dafs sein summarisches Gewicht jener Differenz gleich, wo also Gleichgewicht ist nnd der Ballen im schwimmenden Zustande sich befindet.

**Aether.** Bezeichnete schon bei den Griechen (αἰθήρ) eine dünne Luft, welche in den höheren Regionen die Erde umgiebt, und gilt noch bis heut bei vielen Natnrforschern als eine äufserst feine Flüssigkeit, welche das ganze Weltall ausfüllt, während andre Naturforscher eine solche als nicht verhanden behaupten.

Wenngleich nnn der Gedanke: unermefsliche, ganz leere Ränme, etwas dem Gefühl Widerstrebendes hat, so haben andererseits die gröfsten Männer, so Newton, Euler, Laplace, nachgewiesen, dafs die Planeten bei ihren Bewegungen nm die Sonne, so lange wenigstens als es eine Astronomie giebt, keinen Widerstand erfahren haben, der aber doch statt haben müfste, wenn diese Weltkörper fortdauernd innerhalb eines stoffhaltigen Fluidums sich bewegten.

Denn wenn anch dem wieder entgegnet wird, dafs der Aether in Verhältnifs zu der Dichtigkeit der Weltkörper zu fein sei, als dafs ein störender Einflufs von ihm anf diese möglich werde, so kann ich mich von dem Gedanken nicht los machen, dafs nach Jahrtansenden der Einflufs doch wahrnehmbar werden mnfste, und wenn nicht, dafs doch der Keim oder das Princip zu solchen Aenderungen gegeben wäre.

Hierzn kommt, dafs, wenn wirklicher Stoff von Weltkörpern dnrchlaufen wird, die Anziehnng, welche anf jeden Elementartheil mit grofser Geschwindigkeit wirksam wäre, eine in irgend einer Zeit wahrnehmbare Vergröfserung jedes einzelnen Weltkörpers hervorbringen würde.

Wiewohl allen uralten Schöpfungsgeschichten ohne Ausnahme viel Dichterisches anlebt, so lehrt doch die Natur unseres Erdballs, dafs die Welt von Anfang nicht so war, wie sie jetzt ist, dafs Entwickelungsperioden statt hatten, und dafs man auf einen Schöpfungstag unseres Sonnensystems zurücksehen kann. Raum dazu war vorhanden: Aber das Material dazu? Nun, das mnfs doch anch dagewesen sein, nnd da es als Welt nicht vorhanden war, so mufs es in Theilchen, in Keimchen, in Molekülen, in Atomen von Weltkörpern vorhanden gewesen sein, die in dem Ranmtheil, welchen unser Sonnensystem jetzt einnimmt, von keinen Weltkörpern dnrchschnitten, also ungestört gleichgültig neben einander befindlich schwebten. Auf das Wort des Schöpfers: es Werde! zogen sich diese Elemente in dem Mittelpnnkt des Ranmtheils zusammen, verdichteten sich durch Selbstbelastnng zn Dunst, zn Gas, welches bei Betrachtnng des Mineralreichs unserer Erde nur glühend sein konnte (Gott schuf das Licht); durch überwiegende Centrifugalkraft bei einer jedenfalls mit der Anhäufung der Massen in oft excentrischer

Richtung hervorgebrachten Axendrehung wurden als Gase die Planeten ausgeworfen, diese im kalten Weltenraume abgekühlt, flüssig und fest. — Mir scheint der Gedanke, dafs unser Sonnensystem in absolut leerem Raume sich bewege, recht gut verträglich mit der grofsen schönen Schöpfung, und wenn damals von der Sonne auch Gase ausgeworfen wurden, die ihrer Beschaffenheit nach sich nicht zu Aërolithen verdichten konnten, so werden diese Kometen wohl ihren Weg, von wo aus sie gekommen sind, mit der Zeit wieder zurück finden, ohne gerade mit Enke einen sie in ihrer Bahn hindernden Aether annehmen zu müssen.

**Aeufsere Glieder** einer Proportion sind das erste (Anfangsglied) und das letzte Glied (Endglied).

In den Proportionen

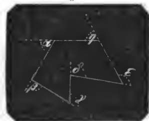
$$a - b : c - d$$

$$A : B = C : D$$

sind $a$, $d$ und $A$, $D$ die äufseren Glieder, wogegen $b$, $c$ und $B$, $C$ innere Glieder genannt werden.

**Aeufsere Polygonwinkel.** Die $\angle$, welche durch Verlängerung der Seiten des Polygons mit den neben liegenden Seiten ge-

Fig. 38.

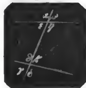


bildet werden. Werden sämmtliche Seiten eines P. nach einerlei Ordnung verlängert, so sind sämmtliche äufsere $\angle = 4 R$. Hat das Vieleck convexe $\angle$, so werden deren äufsere $\angle$, welche innerhalb des P. fallen, negativ genommen. Z. B.

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta + \varepsilon + \eta = 4 R \angle.$$

**Aeufsere Wechselwinkel** s. u. Aeufsere Winkel.

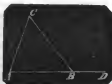
Fig. 39.



**Aeufsere Winkel.** 1. 2 gerade Linien von einer dritten geschnitten, bilden 8 Winkel; die aufserhalb der beiden geschnittenen Linien: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, heifsen äufsere $\angle$, die innerhalb derselben liegenden, $\varepsilon$, $\eta$, $\vartheta$, $\varkappa$, innere $\angle$. Die $\angle \alpha$ und $\delta$, wie $\beta$ und $\gamma$, welche paarweise auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegen: äufsere Wechselwinkel.

2. S. v. w. Aufsenwinkel beim Dreieck. Wird eine Seite $AB$ eines Drei-

Fig. 40.



ecks $ABC$ verlängert, so heifst der dadurch entstandene $\angle CBD$ gewöhnlich Aufsenwinkel; dieser ist so grofs, als die beiden inneren ihm gegenüber liegenden $\angle A$ und $C$ zusammengenommen.

**Affinität, chemische Verwandtschaft.** Ist diejenige Anziehungskraft, welche die Atome (s. Aequivalent, um dessentwillen auch dieser Art. hierher gehört) zweier verschiedener Körper so an einander verbindet, dafs aus beiden ein dritter entsteht, welcher von beiden ursprünglichen Körpern wesentlich verschieden ist. Die A. ist also für verschiedene Stoffe das, was die Cohäsion für jeden einzelnen derselben ist, die deren gleichartige Atome mit einander verbindet, und hat die A. beide Körper durch gleichmäfsige Vermengung deren Atome zu dem dritten umgewandelt, so tritt auch für diesen die Cohäsion ein und bewirkt die gegenseitige Anziehung dessen nun zusammengesetzten Atome.

Die Cohäsion zweier verschiedener Körper widersetzt sich demnach der A. und sie mufs deshalb vermindert werden. Die Natur thut dies durch mechanische Einwirkungen von selbst, wie z. B. bei der Bildung des Rostes am Eisen in feuchter Luft und durch Thau und Regen, indem Wassertheilchen in die auf der Oberfläche des Eisens befindlichen Poren eindringen, sich in Sauerstoff und Wasserstoff entmischen, wo nun die Atome des ersteren mit einigen Atomen des Eisens zu Eisenoxydhydrat werden. Einige feste Körper haben eine so starke Verwandtschaft zu einander, dafs sie schon in Pulverform, mit einander gemengt, wobei jedes Theilchen noch aus vielen Tausenden von Atomen besteht, sich chemisch verbinden, wie z. B. trockener Salmiak und trockener Kalk zu Ammoniak. Andere feste Stoffe

müssen flüssig gemacht, also entweder aufgelös't (Verbindungen auf nassem Wege) oder geschmolzen werden (Verbindungen auf trockenem Wege); noch andere verbinden sich nur in gasförmigem Zustande, bei welchem die Atome am weitesten aus einander liegen, und auch Gase verbinden sich erst in Glühhitze, wie Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasserdampf, welcher zu tropfbarem Wasser abkühlt.

Verschiedene Körper haben entweder nur einerlei Verwandtschaft zu einander, wie Kohlenstoff mit Stickstoff sich nur zu dem Cyangas, und zwar in 2 Atomen Kohlenstoff mit 2 Atomen Stickstoff zu 1 Atom Cyangas verbinden; oder sie haben mehrere Verwandtschaftsgrade, wie die Verbindungen der Metalle mit Sauerstoff und mit Schwefel. So verbindet sich

1 At. Mangan mit 1 At. Sauerstoff zu Manganoxydul.
2 „ „ „ 3 „ Sauerstoff zu Manganoxyd.
1 „ „ „ 2 „ S. zu Manganperoxyd.
1 „ „ „ 3 „ S. zu Mangansäure.
2 „ „ „ 7 „ S. zu Uebermangansäure.

Die Ordnungen der Oxydation steigen mit der Menge Atome des Sauerstoffs, es ist demnach das Manganoxydul die niedrigste, die Uebermangansäure die höchste Oxydationsstufe. Bei den im Art. Aequivalent aufgeführten Schwefelungsstufen ist die unterschweflige Säure die niedrigste, die Schwefelsäure die höchste Schwefelungsstufe.

Endlich giebt es Stoffe, die sich in allen Verhältnissen mit einander verbinden, wie z. B. Salpetersäure mit Wasser. Solche Verbindungen gehören zu den schwächsten Verwandtschaftsgraden, und sind eben so leicht, in der Regel durch blofses Abdampfen, wieder zu trennen.

Wenn zu einer Verbindung $A+B$ zweier Körper $A$ und $B$ ein dritter $C$ hinzutritt, und $A$ hat zu $C$ gröfsere Verwandtschaft als zu $B$, so verläfst $A$ den Stoff $B$, verbindet sich mit $C$ zu $A+C$ und $B$ wird ausgeschieden. $A+C$ heifst das Product, $B$ das Educt; man sagt auch, $A+B$ werde durch $C$ zersetzt, und das Verhalten und den Vorgang zwischen $A$, $B$ und $C$ nennt man Wahlverwandtschaft. Z. B. Wird Kupferoxyd mit Wasserstoff in Berührung gebracht, so entsteht metallisches Kupfer und Wasser, denn Kupferoxyd besteht aus 2 Atomen Kupfer und 1 Atom Sauerstoff, dieser hat aber zum Wasserstoff gröfsere A., verläfst das Kupfer und verbindet sich in jedem einzelnen Atom mit 2 Atomen Wasserstoff zu Wasser.

Schwefelblei mit Chlor in Verbindung gebracht, giebt Chlorblei und Schwefel; ist nun mehr Chlor vorhanden, als das Blei aufnehmen kann, so geht der Ueberschufs von Chlor noch die schwächere Verbindung mit Schwefel zu Chlorschwefel ein.

Wenn zwei Verbindungen $A+B$ und $C+D$ zusammentreffen, $A$ und $D$ haben aber gröfsere Verwandtschaft, sowohl wie $A$ und $B$ als wie $C$ und $D$, so entsteht $A+D$ und $B+C$. Man nennt dies Doppelzersetzung und das Verhalten und den Vorgang zwischen den 4 Stoffen doppelte Wahlverwandtschaft. $A$ sei Salpetersäure, $B$ Baryt, also $A+B=$ salpetersaurer Baryt; $C$ sei Schwefelsäure, $D$ Natron, $C+D$ also schwefelsaures Natron, so entsteht schwefelsaurer Baryt $(C+B)$ und salpetersaures Natron $(A+D)$.

Wenn zu einem in der Verbindung $A+B$ befindlichen Stoff $A$ ein dritter Stoff $C$ gleiche oder geringere Verwandtschaft hat, wie $B$ zu $A$, so ist $C$ auf die Zersetzung von $A+B$ unwirksam; wird aber ein vierter Stoff $D$ hinzugeführt, der eine stärkere Verwandtschaft zu der Verbindung $A+C$ hat als $B$ zu $A$, so veranlafst $D$ die Verbindung von $A+C$ mit Ausscheidung von $B$, um mit $A+C$ zu $A+C+D$ sich verbinden zu können. Man nennt dies Verhalten und den Vorgang zwischen den 4 Stoffen: Vermittelnde oder praedisponirende Verwandtschaft. Es sei $A$ Sauerstoff, $B$ Kohlenstoff, also $A+B$ Kohlensäure, $C$ Phosphor; da nun zum Sauerstoff der Kohlenstoff stärker verwandt ist als der Phosphor, so geschieht durch ihn keine Zersetzung. Bringt man aber eine Base, z. B. Kali hinzu, so hat diese zur Phosphorsäure stärkere Verwandtschaft als zur Kohlensäure, vermittelt daher die Verbindung von Phosphor mit Sauerstoff unter Abscheidung von Kohlenstoff zu Phosphorsäure, um sich mit dieser zu phosphorsaurem Kali zu verbinden.

Inwiefern die A. zweier Körper als die Wirkung der elektrischen Polarität deren Atome, indem der eine Körper positiv, der andere negativ elektrisch erscheint, betrachtet werden kann, wird vorbehalten.

**Affirmativ, positiv** ist jede Gröfse, wenn sie ohne Beziehung zu anderen ihr gleichartigen Gröfsen gegeben wird. Eben so sind mehrere gleichartige Gröfsen positiv, wenn sie in gleichartiger Beziehung zu einander genommen werden, und deren Positivität wird nicht bezeichnet und nicht

ausgesprochen, weil sie sich von selbst versteht.

Solche Größsen haben die Eigenschaft, daß sie um diejenige ihnen gleichartige Quantität, welche ihnen hinzugefügt wird, vermehrt, und um diejenige, welche von ihnen fortgenommen wird, vermindert werden.

Kann aber mit Größsen der Begriff einer Richtung, also für Raum oder Zeit, verbunden werden, so giebt es gleichartige Größsen, welchen entgegengesetzte Richtungen zukommen, als z. B. der Weg nach rechts und nach links, die Wege vorwärts und rückwärts, die man sich auch für Geld denken kann, welches man entweder giebt oder empfängt. Solche Größsen zu einander hinzugefügt, vermindern sich gegenseitig, sie heben sich ganz oder zum Theil auf, und es muſs diese entgegengesetzte Bedeutung beider Größsen ausgesprochen und bezeichnet werden, sobald sie mit einander in Beziehung kommen. Die zuerst gegebene ist dann affirmativ oder positiv, die zweite negativ, beide heiſsen in dieser Beziehung entgegengesetzte Größsen.

Soll die absolute Länge eines Weges angegeben werden und wird der Weg nach einerlei Richtung gemacht, so wird an die Positivität des Weges nicht gedacht, kommt aber ein rückwärts gemachter Weg in Rechnung, dann ist der Weg vorwärts positiv (+) und der Weg rückwärts negativ (−). Wird nach einem Vermögen gefragt, so kommen bei dem Zusammenzählen der einzelnen Posten etwaige Schulden als negativ in Rechnung; wird nach einer Schuldenmasse gefragt, so ist diese positiv, vorhandenes baares Geld oder Güter, die in Geldwerth ausgedrückt oder umgeändert werden können, sind negativ.

Ist der Weg vorwärts $= W$, der rückwärts $= w$, so ist der absolute Weg $W + (-w) = W - w$; ist $W = w$, so ist der absolute Weg = Null. Entgegengesetzte Größsen von gleichen Quantitäten heben sich also einander auf, sie werden zusammengenommen zu Null.

**Afterkegel**, uneigentliche Bezeichnung für Konoïd.

**Afterkrystalle**, Pseudomorphosen sind Krystalle, deren Form den krystallisirten Fossilien eigentlich nicht zukommen. Sie entstehen dadurch, daſs ein Fossil im flüssigen Zustande einen Krystall überzieht und denselben ganz oder theilweise durchdringt, also mechanisch, oder auch durch Chemismus, indem das krystallisirte Fossil entweder durch neu aufgenommene oder durch ausgeschiedene Bestandtheile chemisch geändert wird.

**Afterkugel**, uneigentliche Bezeichnung für Sphäroïd.

**Aggregat**. Eine aus mehreren Gliedern bestehende Zahlengröſse. Z. B. $ma + nb - pc$.

**Aggregation**. Die Addition von Aggregaten, die aus additiven und subtractiven Gliedern bestehen.

**Aggregat-Zustand** der Körper ist der Cohäsionszustand der einzelnen Theile desselben in 3 Hauptstadien. 1. Der Zustand der Starrheit, der erste A.; Körper dieses Zustandes heiſsen feste Körper. 2. Der Zustand der Flüssigkeit, zweiter A.; Körper dieses Zustandes heiſsen tropfbar flüssig. 3. Der Zustand der Luftförmigkeit, dritter A.; Körper dieses Zustandes heiſsen luftförmig, expansibel flüssig, elastisch flüssig.

Die A. werden sämmtlich durch die Wärme bedingt, indem feste Körper durch Absorption von Wärme zu tropfbar flüssigen und diese durch Absorption von noch mehr Wärme zu elastisch flüssigen Körpern werden. (Eis, Wasser, Dampf.)

**Aggregirende Theile** einer Zahl sind deren Summanden, wenn man die Zahl als Summe betrachtet. Z. B. 4 und 5 sind die a. Th. der Zahl 9.

**Akronyktischer Aufgang** (ortus acronyctus) und Untergang (occasus acronyctus) eines Fixsterns gehören zu dem poetischen Auf- und Untergang der Gestirne bei den Alten. Der akr. Aufgang eines Gestirns findet statt, wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich aufgeht; der akr. Untergang, wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich untergeht. (Vergl. Auf- und Untergang, poetischer).

**Algebra** (arabischer Name, wie schon die Vorsilbe *Al*, der Artikel, anzeigt; wie Alchymie, deutsch die Chemie; Alcadi, der Kadi). Ist der höhere Theil der Arithmetik, die Lehre von der Auflösung der Gleichungen.

Algebraische Gleichung ist ein Ausdruck in Form zweier einander gleichgesetzter Werthe, in welchem eine oder mehrere unbekannte Zahlen mit bekannten auf verschiedene Art verbunden sind. Z. B.

$$1)\ 3x + t = 8$$
$$2)\ ax + b = c$$

In beiden Gleichungen bedeutet der Buchstabe $x$ eine unbekannte Zahl, und die Auflösung der Gleichungen besteht darin, daſs diese Unbekannte aus den einzelnen Verbindungen (Verwickelungen)

mit den bekannten Zahlen entwickelt und durch diese ausgedrückt wird, welches geschehen ist, wenn die Unbekannte auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein steht. Man erhält als Auflösung aus der ersten Gleichung $x = \frac{8 \mp 1}{3}$ d. h. entweder $\frac{7}{3}$ oder 3; aus der zweiten $x = \frac{c \pm b}{a}$

Sind die Bekannten in bestimmten Zahlen gegeben, wie in Gl. 1, so wird die Algebra von Mehreren numerisch genannt, zum Unterschiede von der symbolischen A., bei welcher in den Gleichungen, wie in Gl. 2, die Bekannten durch Buchstaben (allgemeine oder symbolische Zeichen) ausgedrückt werden, indem jeder Buchstab das Symbol einer bestimmten Zahl ist.

Befinden sich mehrere Unbekannte: $x$, $y$, $z$ . . . ., in einer Gleichung, wie

$$x + y = a$$

so kann man keine derselben entwickeln; man erhält hier nämlich

$$x = a - y \text{ und } y = a - x$$

Es gehört also noch eine zweite Gleichung zwischen $x$ und $y$ dazu, in welche man den Werth von $x$ in $y$ ausgedrückt, oder den Werth von $y$ in $x$ ausgedrückt setzt, um beide Unbekannten $x$ und $y$ finden zu können.

Es sei diese zweite Gleichung

$$x - y = b$$

Setzt man hierein für $x$ den Werth $a - y$, so erhält man die Gleichung

$$a - y - y = b; \text{ woraus } y = \frac{a - b}{2}$$

Setzt man in die zweite Gleichung für $y$ den Werth $a - x$, so erhält man die Gl.

$$x - (a - x) = b; \text{ woraus } x = \frac{a + b}{2}$$

Hieraus erhellt, dafs eben so viele Gleichungen gegeben sein müssen, als für die Auflösung Unbekannte zu entwickeln sind. Sind weniger Gleichungen gegeben als Unbekannte, so bleiben deren Werthe unbestimmt; die Algebra, welche sich mit diesen beschäftigt, heifst daher unbestimmte, oder nach dem Erfinder deren Auflösung: Diophantische Analysis.

**Algebraische Auflösung** s. u. algebraische Geometrie.

**Algebraische Curve.** Eine Curve, deren Natur durch eine algebraische Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten gegeben ist, wie z. B. die Kegelschnittscurven; im Gegensatz von transcendenter Curve, für welche die Gleichung eine transcendente ist, wie z. B. die logarithmische Spirale.

**Algebraische Formel.** Formel ist der in allgemeinen Zeichen dargestellte Ausdruck, durch welchen erkannt wird, wie eine Gröfse aus anderen Gröfsen zusammengesetzt ist, als die Formel:

$$A = (a + b + c)(a + b - c)$$

für eine Gröfse $A$.

Algebraisch ist die Formel, wenn sie auf algebraischem Wege gefunden worden ist. Z. B.

Die Gleichung:

$$x^2 \pm ax \pm b = 0$$

giebt die Auflösung:

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$$

Diese Formel für $x$ zeigt also den Werth von $x$ in seiner Entwickelung aus den gegebenen bekannten Gröfsen und ist daher eine algebraische F. Da jede unreine quadratische Gleichung auf die Form der obigen Gl. zu bringen ist, so bildet die Formel für $x$ zugleich eine Norm, nach welcher für bestimmt gegebene Fälle die nochmalige Entwickelung erspart werden kann.

Um z. B. die Gl. $x^2 + 6x = 27$ nicht auf algebraischem Wege entwickeln zu müssen, bringt man sie auf die obige Form, und schreibt

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

Mit Hülfe der Formel erhält man nun:

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 27}$$

mithin $x = -3 \pm 6$; d. h. $x =$ entweder $-9$ oder $+3$.

**Algebraische Function.** Ein algebraischer Ausdruck, durch welchen der Zusammenhang einer veränderlichen Gröfse (z. B. $x$) mit mehreren andern unveränderlichen Gröfsen ($a$, $b$, $c$ . . . .) zu einer zweiten veränderlichen Gröfse gegeben wird. Z. B. in dem Ausdruck

$$ax + bx^2 + cx^3$$

ist jedes einzelne Glied eine Function der Veränderlichen $x$, und das dreigliedrige Aggregat

$$ax + bx^2 + cx^3 = y$$

bildet eine zweite Function ($y$) derselben Veränderlichen $x$.

Algebraisch heifst die F., wenn, wie hier der Zusammenhang durch einfache arithmetische Operationen entstanden, dargestellt wird, im Gegensatz von transcendenter F., bei welcher der Zusammenhang durch logarithmische und trigonometrische Zahlen gegeben ist, wie

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x$$
$$\log x + \log (x + a)$$

Die algebraischen F. sind rational wenn die veränderlichen Gröfsen nur mi

**ganzen Exponenten** vorkommen, wie $ax - bx^2 + cx^3$; **irrational**, wenn sie auch Bruchpotenzen enthalten, wie

$$a\sqrt{x} + bx + \sqrt{x^3}$$

Die rationalen algebraischen F. heifsen **ganz**, wenn die Veränderliche mit ganzen positiven Exponenten nicht im Nenner vorkommt, während solche, wo dies der Fall ist, als: $ax + \frac{b}{x} + cx^2$, **gebrochen** heifsen.

Die irrationalen algebraischen F. sind **gesonderte** (explicitae) oder **ungesonderte** (implicitae); bei ersteren ist die Function einer Gröfse mit dieser nirgend verbunden, bei letzteren findet solche Verbindung statt

$y = x + ax^2 + bx^3$ ist eine gesonderte Function
$y^2 = x^2 + axy + bx$ „ „ ungesonderte „

**Algebraische Geometrie** (**rechnende** G.) 1. Derjenige Theil der G., in welcher Raumgröfsen durch Rechnung bestimmt werden. Wie die **elementare** G. nur mit geraden Linien, Kreislinien und mit den aus diesen begrenzten Ebenen sich beschäftigt, so auch die a. G.

Jede gerade Linie wird in ihrer Gröfse durch eine Zahl angegeben, welche ausdrückt, wie viele Längen-Einheiten sie enthält. Die Längen-Einheit ist in verschiedenen Ländern verschieden (Fufs, Ruthe, Klafter, Mètre), ebenso deren Eintheilung in kleinere Längen (Zoll, Linie, Decimètre etc.)

Die Flächen-Einheit ist das Quadrat, dessen Seite die Längen-Einheit ist [Quadratfufs (□'), Quadratruthe (□°), Quadratmètre (□$^m$)].

2. Der Berechnung der Linien und Flächen dienen die Lehren der Elementar-Geometrie zur Grundlage; der Fundamentalsatz dazu ist: Parallelogramme verhalten sich an Flächen-Inhalt wie die Producte deren Grundlinien und Höhen. Wird nun das zu berechnende # mit der Flächen-Einheit, d. h. mit dem Quadrat von der Grundlinie = 1 und der Höhe = 1 verglichen, und verwandelt man ersteres in das ihm gleiche Rectangel, so kann man die Richtigkeit des Satzes auch figürlich darstellen.

Hat das zu berechnende Rectangel *ABCD*

Fig. 41.



die Grundlinie $AB = a$ (z. B. 4 Fufs), die Höhe $h$ (z. B. 3 Fufs), so entstehen mittelst Parallelen, die durch die Theilpunkte genommen werden, 12 Quadrate, von welchen jedes gleich der Flächen-Einheit ist, und die Gröfse des Rectangels beträgt $4' \times 3' = 12$ □Fufs.

3. Enthält die Länge oder die Höhe des Rectangels Bruchtheile der Längen-

Fig. 42.



Einheit, ist z. B. bei der Grundlinie = 4' die Höhe $h = 3'\,5''$, so hat man $a \times b = 4' \times 3'\,5'' = 4' \times 3' + 4' \times 5''$.

$4' \times 3' = 12$□' sind die 12 Quadrate zwischen *CD* und *EF*.

$$4' \times 5'' = 4' \times \frac{5'}{12} = 1\tfrac{2}{3}\,□'$$

Diese sind die 4 gleich grofsen Rectangel zwischen *AB* und *EF*, mithin das Rechteck $ABCD = (12 + 1\tfrac{2}{3})□' = 13\tfrac{2}{3}\,□'$.

Denkt man die Höhe *AE* in 5 gleiche Theile, also in Zolle getheilt, so erhält man in jedem der 4 Rectangel 5 Rectangel, von denen jedes die Grundlinie = 1 Fufs und die Höhe = 1 Zoll, jedes also = 1 Fufs × 1 Zoll zum Inhalt hat, mithin in Summa

$5'' \times 4' = 20$ (Fufs × Zoll).

1 Fufs × Zoll ist aber

$$= \frac{1 \text{ Fufs} \times \text{Zoll}}{12}\,□' = \tfrac{1}{12}\,□'$$

daher 20 (Fufs × Zoll) $= \frac{20}{12}$□' $= 1\tfrac{2}{3}$□', so dafs also auch auf diese Weise gerechnet werden kann.

Denkt man noch jede deren Grundlinien in 12 Zolle getheilt und die Parallelen gezogen, so erhält man in jedem Rectangel 60 Quadrate, deren Seite = 1 Zoll ist, und von welchen $12 \times 12 = 144$ auf 1 □Fufs gehen, und in Summa $4 \times 12 \times 5 = 240$ solcher Quadrate = 1□' 96□''; und das ganze Rechteck *ABCD* enthält 13□' 96□'' $= 13\tfrac{96}{144}$□' $= 13\tfrac{2}{3}$□'.

Demgemäfs kann auch **arithmetisch** der Inhalt des Rectangels bestimmt werden. Multiplicire

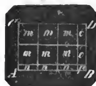
$$
\begin{array}{l}
3'\,5'' \\
4' \\
\hline
3' \times 4' = 12\square' \\
4' \times 5'' = \qquad 20\,(\text{Fnfs} \times \text{Zoll}) \\
\hline
= 12\square'\ 20\,(\text{Fufs} \times \text{Zoll}) \\
20\,(\text{Fufs} \times \text{Zoll}) = 1\square'\ 8\,(\text{Fufs} \times \text{Zoll}) \\
8\,(\text{Fufs} \times \text{Zoll}) = \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3}\square' = 8 \times 12 = 96\square'' \\
\hline
\text{Rectzngel} = 13\tfrac{2}{3}\square' = 13\square'\ 96\square''
\end{array}
$$

4. Enthält die Lzngo sowohl als die Höhe des Rectangels Bruchtheile der Längen-Einheit, ist z. B. $AB = a = 3'\,5''$; $AC = b = 2'\,2''$, zo hat man

$$3'\,5'' \times 2'\,2'' = 3' \times 2' + 3' \times 2'' + 2' \times 5'' + 5'' \times 2''$$

Das erste Glied des Prodncts $3' \times 2' = 6\square'$ sind die 6 Qnadrate $m$; das zweite Glied $3' \times 2''$ sind die 3 Rectzngel $n$ von 1' Grundlinie nnd 2'' Höhe; dzs dritte Glied $2' \times 5''$ sind die beiden Rectangel $o$, jedes von 5'' Grundlinie nnd 1' Höhe; dzz vierte Glied ist das Rectangel $p$ von 5'' Grundlinio nnd 2'' Höhe.

Fig. 43.




Demgemäfs multiplicire

$$
\begin{array}{l}
3'\,5'' \\
2'\,2'' \\
\hline
2' \times 3' = 6\square' \\
2' \times 5'' = \qquad 10\,(\text{Fnfz} \times \text{Zoll}) \\
2'' \times 3' = \qquad 6\,(\text{Fufs} \times \text{Zoll}) \\
= 1\square'\ 48\square'' \\
2'' \times 5'' = \qquad 10\square'' \\
\hline
\text{Rectangel} = 7\square'\ 58\square''
\end{array}
$$

Wem diese Rechnungsweise uicht zusagt (mir ist sie in den meisten Fällen am beqnemsten), kann auch die Zolle als Brüche des Fufses in Rechnnng bringen, wie im Beispiel ad 3 angegeben; als:

$$4' \times 3'\,5'' = 4' \times 3\tfrac{5}{12}' = 4' \cdot \frac{41'}{12} = \frac{41}{3}\square' = 13\tfrac{2}{3}\square'$$

Im Beispiel ad 4: $3'\,5'' \times 2'\,2'' = 3\tfrac{5}{12}' \times 2\tfrac{1}{6}' = \frac{41'}{12} \times \frac{13'}{6} = \frac{41 \cdot 13}{12 \cdot 6}\square' = \frac{533}{72}\square' = 7\frac{29}{72}\square' = 7\square'\ 58\square''$.

5. Aus dem obeu gedzchten Sztz (ad 2) folgt nnd die Elementar-Geometrie lehrt, dafs die Flächen-Inhalte von Dreiecken sich ebenfalls verhalten wie die Producte aus Grundlinie nnd Höhe, nnd dafs ferner der Flächen-Inhalt eines Dreiecks gefunden wird, wenn man die Grundlinie mit der Höhe mnltiplicirt und das Prodnct dnrch 2 dividirt.

Die **algebraische Formel** für die Berechnnng des Flächen-Inhalts $F$ eines Dreieckz ist demnach

$$F = \tfrac{1}{2}\,a \cdot h$$

wo $a$ dessen Grundlinie und $h$ dessen Höhe ist. Da nun jede geradlinige Figur in Dreiecke zerlegbzr ist, so kann bei gegebenem Maafsstab nnd geschehener Ausmezzung der Seiten nnd Dizgonaleu jede gezeichnete geradlinige Figur berechuet werden.

6. Die Elementar-Geometrie lehrt, dafs der Flächen-Inhzlt eines Kreizez gleich ist einem Dreieck, dezzen Grundlinie dem Umfzng nnd deszen Höhe dem Hzlbmesser gleich ist. Bezeichnet man den Kreis-Umfang mit $P$, dessen Halbmesser mit $R$, so ist die algebraische Formel für den Inhalt $F$ eines Kreises

$$F = \tfrac{1}{2}\,RP$$

ferner dzfs der Durchmesser $D$ des Kreisez zu dessen Umfang sich verhält, wie 1 zu einer Irrationalzzhl 3,1415926..., die mit $\pi$ bezeichnet wird.

Nun ist

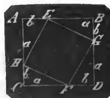
$$D = 2R, \text{ also } P = 2 \cdot 3{,}1415\ldots R$$
$$F = \tfrac{1}{2}R \cdot 2 \cdot 3{,}1415\ldots R = 3{,}14159\,R^2$$

man kann also bei gegebenem Halbmesser den Inhalt des Kreises und gegenseitig berechnen.

7. Die alg. G. dient noch anfserdem zu Auflösungen, welche bei Anwendnng der Synthesis (geometrische Construction und Beweis) nur mit gröfserer Geistes-Auztrengung gelöz't werden könnten:

Der bekannte Pythzgorische Lehrsatz: (Euklid I. 47) In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Qnadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten, wird synthetisch erwiesen: Behandelt man den Satz als die Anfgzbe: den Zusammenhang zwischen der Gröfse der Hypothennse und der Katheten algebraisch zu finden, so könnte mzn z. B. folgender Art verfzhren: In dem gegebenen rechtwiukligen Dreiecke $AEH$, dessen

Fig. 44.




Katheten mit $a$, $b$ nnd die Hypothenuse mit $c$ bezeichnet werden, verlängere man

die Katheten durch die Winkelspitzen und construire das Quadrat ($ABCD$) von $(a+b)$. Theilt man die übrigen beiden Seiten, wie Fig. 44 zeigt, in die Abschnitte $a$ und $b$ und verbindet die zunächst befindlichen Theilpunkte durch gerade Linien, so sind die 4 entstandenen Dreiecke congruent, also $\angle AEH = \angle CHF$; $\angle AHE + \angle AEH = R$; folglich $\angle AHE + \angle CHF = R$ und $\angle CHF = R$, da dies von allen übrigen 3 Winkeln des mittleren Vierecks gilt, so ist dies ein Quadrat und zwar das der Seite $c$.

Nun ist $\square ABCD = \square HEFG + 4 \triangle AHE$, oder algebraisch

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$$

hieraus

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 2ab \\ 2ab &= \quad 2ab \\ \hline a^2 + b^2 \quad &= c^2 \end{aligned}$$

8. Noch eine zweite Aufgabe möge als Beispiel gelten: den Zusammenhang zwischen den 3 Seiten eines Dreiecks und einer der 3 Höhen desselben zu finden:

Fig. 45.




Bezeichnet in dem $\triangle ABC$, $h$ die Höhe auf der Seite $a$, $x$ die Projection der Seite $b$ auf $a$, so hat man:

$$(h^2 =)\ c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

aus $h^2 = b^2 - x^2$ hat man nun

$$h^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right]^2$$

so dafs jede Höhe $h$ eines Dreiecks berechnet werden kann, wenn dessen 3 Seiten $a$, $b$, $c$ gegeben sind. Für die Rechnung mit Logarithmen ist die Formel für $h$ unbequem. Mit Hülfe der Formel $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ läfst sie sich umformen in

$$h^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right),$$

woraus

$$h^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$$

woraus wieder

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4a^2}$$

und $h =$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

so dafs $h$ mit Logarithmen ohne Unterbrechung berechnet werden kann. Nun ist es auch leicht, den Inhalt $J$ des $\triangle$ aus den gegebenen 3 Seiten zu finden.

Denn $J = \frac{1}{2} ah$, folglich auch

$$J = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

oder

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}.$$

Aus der hier gezeigten algebraischen Behandlung der Geometrie sind für die verschiedenen Figuren der Geometrie eine Menge von Formeln entstanden, welche in den speciellen Artikeln: Dreieck, Achteck, Kreis etc. nachzusehen sind.

**Algebraische Gleichung.** Ist unter Algebra erklärt. Sie ist theils der analytischen Gl. entgegengesetzt, weil in dieser keine Unbekannte zu entwickeln ist als in der Gl.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

theils der transcendenten Gl., in der die Unbekannten als Logarithmen, trigonometrische Zahlen, als Differenziale u. s. w. vorkommen, die alle algebraisch nicht zu entwickeln sind, als:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = nx$$
$$\log a + \log(a+x) + \log(a+2x) = a + mx$$
$$(ax + by)\partial x = (cx + dy)\partial y$$

2. Man hat algebr. Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Gröfsen. Da aus einer einzigen Gl. nur eine Unbekannte gefunden werden kann (s. Algebra), so heifst eine Gl., die mehrere unbekannte Gröfsen enthält, eine unbestimmte Gl., wie z. B.

$$xy^2 + xy = a$$

während eine Gl. mit nur einer Unbekannten eine bestimmte Gl. heifst, wie:

$$x^2 + ax + b = 0$$

Zur Auflösung einer Aufgabe mit mehreren ($n$) Unbekannten gehören auch $n$ Gleichungen; sind diese vorhanden, so sind dieselben bestimmt und mit ihnen die Aufgabe; sind weniger Gl. vorhanden, so sind diese mit der Aufgabe unbestimmt.

3. Die Glieder der Aggregate, aus welchen eine Gl. zusammengesetzt ist, heifsen auch Glieder der Gleichung. In der Gl.:

$$ax + bxy + cxy^2 = dx^2 y + ex^3$$

sind $ax$, $bxy$, $cxy^2$, $dx^2y$, $ex^3$ Glieder der Gleichung.

Die auf jeder Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Aggregate der Glieder heifsen die Theile der Gleichung.

4. Eine Gleichung heifst geordnet, wenn die Unbekannten nicht im Nenner vorkommen, und wenn die Glieder in absteigenden Potenzen der Unbekannten auf einander folgen.

Die ungeordnete Gl. $x+\frac{a}{x}=b$

ist geordnet in: $x^2-bx+a=0$
oder in: $x^2-bx=-a$

Bei der zuerst beobachteten Ordnung sagt man: die Gl. sei auf Null reducirt, und man zieht im Allgemeinen diese Ordnung vor.

Folgende Gl. mit 2 Unbekannten

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+A=0$$

ist nach $x$ geordnet. Nach $y$ geordnet ist sie wie folgt:

$$y^3x+y^2x^2+yx^3+x^4+A=0.$$

5. Gleichungen mit einer Unbekannten nennt man nach der höchsten Potenz, in welcher, nachdem sie geordnet ist, die Unbekannte vorkommt, Gleichungen vom ersten Grade oder einfache Gleichungen, als

1. $ax+b=0$

Gleichungen vom 2ten Grade oder quadratische Gl., als

2. $x^2+ax+b=0$

Gleichungen vom 3ten Grade oder cubische Gl., als

3. $x^3+ax^2+bx+c=0$

Gleichungen vom 4ten Grade oder biquadratische Gl., als

4. $x^4+ax^3-bx^2+cx+d=0$

Kommt die höchste Potenz allein und ohne niedrigere Potenzen bei der Unbekannten vor, so heifst die Gl. eine reine Gl.; kommen niedrigere Potenzen vor, eine unreine oder zusammengesetzte Gl.

5. $x^2+a=0$
6. $x^3+b=0$
7. $x^4+c=0$

sind reine Gleichungen, die fünfte eine reine quadratische, die sechste eine reine cubische, die siebente eine reine biquadratische Gl.

Finden sich in einer Gl. sämmtliche Potenzen der Unbekannten vor, so heifst die Gl. vollständig, fehlen eine oder mehrere, so heifst sie unvollständig.

Die Gl. 1 bis 4 sind vollständige Gl.; eine unvollständige Gl. vom ersten Grade giebt es nicht, vom 2ten Grade wird sie eine reine quadratische Gl. (wie 5.)

$$x^3+ax^2+b=0$$
$$x^4+ax^3+bx+c=0$$

sind unvollständige Gl. vom 3. und 4. Grade.

Fehlt das bekannte Glied (die Unbekannte in der nullten Potenz), so läfst sich die Gleichung auf eine um Eins niedrigere Gl. reduciren. Als

$x^5+ax^4+bx^2+cx=0$ in
$x^4+ax^3+bx+c=0.$

6. Auflösung der algebraischen Gleichungen (vergl. Algebra). Diese geschieht, wenn man die Unbekannte durch bekannte Gröfsen ausdrückt, wenn also die Unbekannte allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht und die andre Seite nur bekannte Gröfsen enthält, wie

$$x=A;\ y=B;\ z=C.$$

7. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit nur einer Unbekannten.

Jede Gl. des 1. Grades mit einer Unbekannten läfst sich auf die Form bringen

$$x\pm a=0$$

woraus dann die Auflösung dadurch geschieht, dafs man statt 0 die Bekannte $a$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite schafft, und es ist

$$x=\mp a.$$

Beispiel 1. Die Gl. $ax+b=cx+d$ wird zunächst in die Form gebracht $(a-c)x-(b-d)=0$, hiernach in die Form

$$x-\frac{b-d}{a-c}=0$$

woraus $x=\frac{b-d}{a-c}$

Beisp. 2. Die Gl. $\frac{ax}{b}=cx-d$ in die Form

$$x-\frac{bd}{bc-a}=0$$

woraus $x=\frac{bd}{bc-a}$

Beisp. 3. Die Gl. $\frac{a+bx}{x}+c=\frac{d}{x}$ in die Form

$$x+\frac{a-d}{b+c}=0$$

woraus $x=\frac{d-a}{b+c}$

8. Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Jede reine quadratische Gleichung ist in die Form zu bringen

$$x^2\pm a=0$$

woraus $x=\sqrt{\mp a}.$

Jede unreine quadratische Gleichung läfst sich in die Form bringen

$$x^2\pm ax\pm b=0.$$

Hieraus erhält man:

$$x^2\pm ax=\mp b.$$

Für die Auflösung der Gl. kommt es nun darauf an, dafs die linke Seite ein

vollständiges Quadrat werde, und dies geschieht, wenn man $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ hinzusetzt, indem dann $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2$ wird.

Zu der Gleichung $x^2 \pm ax = \mp b$

schreibe demnach $+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = +\left(\frac{a}{2}\right)^2$

folglich $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$

oder $\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$

hieraus $x \pm \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

und $x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

Nach dieser Formel ist jede numerische quadratische Gl. aufzulösen (vergl. algebraische Formel).

Die quadratische Gleichung liefert 2 Werthe (Wurzeln der Gleichung) für die unbekannte Gröfse, nämlich:

$\mp \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$ und

$\mp \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

weil $(-A)^2 = (+A)^2 = +A^2$ ist.

9. Die 4 Formen einer quadratischen Gl. sind:

1. $x^2 + ax + b = 0;\ x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

2. $x^2 - ax + b = 0;\ x = +\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

3. $x^2 + ax - b = 0;\ x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

4. $x^2 - ax - b = 0;\ x = +\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

Die Wurzeln der beiden ersten Gl. sind einander gleich, aber entgegengesetzt; dasselbe findet mit den Wurzeln der beiden letzten Gl. statt.

Man kann also die 4 Formen auf folgende 2 reduciren:

5. $x^2 \pm ax + b = 0;\ x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

6. $x^2 \pm ax - b = 0;\ x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

10. Für den Fall, dafs $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ enthält die Gl. 5. nur unmögliche Wurzeln, für $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ enthält sie 2 mögliche Wurzeln, Gl. 6. enthält immer 2 mögliche Wurzeln.

11. Bezeichnet man die beiden Wurzeln jeder der Gl. 1 bis 4, No. 9, mit $v$ und $w$, so hat man in Gl. 1

$v^2 + av + b = 0$ und
$w^2 + aw + b = 0$

Entwickelt man hieraus nach No. 27 $a$ und $b$, so erhält man

$a = -(v + w)$
$b = +v \cdot w$

für Gl. 2 erhält man $a = +v + w;\ b = +vw$
" " 3 " " $a = -(v + w);\ b = -vw$
" " 4 " " $a = +v + w;\ b = -vw$

In jeder quadratischen Gleichung also ist der Coefficient ($a$) der einfachen Unbekannten ($x$) gleich der entgegengesetzten Summe beider Wurzeln, und die Bekannte ($b$) gleich dem positiven Product beider Wurzeln.

Setzt man die Werthe von $a$ und $b$, durch $v$ und $w$ ausgedrückt, in jede der Gleichungen 1 bis 4, No. 9, so erhält man aus jeder derselben:

$x^2 - (v + w)x + vw = 0$; und hieraus
$(x - v)(x - w) = 0$

Es ist also mit der Auflösung der Gl. zugleich der Ausdruck, der die Gl. darstellt, in ein Product verwandelt.

12. Für die symbolischen Gl. 1 bis 4 No. 9, seien folgende numerische gesetzt.

1. $x^2 + 10x + 24 = 0$
2. $x^2 - 10x + 24 = 0$
3. $x^2 + 10x - 24 = 0$
4. $x^2 - 10x - 24 = 0$

Wurzeln 1. $-4$ und $-6$
" 2. $+4$ " $+6$
" 3. $+2$ " $-12$
" 4. $-2$ " $+12$

Producte:

1. $(x + 4)(x + 6) = x^2 + 10x + 24$
2. $(x - 4)(x - 6) = x^2 - 10x + 24$
3. $(x - 2)(x + 12) = x^2 + 10x - 24$
4. $(x + 2)(x - 12) = x^2 - 10x - 24$

In jeder geordneten Gl. ist das erste Glied positiv. In Gl. 1 enthalten die Glieder also 2 Folgen gleichnamiger Vorzeichen (++, ++), in Gl. 2 zwei Folgen ungleichnamiger Vorzeichen (+−, −+), in Gl. 3 eine Folge gleichnamiger und eine ungleichnamiger Vorzeichen (++, +−) eben so in Gl. 4 (+−, −−).

Jede quadratische Gl. hat so viele negative Wurzeln, als Folgen gleichnamiger, und so viele positive Wurzeln, als Folgen ungleichnamiger Vorzeichen.

13. Anflösung der Gleichungen des 3ten Grades mit einer Unbekannten.

Jede reine cubische Gl. ist in die Form zu bringen:

$$x^3 \pm a = 0$$

worans $x = \sqrt[3]{\mp a}$

Jede unreine cubische Gl. läfst sich in die Form bringen:

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

14. Die strenge Anflösung der cubischen Gleichungen hat mehr Schwierigkeiten, als die der quadratischen; bei numerischen Gl. kommt man in der Regel am leichtesten durch Probiren fort.

15. Wie die quadratische Gl. als aus 2 Factoren gebildet angesehen werden kann (No. 11), so jede cubische Gl. aus dreien, und es ist auch bei dieser jeder Factor die Differenz zwischen der Unbekannten und einer ihrer Wurzeln, wie bei der quadratischen; daher hat jede cubische Gleichung 3 Wurzeln.

Nennt man diese 3 Wurzeln $u$, $v$, $w$, so erhält man ans

$$(x-u)(x-v)(x-w) = 0$$

$$x^2 - (u+v+w)x^2 + (uv+uw+vw)x - uvw = 0$$

Der Coefficient des Quadrats der Unbekannten besteht also aus der negativen Summe der Wurzeln, der der einfachen Unbekannten aus der positiven Summe der Producte je zweier Wurzeln mit einander, und das bekannte Glied aus dem negativen Product sämmtlicher 3 Wurzeln.

Dieser Satz erleichtert das Aufsuchen der Wurzeln durch Probiren ungemein, wenn man das bekannte Glied in Factoren zerlegt, und diese einzeln auch wohl mit dem Coefficienten des Quadrats vergleicht. Aus der obigen Entwickelung des Products in eine viergliedrige Gröfse geht zugleich hervor, dafs wenn sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind, auch sämmtliche 3 Wurzeln ganze Zahlen sein müssen, wenn nicht 2 von ihnen irrational werden.

16. Beispiele.

1. Beispiel. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ (Meier Hirsch, pag. 148). Wegen des negativen bekannten Gliedes (−24) mufs nach No. 15 wenigstens eine Wurzel positiv sein, und diese soll aufgefunden werden.

Die Factoren von 24 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Die leichteste Probe gewährt $x=1$; hierbei wird der Werth der Gl. $1-9+26+24=42$ statt 0; 1 ist also keine Wurzel.

Wegen der Zahl 9 ($=u+v+w$) können nun die Factoren 6, 8, 12, 24 nicht Wurzeln sein, sondern nur 2, 3 und 4; probirt man den Factor 2, so giebt dieser

$$8 - 36 + 52 - 24 = 0$$

ferner 3 giebt: $27 - 81 + 78 - 24 = 0$
endlich 4 giebt: $64 - 144 + 104 - 24 = 0$
mithin sind die Wurzeln der Gl. = 2, 3 und 4.

2. Beispiel. $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$ (Meier Hirsch, pag. 148). Factoren von 14 sind 1, 2, 7, 14.

Da 14 positiv ist, so mufs mindestens eine Wurzel negativ sein.

Die Probe $+1$ giebt $1-8+5+14 = +12$
" " $-1$ " $-1-8-5+14 = 0$
mithin ist $-1$ eine Wurzel der Gleichung.

Anstatt noch ferner zu probiren, kann man die Gl. durch $x+1$ dividiren, man erhält:

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

woraus, da $9 = 2+7$ und $14 = 2\times 7$, sofort zu übersehen, dafs die anderen beiden Wurzeln $+2$ und $+7$ sind.

3. Beispiel.

$x^3 - 49x - 120 = 0$ (Meier Hirsch, p. 148). Hier fehlt das zweite Glied, und man ist auf das Bekannte beschränkt. Die Gl. kann wegen des Vorzeichens – der Bekannten lauter positive, aber auch 2 negative Wurzeln haben, jedenfalls mufs eine positiv sein.

Es mufs daher sofort ein Factor von 120 probirt werden, der im Cubus das 2te Glied übertrifft, also $> 7$, weil $7^3 - 49 \cdot 7$ erst $= 0$ ist, und der Werth noch $-120$ bleiben würde. Der kleinste Factor von 120 also, welcher eine Wurzel der Gl. sein könnte, ist 8, und der Factor 8 giebt den Werth $= 0$; eine Wurzel $= 8$ ist gefunden. Nun aber müssen die beiden anderen Wurzeln negativ sein, weil jede positive Wurzel, die höher als 8, den Werth der Gl. gröfser als Null machen würde.

Dividirt man die Gl. durch $x-8$, so erhält man:

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

woraus wieder, da $8 = 3+5$; $15 = 3\times 5$, die Wurzeln $-3$ und $-5$ durch den Augenschein hervorgehen.

4. Beispiel.

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$$

(Meier Hirsch, pag. 150).

Hier ist wiederum wenigstens eine Wurzel positiv. Die Factoren von 44 sind 1, 2, 4 und 11; 1 und 2 geben negative Werthe der Gl., für 4 erhält man den Werth der Gl. $= 0$, und $+4$ ist eine Wurzel. Da der Coefficient 6 des zweiten Gliedes gar keinen Anhalt giebt, jeder Werth einer positiven Wurzel über 4 aber einen positiven Werth der Gl. liefern

würde, so dividire die Gl. wieder durch $x-4$; man erhält:

$$x^2-2x+11=0.$$

Hier ist der Werth der Wurzeln nicht sogleich zu übersehen, man findet nach No. 8:

$$x=+1\pm\sqrt{-10}$$

und die beiden andern (unmöglichen) Wurzeln =

$$1+\sqrt{-10} \text{ und } 1-\sqrt{-10}$$

Nimmt man die negative Summe der 3 Wurzeln, so erhält man den Coefficienten des Quadrats der Unbekannten

$$=-4-\left(1+\sqrt{-10}\right)-\left(1-\sqrt{-10}\right)=-6$$

Die positive Summe $=4\times\left(1+\sqrt{-10}\right)+4\times\left(1-\sqrt{-10}\right)+\left(1+\sqrt{-10}\right)\left(1-\sqrt{-10}\right)$ giebt den Coefficienten der einfachen Unbekannten

$$=\left(+4+4\sqrt{-10}\right)+\left(4-4\sqrt{-10}\right)+11=19$$

und das negative Product $4\times\left(1+\sqrt{-10}\right)\left(1-\sqrt{-10}\right)$ giebt die Bekannte

$$=4\times 11=44.$$

17. Die cubischen Gleichungen können nur von folgenden Formen sein:

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$
2. $x^3+ax^2+bx-c=0$
3. $x^3+ax^2-bx+c=0$
4. $x^3+ax^2-bx-c=0$
5. $x^3-ax^2+bx+c=0$
6. $x^3-ax^2+bx-c=0$
7. $x^3-ax^2-bx+c=0$
8. $x^3-ax^2-bx-c=0$

Sie entstehen aus den Producten (s. No. 15.) $(x\pm u)\,(x\pm v)\,(x\pm w)$ durch Abwechselung der Vorzeichen, und man überzeugt sich leicht, dafs auch bei den cubischen Gl., wie bei den quadratischen (s. No. 12) so viele negative Wurzeln als Folgen, und so viele positive Wurzeln als Abwechselungen der Vorzeichen statt haben, vorhanden sind.

Die beiden Producte

$$(x+u)\,(x\pm v)\,(x\mp w), \text{ so wie}$$
$$(x-u)\,(x\pm v)\,(x\mp w)$$

sprechen nur 2 Formen aus; und deshalb sind die obigen 8 Formen zusammen zu ziehen in folgende 6:

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$
2. $x^3+ax^2\pm bx-c=0$
3. $x^3+ax^2-bx+c=0$
4. $x^3-ax^2\pm bx+c=0$
5. $x^3-ax\ +bx-c=0$
6. $x^3-ax\ -bx-c=0$

Die erste Form entsteht aus

$$(x+u)\,(x+v)\,(x+w)$$

Die fünfte Form entsteht aus

$$(x-u)\,(x-v)\,(x-w).$$

Die erste hat mithin mit der fünften gleich grofse, aber entgegengesetzte Wurzeln, die der ersten sind negativ, die der fünften positiv, wie auch Gleichung 1 drei Folgen und Gl. 5 drei Abwechselungen der Vorzeichen hat.

Die Wurzeln dieser beiden Formen sind also gleichnamig, die der übrigen ungleichnamig.

Die Wurzeln der Gl. 2 und 4 der beiden aus vieren zusammengezogenen Formen sind den oben gedachten Producten nach, woraus sie entstanden, einander gleich, aber entgegengesetzt; Gl. 2 hat 2 Folgen gleichnamiger und eine ungleichnamiger Vorzeichen, mithin 2 negative und eine positive Wurzel; Gl. 4 hat 2 Folgen ungleichnamiger und eine gleichnamiger Vorzeichen, mithin 2 positive und eine negative Wurzel.

Gl. 3 und 6 entstehen aus

$$(x+u)\,(x-v)\,(x-w) \text{ und}$$
$$(x-u)\,(x+v)\,(x+w)$$

Also auch bei diesen beiden sind die Wurzeln einander gleich und entgegengesetzt. Gl. 3 hat eine Folge und 2 Abwechselungen, Gl. 6 zwei Folgen und eine Abwechselung der Vorzeichen, mithin Gl. 3 eine negative und 2 positive, Gl. 6 eine positive und 2 negative Wurzeln, wie auch die obigen Factoren bezeugen.

18. Bei der quadratischen Gleichung können beide Wurzeln unmöglich sein (s. No. 10), bei der cubischen Gleichung ist immer eine Wurzel wenigstens möglich, die beiden anderen können möglich oder unmöglich sein. Denn wie die Beispiele 16 zeigen, giebt es keine numerische cubische Gleichung, in welcher das erste Glied $x^3$ nicht so grofs und nicht so klein genommen werden könnte, dafs der Werth der Gleichung im ersten Falle positiv und im zweiten Falle negativ wird, so dafs jedenfalls ein möglicher Werth zwischen beiden existirt, der den Werth der Gleichung zu Null macht. Für den Fall zweier unmöglichen Wurzeln hat das Gesetz über die Folgen der Vorzeichen keine Gültigkeit, und wenn man probiren will, um die eine mögliche Wurzel zu finden, so verfährt man nach Beispiel 4, No. 16, um auch die beiden unmöglichen zu erhalten.

19. Es erleichtert die Aufsuchung der Wurzel und ist zur streng wissenschaftlichen Auflösung der cubischen Gleichung unerläfslich, dafs das zweite Glied $ax^2$ fortgeschafft werde.

Hierfür setze man in die Gl.:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

für $x$ allgemein $y+\beta$, so entsteht:

$$(y+\beta)^3+a(y+\beta)^2+b(y+\beta)+c=0$$

entwickelt und geordnet:

$$y^3+(3\beta+a)y^2+(3\beta^2+2a\beta+b)y+\beta^3+a\beta^2+b\beta+c=0$$

$(3\beta+a)y^2$ wird nun $=0$ für $\beta=-\frac{a}{3}$

Diesen Werth in die Gleichung gesetzt, giebt:

$$y^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

Eine cubische Gleichung mit fehlendem 2ten Gliede hat also eine der beiden Formen:

1) $x^3+bx\pm c=0$
2) $x^3-bx\pm c=0$

20. Um aus der Folge der gleichnamigen und ungleichnamigen Vorzeichen auf die Vorzeichen der Wurzeln schließen zu können, muſs das fehlende Glied mit $\pm 0$ eingeführt werden.

Die Gl. 1 wird: $x^3\pm 0+bx\pm c=0$
für $+0$ und $+c$ erhält man 3 Folgen
für $-0$ und $+c$ „ „ 2 Wechsel und 1 Folge.

Aus diesem Widerspruch folgt, daſs 2 Wurzeln der Gl. unmöglich sind, denn die Gl. kann nicht 3 negative und zugleich 2 positive und eine negative Wurzel haben.

Die Gl. 2. wird $x^3\pm 0-bx\pm c=0$
Hier entstehen für $+0$ u. $+c$ und für $-0$ u. $+c$ } 1 Folge u. 2 Wechsel, u.
für $+0$ u. $-c$ und für $-0$ u. $-c$ } 2 Folgen und 1 Wechsel

mithin findet kein Widerspruch statt, und die Gleichung kann 3 mögliche Wurzeln liefern. Für diesen Fall giebt

$x^3-bx+c=0$, eine negative und 2 positive Wurzeln,
$x^3-bx-c=0$, eine positive und 2 negative Wurzeln,

dessen ungeachtet kann eine Gl. von der Form $x^3-bx\pm c=0$ auch 2 unmögliche Wurzeln haben.

21. Entwickelung der Gleichungen No. 20 durch Auffindung einer möglichen Wurzel.

Die Gl. $x^3\pm bx\pm c=0$ giebt

$$x^3=\mp(bx+c)$$

Man setze $x=y+z$

so ist $x^3=y^3+z^3+3y^2z+3yz^2$.
$=y^3+z^3+3yz(y+z)$
$=y^3+z^3+3yzx$

setzt man nun $y^3+z^3=\mp c$
$3yz=\mp b$
also $y^3z^3=\mp\frac{b^3}{27}$

so erhält man (No. 29, C. I)

$$y=\mp\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}$$

$$z=\mp\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}$$

woraus $x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[2]{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}\right]}$

Diese Formel heiſst von ihrem Erfinder die **Cardanische Formel**.

22. Die Gl. $x^3-bx\pm c=0$ liefert

$$x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[3]{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}\right)}\right]}$$

Ist nun $\frac{b^3}{27}>\frac{c^2}{4}$ oder $4b^3>27c^2$, so ist die $\sqrt[2]{}$ unmöglich, und mit dieser auch $x$; letzteres aber nur der Form nach, es giebt Mittel, $x$ in einer Reihe daraus zu entwickeln. Die Anwendung dieses Mittels ist aber weitläufig und somit die der Cardanischen Formel bedenklich.

Die Gl. $x^3+bx\pm c=0$ liefert

$$x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}$$

und läſst immer die Anwendung der Cardanischen Formel zu.

No. 16, Beispiel 1.

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

giebt nach No. 19 die Gl.: da $-\frac{a}{3}=+3$ ist

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+26(y+3)-24=0$$

und aus der Entwickelung dieser oder unmittelbar nach der Formel:

$$y^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

wo $a=9$; $b=26$; $c=24$ ist

$$y^3-y=0$$

Es kommt also hier nicht zur Anwendung der Cardanischen Formel; denn die Gl. mit $y$ dividirt, giebt

$y^2-1=0$, woraus $y=\pm 1$

Nun ist $y+3=x$, also $\pm 1+3=x$
woraus $x=+2$ und $+4$

so daſs bloſs durch die Fortschaffung des zweiten Gliedes sofort 2 Wurzeln gefunden worden.

No. 16, Beispiel 2.

$$x^3-8x^2+5x+14=0$$

Hier erhält man nach No. 19 $(y+\frac{8}{3})=x$ gesetzt

$$y^3 - \frac{49}{3}x - \frac{286}{27} = 0$$

Die Anwendnng der Card. Formel ist also nicht möglich, da 4. $\left(\frac{49}{3}\right)^3 > 27\left(\frac{286}{27}\right)^2$ ist, und es führt nach dem bisherigen Vortrag nur das Probiren zum Ziel, und zwar am leichtesten die Probe mit der ursprünglichen Gleichung.

No. 16, Beispiel 3.

$$x^3 - 49x - 120 = 0$$

Hier findet dasselbe statt, wie beim zweiten Beispiel.

No. 16, Beispiel 4.

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$$

giebt nach No. 19

$$y^3 + 7y - 22 = 0$$

Für diese Gleichung ist die Anwendung der Card. Formel geeignet. Man erhält

$$y = \sqrt[3]{+11 + \sqrt[2]{121 + \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{+11 - \sqrt[2]{121 + \frac{343}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{+11 + \frac{19}{9}\sqrt{30}} + \sqrt[3]{+11 - \frac{19}{9}\sqrt{30}}$$

Die Wurzel ist hier also in einer irrationalen Gestalt gegeben; aus der Probe No. 16. ist aber die mögliche Wnrzel rational = 4 gefunden; demnach mnfs das Irrationale sich fortschaffen lassen; dies kann aber nicht anders sein, als wenn

$11 \pm \frac{19}{9}\sqrt{30}$ rationale Cnbi sind.

Um die Nenner fortzuschaffen, mnltiplicire mit 27, so entsteht

$$297 \pm 57\sqrt{30}$$

Setze

$$(x \pm \sqrt{30})^3 = 297 \pm 57\sqrt{30}$$

so erhält man

$$x^3 \pm 3x^2\sqrt{30} + 90x \pm 30\sqrt{30} = 297 \pm 57\sqrt{30}$$

Das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich gesetzt, giebt:

$$x^3 + 90x = 297$$
$$(3x^2 \pm 30)\sqrt{30} = \pm 57\sqrt{30}$$

Aus dieser letzten Gl. erhält man

$$x = \pm 3 \text{ nnd } \pm 3\sqrt{-1}$$

Für die rationale mögliche Wnrzel ist nnr $x = \pm 3$ in die obige Gl. $(x \pm \sqrt{30})^3 = 297 \pm 57\sqrt{30}$ zn setzen; man erhält zunächst

$$\pm 3 \pm \sqrt{30} = \sqrt[3]{297 \pm 57\sqrt{30}}$$

also $\frac{1}{3}(\pm 3\sqrt{30}) = \sqrt[3]{11 \pm \frac{19}{9}\sqrt{30}}$ nnd es ist mithin

$$\sqrt[3]{11 + \frac{19}{9}\sqrt{30}} = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{30})$$

und

$$\sqrt[3]{11 - \frac{19}{9}\sqrt{30}} = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{30})$$

also

$$y = \frac{1}{3} \times (3 + \sqrt{30}) + \frac{1}{3}(3 - \sqrt{30}) = 2$$

Nnn ist aber $y + 2 = x$; mithin $x = 4$, wie die Probe No. 16 ergeben hat.

Es ist aus diesem Beispiel zu ersehen, dafs die Card. Formel, selbst in dem Fall, dafs sie nnmittelbar eine mögliche Wnrzel ergiebt, auf Schwierigkeiten oder Weitläufigkeiten führen kann, nnd dafs die Probe in den meisten Fällen vorzuziehen ist.

23. Um die Card. Formel nicht anwenden zu müssen und dennoch eine cub. Gl. streng auflösen zu können, giebt die Anwendung der trigonometrischen Fnnctionen ein Mittel.

Cnb. Gl., für welche die Card. F. eine mögliche Wnrzel liefert, sind (s. No. 22)

a) von der Form $x^3 + bx \pm c = 0$ ohne Ansnahme

nnd b) von der Form $x^3 - bx \pm c = 0$, in welcher $27c^2 > 4b^3$

Für diese Fälle (*a* nnd *b*) soll die strenge Auflösung gezeigt werden.

*A.* Für die Gl. von der Form

$$x^3 + bx + c = 0$$

Man setze $x = r(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$ (1)

wo $r$ einen noch näher zn bestimmenden Halbmesser bedeutet; so hat man

$$x^3 = r^3(tg^3\alpha - 3tg^2\alpha \cdot cot\,\alpha + 3tg\,\alpha\,cot^2\alpha - cot^3\alpha)$$
$$= r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) - 3r^3 tg\,\alpha \cdot cot\,\alpha(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$$

Da nun $tg\,\alpha \cdot cot\,\alpha = 1$ und $r(tg\,\alpha - cot\,\alpha) = x$, so erhält man

$$x^3 = r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) - 3r^2x$$

nnd geordnet

$$x^3 + 3r^2x - r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) = 0$$

Um der oben gegebenen Form $x^3 + bx + c = 0$ zu entsprechen, schreibe nun

$$x^3 + 3r^2x + r^3(cot^3\alpha - tg^3\alpha) = 0 \quad (2)$$

nnd es ist $b = 3r^2$ (3)

$$c = r^3(cot^3\alpha - tg^3\alpha)$$

Aus 3 erhält man $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$ (4)

Diesen Werth in die letzte Gl. gesetzt, giebt:

$$cot^3\alpha - tg^3\alpha = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$$

schreibt man hierzu $cot^3\alpha \cdot tg^3\alpha = 1$

so erhält man (nach No. 29, C. II)

$$\left.\begin{matrix}cot^2\alpha\\ tg^2\alpha\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1}\pm\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \qquad (5)$$

Betrachtet man $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ als Tangente eines $\angle\varphi$ so ist (6)

$\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1}$ die Secante desselben $\angle\varphi$ (7)

Und hat man $\left.\begin{matrix}cot^2\alpha\\ tg^3\alpha\end{matrix}\right\}=sec\,\varphi\pm tg\,\varphi$

$$=\pm tg(45^\circ\pm\frac{\varphi}{2})$$

woraus $\left.\begin{matrix}cot\,\alpha\\ tg\,\alpha\end{matrix}\right\}=\sqrt[3]{tg\,(45^\circ\pm\frac{\varphi}{2})}$ (8)

und $x=r(tg\,\alpha-cot\,\alpha)$

$$=(tg\,\alpha-cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}} \qquad (9)$$

Ist mithin eine Gl. gegeben $x^3+bx+c=0$, so sucht man zuerst aus 6 den $\angle\varphi$, setzt diesen in Gl. 8, erhält $tg\,\alpha$ und $cot\,\alpha$; diese Werthe in 9 gesetzt, giebt $x$.

Beispiel. Gegeben (M. Hirsch, p. 147.) Gl. $x^3+12x+63=0$

Die Card. Formel giebt $x=-3$; wie denn auch, dieser Werth eingesetzt:

$(-3)^3+12\cdot(-3)+63=0$ liefert.

Die Rechnung nach vorstehender Formel bei Einführung eines $\angle\varphi$ geschieht wie folgt:

Es ist $log(c)\,63 = 1,7993405$

also $log(c^2)\,63^2 = 3,5986810$

ferner $log\frac{27}{4}=log\,6,75 = 0,8293038$

also $log\left(\frac{27}{4}c^2\right)=log\frac{27}{4}63^2= 4,4279848$

ferner ist $log\,(b^3)\,12^3 =$
$log\,1728$ $3,2375437$

mithin nach 6: $log\,tg^2\varphi = 1,1904411$

und $log\,tg\,\varphi = 10,59522055-10$

Die Tafeln ergeben $\varphi=75^\circ 45'$

woher $\frac{1}{2}\varphi=37^\circ 52' 30''$

mithin $45+\frac{1}{2}\varphi=82^\circ 52' 30''$

und $45-\frac{1}{2}\varphi=7^\circ\ 7' 30''$

$log\,tg\,82^\circ 52' 30'' = 10,9030914 \ -10$

$log\,tg\ \ 7^\circ\ 7' 30'' = 9,0969088 \ -10$

Daher $log\sqrt[3]{tg\,82^\circ 52' 30''}=$
$log\,cot\,\alpha = 10,3010305 \ -10$

und $log\sqrt[3]{tg\,7^\circ 7' 30''}$
$=log\,tg\,\alpha = 9,6989696 \ -10$

Die Tafeln ergeben hieraus $cot\,\alpha=2$
$tg\,\alpha=0,5$

Nun ist also $tg\,\alpha-cot\,\alpha=0,5-2=-1,5$

$$\text{und } \sqrt{\frac{b}{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=2$$

daher nach Gl. 9: $x=2\times(-1,5)=-3$

$log\,cot\,\alpha$ ist gefunden 0,3010305
$log$ 2 ist in den Tafeln 0,3010300
Ersterer zu grofs 0,0000005

$log\,tg\,\alpha$ gegen $log$ 0,5 ist zu klein um 0,0000004

Diese kleinen Differenzen liegen in der Irrationalität der Logarithmen selbst und dafs die daraus entspringenden Differenzen in der obigen Reihe von Rechnungen summirt haben, wie denn auch $\angle\varphi$ nicht ganz genau ermittelt und angegeben worden ist.

Diese Auflösungsweise eignet sich aber ganz besonders für irrationale Wurzeln, welche immer nur näherungsweise angegeben werden können.

*B.* Für die Gl. von der Form
$x^3+bx-c=0$

Setze wieder $x=r\,(tg\,\alpha-cot\,\alpha)$ (1)

so erhält man $x^3+3r^2x-r^3(tg^3\alpha-cot^3\alpha)=0$ (2)

$c=r^2(tg^3\alpha-cot^3\alpha)$ (3)

$r=\sqrt{\frac{b}{3}}$ (4)

$tg^3\alpha-cot^3\alpha=\sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$

und $\left.\begin{matrix}tg^2\alpha\\ cot^2\alpha\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1}\pm\sqrt{\frac{27c^3}{4b^2}}$ (5)

$$=sec\,\varphi\pm tg\,\varphi=tg\,(45^\circ\pm\frac{\varphi}{2}) \quad (6, 7)$$

folglich $\left.\begin{matrix}tg\,\alpha\\ cot\,\alpha\end{matrix}\right\}=\sqrt[2]{tg\,(45^\circ\pm\frac{\varphi}{2})}$ (8)

und $x=(tg\,\alpha-cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}}$ (9)

Beispiel. No. 16 u. No. 22, Beisp. 4, hat die Gl.:

$$y^3+7y-22=0$$

Die Card. F. führt auf einen irrationalen Ausdruck.

Man hat hier $log\,(c^2)\,22^2 = 2,6848454$

ferner $log\frac{27}{4}=log\,6,75 = 0,8293038$

daher $log\frac{27}{4}c^2 = 3,5141492$

ferner $log(b^3)\,7^3=log\,343 = 2,5352941$

hieraus $log\,tg^2\varphi = 0,9788551$

daher $log\,tg\,\varphi = 10,48942755-10$

und $\varphi=72^\circ\ 2' 47,8''$

daher $\frac{1}{2}\varphi=36^\circ\ 1' 23,9''$

mithin $45^\circ+\frac{1}{2}\varphi=81^\circ\ 1' 23,9''$

und $45^\circ-\frac{1}{2}\varphi=8^\circ 58' 36,1''$

Es ist $log\,tg\,81^\circ 1' 23,9'' = 10,8014325 \ -10$

und $log\,tg\ \ 8^\circ 58' 36,1'' = 9,1985675 \ -10$

daher $log\sqrt[3]{tg\,81^\circ 1' 23,9''}=$
$log\,tg\,\alpha = 10,2671442 \ -10$

und $log\sqrt[3]{tg\,8^\circ 58' 36,1''}=$
$log\,cot\,\alpha = 9,7328558 \ -10$

Die Tafeln ergeben $tg\,\alpha = 1{,}849882$
und $cot\,\alpha = 0{,}540575$

mithin $tg\,\alpha - cot\,\alpha \quad = 1{,}309307$

Nun ist $log\,(tg\,\alpha - cot\,\alpha) = 0{,}11704152$

$log\; r = log\sqrt{\frac{7}{3}} \quad = 0{,}18398835$

mithin $log\,y \quad = 0{,}30102987$
$log\,2 \quad = 0{,}3010300$

mithin $y = 2$, wie in No. 22. berechnet worden.

*C.* Für die Gl. von der Form
$x^3 - bx + c = 0.$

Setze $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$ (1)

so entsteht $x^3 - 3r^2x - r^3\,(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = 0$

Um nun das 3. Glied positiv zu erhalten, setze

$$\alpha = (90 + \beta)$$

so ist $tg\,(90 + \beta) = -\,tg\,(90 - \beta)$
und $cot\,(90 + \beta) = -\,cot\,(90 - \beta)$

mithin erhält man die Gl. von verlangter Form:

$$x^3 - 3r^2x + r^3[tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta)] = 0 \qquad (2)$$

Man hat hier

$$c = r^3\,[tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta)] \qquad (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{b}{3}} \qquad (4)$$

und $tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta) = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$

hierzu $tg^3(90-\beta) \times cot^3(90-\beta) = 1$

giebt nach No. 29, C. I.

$$\left.\begin{matrix} tg^3(90-\beta) \\ cot^3(90-\beta) \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1} \qquad (5)$$

Betrachtet man $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ als Secante eines

$\angle\,\varphi$ (6)

so ist $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$ die Tangente desselben

$\angle\,\varphi$ (7)

Und man hat $\left.\begin{matrix} tg^3(90-\beta) \\ cot^3(90-\beta) \end{matrix}\right\} = sec\,\varphi \pm tg\,\varphi$

$$= tg\,(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2})$$

woraus $\left.\begin{matrix} tg\,(90-\beta) \\ cot\,(90-\beta) \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2})}$ (8)

Nun ist $tg(90-\beta) = -\,tg\,\alpha$
und $cot\,(90-\beta) = -\,cot\,\alpha$
und $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$

$$= (tg\,\alpha + cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}} \qquad (9)$$

Beispiel. Gegeben die Gl.:

$x^3 - \frac{15}{2}x + 290\frac{1}{2} = 0$ (M. Hirsch, p. 147).

Die Card. Formel liefert den irrationalen Ausdruck:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann rational werden, wenn die Gröſse unter der $\sqrt[3]{\;}$, also wenn

$$\frac{-1162 \pm 2\sqrt{337311}}{8} = (-a \pm b\sqrt{c})^3 \text{ ist;}$$

337311 in Factoren zerlegt, giebt:

$$3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 31^2$$

also $-1162 \pm 2\sqrt{337311} = -1162 \pm 186\sqrt{39}$

Dies muſs also = sein $(-a \pm b\sqrt{39})^3$ und die $\sqrt[3]{\;}$ ausgezogen, giebt:

$$x = \tfrac{1}{2}(-7 + \sqrt{39}) + \tfrac{1}{2}(-7 - \sqrt{39}) = -7$$

Die Card. F. giebt also auch in diesem Fall nicht unmittelbar ein brauchbares Resultat; es muſs dies erst umgeformt werden.

Verfährt man nach der trigonometrischen Formel, so rechne man:

$log\,(c^2) = log\,290{,}5^2 \quad = 4.9262922$

$log\,\frac{27}{4} = log\,6{,}75 \quad = 0{,}8293038$

$log\left(\frac{27}{4}\,c^2\right) \quad = 5{,}7555960$

$log\,(b^3) = log\,7{,}5^3 \quad = 2{,}6251839$

$log\,\frac{27c^2}{4b^3} = log\,sec^2\varphi \quad = 3{,}1304121$

man hat nach den Tafeln

$sec^2\varphi = 1350{,}2437$

folglich $tg^2\varphi = 1349{,}2437$

Man findet $log\,tg^2\varphi \quad = 3{,}130090446$

hieraus $log\,tg\,\varphi \quad = 11{,}565045223 - 10$

Nun aus den Tafeln $\varphi = 88^\circ\,26'\,26''$

also $\frac{1}{2}\varphi = 44^\circ\,13'\,13''$

daher $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 89^\circ\,13'\,13''$

und $45 - \frac{1}{2}\varphi = 0^\circ\,46'\,47''$

$log\,tg\,89^\circ\,13'\,13'' = log\,tg^3(90^\circ-\beta) \quad = 11{,}86615645 - 10$

$log\,tg\,0^\circ\,46'\,47'' = log\,cot^3(90^\circ-\beta) \quad = 8{,}13384355 - 10$

hieraus $log\,tg\,(90^\circ-\beta) = 10{,}62205215 - 10$

und $log\,cot\,(90^\circ-\beta) = 9{,}37794785 - 10$

hieraus $tg\,(90^\circ-\beta) = -\,tg\,\alpha \quad = 4{,}18844$

und $cot\,(90^\circ-\beta) = -\,cot\,\alpha \quad = 0{,}23875$

mithin $tg\,\alpha + cot\,\alpha = -\;4{,}42719$

$log - (tg\,\alpha + cot\,\alpha) \quad = 0{,}6461281$

$log\left(r = \sqrt{\frac{15}{6}}\right) \quad = 0{,}1989700$

$log\,x \quad = 0{,}8450981$

$log\,7$ ist $\quad = 0{,}8450980$

mithin hat man $x = -7.$

*D.* Für die Gl. von der Form

$$x^3 - bx - c = 0$$

Man setze wie in *C*:

$$x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$$

so entsteht

$$x^3 - 3r^2x - r^3\,(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = 0$$

Es ist $b = 3r^2$

$$c = r^3\,(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$$

$$\left.\begin{matrix} tg^3\alpha \\ cot^3\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$$

$$= sec\,\varphi \pm tg\,\varphi = tg\,(45° \pm \frac{\varphi}{2})$$

also $\left.\begin{matrix} tg\,\alpha \\ cot\,\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg\,(45° \pm \frac{\varphi}{2})}$

und $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha) = (tg\,\alpha + cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}}$

24. Dafs die beiden letzten Gleichungsformen $x^3 - bx \pm c = 0$ den Character der Einschränkung haben, ersieht man aus $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$ Denn da $tg\,\varphi$ immer $>1$, so mufs auch immer $\frac{27c^2}{4b^3} > 1$, also $27c^2 > 4b^3$ sein, wenn beide trig. Formeln Anwendung finden sollen.

Für die beiden Gl. von der Form $x^3 - bx \pm c = 0$, wenn $27c^2 < 4b^3$, wenn also die Card. Formel unmögliche Werthe für $x$ liefert, hat man ebenfalls Auflösungen mit Hülfe trigonometrischer Functionen.

Es ist nämlich

$$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha - 4\,sin^3\alpha$$

woraus $sin^3\alpha - \frac{3}{4}\,sin\,\alpha + \frac{1}{4}\,sin\,3\alpha = 0$ (1)

also die Form $x^3 - bx + c = 0$

Die Sinus sind sämmtlich ächte Brüche, man hat daher, wie in No. 23, einen Radius $r$ zu denken, welcher mit den trig. Functionen in Verbindung, einer gegebenen Gl. von $x$ genügt. Also

$$r^3\,sin^3\alpha - \frac{3}{4}\,r\,sin\,\alpha + \frac{1}{4}\,r\,sin\,3\alpha = 0$$

Demnach erhält man in 1 für

$$sin^3\alpha = \frac{x^3}{r^3} \text{ und } sin\,\alpha = \frac{x}{r}$$

und es wird aus Gl. I.

$\frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{4}\,\frac{x}{r} + \frac{1}{4}\,sin\,3\alpha = 0$ oder geordnet

$x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^3\,sin\,3\alpha = 0$ (2)

man hat also $b = \frac{3}{4}r^2$

und $c = \frac{1}{4}r^3\,sin\,3\alpha$

woraus $r = 2\sqrt{\frac{b}{3}}$ (3)

und $sin\,3\alpha = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ (4)

Die Auflösung gewährt also nur mögliche Resultate, wenn $27c^2 < 4b^3$, weil $sin\,3\alpha$ immer $<1$ ist, wenn also die für Anwendung der Card. Formel entgegengesetzte Bedingung stattfindet.

Aus $sin\,3\alpha$ erhält man dann

$$x = r\,sin\,\alpha = 2\,sin\,\alpha\sqrt{\frac{b}{3}}$$

Ist eine Gleichung von der Form $x^3 - bx - c = 0$ gegeben, so nimmt man $sin\,3\alpha$ negativ, $3\alpha$ gehört dann dem 3ten oder 4ten Quadranten an.

Beispiele.

No. 16, Beispiel 2:

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

giebt No. 22:

$$y^3 - \frac{49}{3}y - \frac{286}{27} = 0$$

und die Card. Formel ist nicht anwendbar.

Hier ist

$$sin\,3\alpha = \sqrt{\frac{27\cdot\left(\frac{286}{27}\right)^2}{4\,\left(\frac{49}{3}\right)^3}} = \frac{143}{343}$$

$$\begin{aligned} log\,143 &= 2{,}1553360 \\ log\,343 &= 2{,}5352941 \\ \hline log\,sin\,3\alpha &= 9{,}6200419 - 10 \end{aligned}$$

woraus $3\alpha = 24°\,38'\,1''$

Da aber der Bogen $3\alpha$ dem 3ten oder 4ten Quadrant angehört, so hat man für den 3ten Quadr.

$3\alpha = 180 + 24°\,38'\,1'' = 204°\,38'\,1''$

woraus $\alpha = 68°\,12'\,40\frac{1}{3}''$

und $y = 2\cdot\sqrt{\frac{49}{9}}\cdot sin\,\alpha = \frac{14}{3}\,sin\,\alpha$

Es ist nun $sin\,68°\,12'\,40\frac{1}{3}'' = 0{,}9285584$

also $y = \frac{14}{3}\cdot 0{,}9285584 = 4{,}33327$

Es ist (No. 22)

$$x = y + \frac{8}{3} = 4{,}33327 + 2{,}666\ldots. = 6{,}99993$$

oder = 7, wie No. 16 durch Probiren gefunden worden.

Eine zweite Wurzel läfst sich durch die Formel nicht finden, denn nimmt man $3\alpha$ als dem 4ten Quadrant angehörig,

so ist $3\alpha = 360° - 24°\,38'\,1'' = 335°\,21'\,59''$

also $\alpha = 111°\,47'\,19\frac{2}{3}''$

und

$sin\,111°\,47'\,19\frac{2}{3}'' = sin\,180° - 111°\,47'\,19\frac{2}{3}''$
$= sin\,68°\,12'\,40\frac{1}{3}''$

wie für den 3ten Quadrant.

25. Es soll noch gezeigt werden, dafs die No. 23 und 24 gezeigte Anwendung der trigonometrischen Functionen zu Aufl. von cub. Gl. sich ganz besonders für irrationale Wurzeln eignet.

$x^3 - 12x - 132 = 0$ (Meier Hirsch, p. 155.) giebt die Näherungswerthe für $x$: (M. H. daselbst)

1) $w = 6$

2) $w' = \frac{47}{8} = 5,875$

3) $w'' = \frac{137615}{23436} = 5,871949$

Für diesen letzten $w''$ für $x$ erhält man den Werth der Gl. $= + 0,00017$. Es ist hier $27c^2 > 4b^3$ und der Fall also für No. 23, *D* geeignet, und man hat:

$log(c)\ 132 = 2,1205739$

daher $log(c^2)\ 132^2 = 4,2411478$

$log \frac{27}{4} = 0,8293038$

daher $log\left(\frac{27}{4} c^2\right) = 5,0704516$

$log(b^3)\ 1728 = 3,2375437$

folgt $log \frac{27c^2}{4b^3}$

$= log\ sec^2\varphi = 1,8329079$

Die Tafeln ergeben

$sec^2\varphi = 68,0625$

mithin $tg^2\varphi = 67,0625$

$log\ tg^2\varphi = 1,8264798$

daher $log\ tg\ \varphi = 10,9132399 - 10$

Die Tafeln ergeben $\varphi = 83°\ 2'\ 16,56''$

daher $\frac{1}{2}\varphi = 41° 31'\ 8,28''$

$45° + \frac{1}{2}\varphi = 86° 31'\ 8,28''$

$45° - \frac{1}{2}\varphi = 3° 28' 51,72''$

$log\ tg(45 + \frac{1}{2}\varphi) = 11,2158796644 - 10$

$log\ tg(45 - \frac{1}{2}\varphi) = 8,7841203356 - 10$

hieraus $log \sqrt[3]{tg(45 + \frac{\varphi}{2})}$

$= log\ tg\ \alpha = 10,4052932215 - 10$

$log \sqrt[3]{tg\ (45 - \frac{\varphi}{2})}$

$= log\ cot\ \alpha = 9,5947067785 - 10$

Die Tafeln ergeben $tg\alpha = 2,54268888$

$cot\ \alpha = 0,39328443$

$tg\ \alpha + cot\ \alpha = 2,93597331$

$r = \sqrt{\frac{b}{3}} = 2$

folglich $x = 5,87194662$

der Werth der Gl. $= - 0,000101$

26. Auflösung der Gleichungen vom vierten und von höheren Graden.

Wenn alle oder mehrere Wurzeln rational sind.

Diese sind, wenn sie numerisch sind, am leichtesten, und oft gar nicht anders als durch Probiren aufzulösen.

Weifs man von einer Gleichung, dafs sie rationale Wurzeln hat, so beachte für die Probe besonders das absolute Glied. Es hat nämlich jede Gl. so viele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten enthält.

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$$

(Meier Hirsch, pag. 150.)

hat 5 Wurzeln, deren Product $= 27$ ist.

Mit 1 versucht, giebt den Werth der Gl. $= +32$

mit $- 1$ versucht, giebt denselben $+64$

mit 2 ist nicht zu versuchen, weil sämmtliche rationale mögliche Wurzeln ganze Zahlen sein müssen, und 2 kein Theiler von 27 ist.

Für $x = +3$ wird die Gl. $= 0$

mithin ist $+3$ eine Wurzel der Gl.

Man dividire dieselbe durch $(x-3)$, so erhält man eine Gl. vom vierten Grade; verfährt man dann wie mit der ursprünglichen Gl., so erhält man zum zweiten Mal die Wurzel 3, dividirt man wieder mit $x-3$, so erhält man die cubische Gl.

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$$

Diese mufs eine mögliche, und zwar, weil alle Glieder positiv sind, eine negative Wurzel haben. Mit $(-1)$ ist schon vergebens probirt; $x = -3$ entspricht der Gl., mit $x + 3$ dividirt, entsteht

$$x^2 + 1 = 0$$

woraus $x = \pm\sqrt{-1}$

Die Wurzeln der gegebenen Gl. sind also

$+3,\ +3,\ -3,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$

27. Erleichterungen beim Probiren.

Wenn das absolute Glied sehr grofs ist und viele Theiler hat, so kann das Probiren oft vergebene geschehen müssen; z. B.

$$x^5 - 4x^4 - 186x^3 + 916x^2 + 4673x - 17160 = 0$$

Die Bekannte 17160 hat

| | | |
|---|---|---|
| einfache | Factoren | 1, 2, 2, 2, 3, 5, 11, 13 |
| zweifache | „ | 4, 6, 10, 22, 26, 15, 33, 39, 55, 65, 143 |
| dreifache | „ | 8, 12, 20, 44, 52, 30, 66, 78, 110, 130, 286 |
| vierfache | „ | 24, 40, 88, 104, 60, 132, 156, 220, 260, 572 |
| fünffache | „ | 120, 264, 312, 440, 520, 1144 |
| sechsfache | „ | 1320, 1560, 3432 |
| siebenfache | „ | die Zahl 17160. |

Wenn man also nicht zufällig recht bald eine richtige Wurzel trifft, so kann das Probiren langwierig werden.

Setzt man aber für $x = y + 1$ und $z - 1$, so erhält man zwei neue Gleichungen; in der ersten sind die Wurzeln, so weit diese ganze Zahlen sind, um $+1$ kleiner, und in der zweiten um $+1$ gröfser, als die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Setzt man nämlich in der Gl.

$$x^2 + ax + b = 0$$

für $x = y \pm 1$, so entsteht die Gl.

$$y^2 + (a \pm 2)y + b \pm a + 1 = 0$$

sind nun die Wurzeln der ersten Gl. $n$, $m$, so ist nach No. 11

$$a = -(m+n) \text{ und } b = m \cdot n$$

demnach die Wurzeln der zweiten Gl.

$$b \pm a + 1 = m \cdot n \mp (m+n) + 1$$
$$= (m \mp 1)(n \mp 1)$$

woraus für quadratische Gleichungen zunächst das Gesetz erwiesen ist, und für Gl. aller Grade sich erweisen läfst.

Eben so ist zu ersehen, dafs man das absolute Glied, worauf allein es ankommt, erhält, indem man die einzelnen Glieder zusammen zählt, wenn man in die Gl. $x = \pm 1$ setzt.

Für $y+1=x$ erhält man das absolute Glied in dem obigen Beispiel $= -11760$ für $y-1=x$ dasselbe $= -20736$

Die einfachen Factoren von 11760 sind:
2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7
von 20736 sind: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 9, 9

Von den Factoren der ursprünglichen Gl. geben nur folgende, $\pm$ genommen, um $+1$ vermindert, Factoren von 11760
+ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 15, 22
− 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 15, 20, 39, 55

Von den Factoren der ursprünglichen Gl. geben folgende, um $+1$ vermehrt, Factoren von 20736
+ 2, 3, 5, 8, 11, 15, 143
− 1, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 33, 55 65

In beiden Proben finden sich folgende übereinstimmende Factoren, welche also Wurzeln sein können:
+ 2, 3, 5, 8, 11, 15
− 2, 3, 4, 5, 13

und auf diese 11 Zahlen ist jetzt die Probe mit der ursprüglichen Gleichung eingeschränkt, 5 derselben sind Wurzeln, 6 derselben sind es nicht.

Man erhält den Werth der Gleichung:

für $x = +2 = -5670$
$x = +3 = 0$
$x = +5 = +6480$
$x = +8 = 0$
$x = +11 = 0$
$x = +15 = +188160$
$x = -2 = -21450$
$x = -3 = -18480$
$x = -4 = -11340$
$x = -5 = 0$
$x = -13 = 0$

Man hat also für die gegebene Gleichung die Wurzeln

$$+3,\ +8,\ +11,\ -5,\ -13$$

und das Aggregat derselben entsteht aus dem Product:

$$(x-3)\,(x-8)\,(x-11)\,(x+5)\,(x+13)$$

28. **Auflösung höherer Gleichungen, wenn die Wurzeln irrational sind.**

*A.* Die Gleichung sei:

$$x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0$$

Durch Probiren suche eine Zahl, welche von einer wirklichen Wurzel der Gl. um weniger als eine Einheit verschieden ist. Man findet für $x=4$ den Werth der Gl. $+8$, so dafs die wirkliche Wurzel $w$ etwas geringer als 4, aber mehr als 3 beträgt.

Setze nun $w = 4 - y$, so erhält man

$$(4-y)^4 + 8(4-y)^2 + 16(4-y) - 440 = 0$$

Um die Gl. nach $y$ zu ordnen, erhält man:

$$(4-y)^4 = 256 - 256y + 96y^2 - 16y^3 + y^4$$
$$8(4-y)^2 = 128 - 64y + 8y^2$$
$$16(4-y) = 64 - 16y$$

Da nun $y$ ein nur kleiner Bruch ist, so kann man, um der Wurzel vorläufig näher zu kommen, die höheren Potenzen von $y$ unberücksichtigt lassen, und dann erhält man:

$$448 - 336y - 440 = 0$$

$$\text{woraus } y = \frac{8}{336} = \frac{1}{42} = 0{,}02381$$

$$\text{mithin } x = 4 - 0{,}02381 = 3{,}97619$$

Setzt man diesen Werth in die gegebene Gl., so findet man mit Hülfe der Logarithmen:

$$\begin{aligned} + x^4 &= +249{,}9588 \\ + 8x^2 &= +126{,}4807 \\ + 16x &= +\ \ 63{,}6190 \\ \hline & +440{,}0585 \end{aligned}$$

der Werth der Gl. also nur noch

$$+0{,}0585$$

*B.* Es ist mithin die Wurzel noch etwas geringer als 3,97619; will man dieselbe genauer bestimmen und man setzt wieder:

$$x = (3{,}97619 - z)$$

so erhält man wieder bei blofser Berücksichtigung der einfachen Potenzen von $z$:

$$\begin{aligned} 4 \times 3{,}97619^3 \times z &= 251{,}4556 \cdot z \\ 64 \times 3{,}97619 \cdot z &= 254{,}4762 \cdot z \\ \text{hierzu} \quad & \ \ 16{,}0000 \cdot z \\ \hline & 521{,}9318 \cdot z \end{aligned}$$

Es ist also $440{,}0585 - 521{,}9318 \cdot z - 440 = 0$

$$\text{woraus } z = \frac{0{,}0585}{521{,}9318}$$

$$\begin{aligned} \log\ 0{,}0585 &= 0{,}7671559-2 \\ \log\ 521{,}9318 &= 2{,}7176138 \\ \hline \log \text{ des Quotienten} &= 0{,}0495421-4 \\ \text{und der Quotient } z &= 0{,}000112 \\ \text{ab von} \quad & \ \ 3{,}97619 \\ \hline \text{giebt die nähere Wurzel} &= 3{,}976078 \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Logarithmen findet man:

$$\begin{aligned} x^4 &= +249{,}9306 \\ 8x^2 &= +126{,}4736 \\ 16x &= +\ \ 63{,}6172 \\ \hline & 440{,}0214 \end{aligned}$$

mithin der Werth der Gleichung noch

$$+0{,}0214$$

*C.* Setzt man abermals

$$x = 3{,}976078 - w$$

so sieht man schon aus den bisher beobachteten Resultaten, dafs man wiederum auf einen noch positiven Werth der Gleichung kommt, dafs die Wnrzel wiederum geringer ist als $w$, und dafs man sich der wirklichen Wurzel nnr von einer Seite her nähert.

Man probire daher der Kürze wegen mit 3,976 um vielleicht einen negativen Werth der Wurzel zu erhalten, nnd man erhält:

$$\begin{aligned} 3{,}976^4 &= 249{,}91116 \\ 8 \times 3{,}976^2 &= 126{,}46864 \\ 16 \times 3{,}976 &= \phantom{0}63{,}61600 \\ &\overline{+439{,}99580} \\ \text{hierzu} &\; -\underline{440{,}0000} \end{aligned}$$

giebt den Werth der Gleichung

$$-0{,}0042$$

*D.* Zum Vergleich der Werthe von $x$ mit den Werthen der Gl. hat man nun:

für $x' = 3{,}976078$ den Werth $+0{,}0214\,(A)$

„ $x'' = 3{,}976000$ „ „ $-0{,}0042\,(A')$

Nun schliefse man nach der *Regula falsi*

wie $x' - x'' : A - A' = v - x'' : +0{,}0042$

wo $v$ die richtige Wurzel bedeutet.

Man findet aus der Proportion:

$$0{,}000078 : 0{,}0256 = v - x'' : 0{,}0042$$
$$v - x'' = 0{,}0000128$$
$$\text{und } v = 3{,}9760128$$

probirt man diesen Werth mit Hülfe der Logarithmen, so erhält man:

$$\begin{aligned} x^4 &= 249{,}91436 \\ 8x^2 &= 126{,}46944 \\ 16x &= \phantom{0}63{,}61620 \\ &\overline{\phantom{0}440{,}00000} \end{aligned}$$

und man ersieht, dafs dio zuletzt ermittelte Wurzel auf 5 Decimalstellen des absolnten Gliedes genau stimmt.

*E.* Eine zweite Wnrzel der Gleichnng ist offenbar negativ und etwas gröfser als 4

für $x = -4$ erhält man den Werth der Gl. $= -120$

für $x = -5$ den Werth $= +305$

Wendet man sogleich die *Regula falsi* an und setzt die Proportion:

$$1 : d = 425 : 120$$

so erhält man $d$, nämlich die Zahl, welche zu $-4$ addirt werden mufs, um die richtige Wurzel der Gl. zu finden $= 0{,}28235$

und $x$ näherungsweise $= -4{,}28235$

Eine Probe ergiebt mit Hülfe der Logarithmen:

$$\begin{aligned} (-4{,}28235)^4 &= +336{,}30146 \\ 8 \times (-4{,}28235)^2 &= +146{,}7082 \\ 16 \times (-4{,}28235) &= \qquad\qquad -\phantom{0}68{,}5176 \\ \text{hierzu} & \qquad\qquad\qquad -\underline{440} \\ \text{Werth der Gl.} &= \phantom{+}483{,}0096 - 508{,}5176 \\ &= -25{,}508 \end{aligned}$$

*F.* Wendet man, um den ersten Näherungswerth der Wnrzel zu finden, die obige erste Vorschrift an, so erhält man

$$w = -(4 + y) \text{ gesetzt}$$
$$+304 \cdot y - 120 = 0$$
$$\text{woraus } y = 0{,}39474$$
$$\text{und } w = -4{,}39474$$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$\begin{aligned} (-4{,}39474)^4 &= \phantom{+}373{,}0206 \\ 8 \times (-4{,}39474)^2 &= \phantom{+}154{,}5099 \\ 16 \times (-4{,}39474) &= \qquad\qquad -\phantom{0}70{,}31584 \\ \text{hierzu} & \qquad\qquad -\underline{440{,}00000} \\ \text{Werth der Gl.} &= +527{,}5305 - 510{,}31584 \\ &= +17{,}2147 \end{aligned}$$

*G.* Für fortgesetzte Anwendnng der *Regula falsi* hat man nun:

für

$x' = -4{,}28235$ Werth der Gl. $-25{,}5080\,(A')$

$x'' = -4{,}39474$ „ „ „ $+17{,}2147\,(A'')$

$$x'' - x' : x'' - w = A'' - A' : A''; \text{ d. i.}$$
$$-0{,}11239 : x'' - w = 42{,}7227 : 17{,}2147$$
$$\text{woraus } x'' - w = \frac{17{,}2147 \times 0{,}11239}{42{,}7227} = 0{,}0452864$$

Es ist $x'' = 4{,}39474$

woraus $w = 4{,}3494536$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$\begin{aligned} (-4{,}3494536)^4 &= +357{,}88135 \\ 8 \times (-4{,}3494536)^2 &= +151{,}34204 \\ 16 \times (-4{,}3494536) &= \qquad\qquad -\phantom{0}69{,}59126 \\ \text{hierzu die Bekannte} & \qquad\qquad -\underline{440} \\ \text{Werth der Gleichung} &= +509{,}22339 - 509{,}59126 \\ &= -0{,}36787 \end{aligned}$$

*H.* Für die abermalige Anwendung der *Regula falsi* hat man:

$x'' = -4{,}39474$ Werth $= +17{,}21470$

$x''' = -4{,}3494536$ „ $= -\phantom{0}0{,}36787$

mithin $0{,}0452864 : v - x''' = 17{,}58257 : 0{,}36787$

$$\text{woraus } v - x''' = \frac{0{,}0452864 \times 0{,}36787}{17{,}58257} = 0{,}0009475$$

$$\text{und } v = 4{,}3504011$$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$(-4{,}350401)^4 = +358{,}19309$$
$$8\times(-4{,}350401)^2 = +151{,}40790$$
$$16\times(-4{,}350401) = \qquad -69{,}606416$$
hierzu die Bekannte $-440$
$$\text{Werth der Gleichung} = +509{,}60099 - 509{,}60642 = -0{,}00543$$

*I.* Für eine nochmalige Anwendnng der *Regula falsi* hat man 2 negative Werthe der Gleichung, welche nicht brauchbar sind, nämlich:

für $x^{III}=4{,}3494536$ den Werth $-0{,}36787$
für $x^{IV}=4{,}3504011$ den Werth $-0{,}00543$

nnd die wahre Wnrzel ist um etwas gröfser als $x^{IV}$
Probirt man daher mit $-4{,}3505$, so erhält man:

$$(-4{,}3505)^4 = +358{,}22574$$
$$8\times(-4{,}3505)^2 = +151{,}41484$$
$$16\times(-4{,}3505) = \qquad -69{,}6080$$
hierzn die Bekannte $-440$
$$\text{Werth der Gleichnng} = +509{,}64058 - 509{,}6080 = +0{,}03258$$

*K.* Zur Anwenduug der *Regula falsi* hat man nnn:

für $x^{IV}=-4{,}3504011$ den Werth der Gl. $=-0{,}00543$
für $x^{V}=-4{,}3505000$ „ „ „ „ $=+0{,}03258$

$$x^{V}-x^{IV}(=0{,}0000989):0{,}03801=x^{IV}+w:0{,}00543$$
$$\text{woraus } x^{IV}+w=\frac{0{,}0000989\times0{,}00543}{0{,}03801}=0{,}0000141286$$
und $w=4{,}3504152$

mit diesem Werth probirt, erhält man:

$$(-w)^4 = +358{,}19772$$
$$8(-w)^2 = +151{,}40887$$
$$16(-w) = \qquad -69{,}6066432$$
hierzn die Bekannte $-440$
$$\text{Werth der Gleichung} = +509{,}60659 - 509{,}6066432 = +0{,}00005$$

*L.* Die beiden Wurzeln sind also sehr nahe

$+3{,}9760128$
und $-4{,}3504152$

Dividirt man die nrsprügliche Gl. durch $x-3{,}9760128$ so erhält man die Gl.

$$x^3+3{,}9760128x^2+23{,}80868x+110{,}663614=0$$

Dividirt man diese Gl. dnrch $x+4{,}3504152$ so erhält man die Gl.

$$x^2-0{,}3744024x+25{,}437485=0$$

Diese Gleichnng enthält 2 unmögliche Wurzeln.

29. **Anflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Gröfsen.**

*A.* Wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, so müssen eben so viel Gleichnngen gegeben sein, als Unbekannte vorhanden sind (s. Algebra).

In jeder Gl. müssen wenigstens 2 Unbekannte vorhanden sein.

$$ax+b=c$$
$$dy+e=f$$

sind nicht Gl. mit mehreren Unbekannten, sondern jede ist eine Gl. mit einer Unbekannten. Dagegen

$$ax+by=c$$
$$dx-ey=f$$

sind 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen,

sowie
$$ax+by=c$$
$$bx+dz=e$$
$$fy+gz=h$$

sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

*B.* Die Auflösnng solcher Gleichnngen geschieht, dafs man aus den gegebenen Gl. eben so viele andere ableitet, von denen jede nur eine der Unbekannten enthält, wonach man nach dem Vorigen (No. 7. bis 26.) verfährt.

Für die eben gedachte Ableitnng von Gleichnngen mit nur einer Unbekannten hat man 2 Haupt-Verfahren: die Elimination und die Substitntion. Das erste Verfahren besteht darin, die gegebenen Gleichungen so mit einander zu verbinden, dafs eine oder mehrere Unbekannte ausgeschieden werden; das zweite darin, dafs man aus einer Gl. eine Un-

bekannte entwickelt, und den so erhaltenen Werth, in welchem noch eine oder mehrere Unbekannte sich befinden, in die übrigen Gl. einsetzt.

Beispiel 1.

Die Gleichungen:

$$x+y=a$$
$$x-y=b$$

lös't man am einfachsten durch Elimination auf, indem man einmal beide addirt, und hiernach die zweite von der ersten subtrahirt. Man erhält

durch Addition $2x=a+b$

durch Subtraction $2y=a-b$

mithin ist $x=\frac{a+b}{2}$

und $y=\frac{a-b}{2}$

Bei Anwendung der Substitution würde man aus der ersten Gl. $x$ entwickeln. Man erhält

$$x=a-y$$

und diesen Werth in die zweite Gleichung für $x$ einsetzen.

Man erhält aus Gl. 2

$$(a-y)-y=b$$

woraus $a-2y=b$

und $y=\frac{a-b}{2}$

Diesen Werth wieder in Gl. 1 substituirt, giebt:

$$x+\frac{a-b}{2}=a$$

woraus $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$

Beispiel 2.

Sind die Gleichungen gegeben:

1) $ax+by=c$

2) $dx+ey=f$

so multiplicire, um $x$ zu eliminiren, Gl. 1 mit $d$ und Gl. 2 mit $a$

Man erhält

1) $adx+bdy=cd$

2) $adx-aey=af$

I. minus II. giebt $bdy+aey=cd-af$

und hieraus: $y=\frac{cd-af}{bd+ae}$

Eben so multiplicire Gl. 1 mit $e$ und Gl. 2 mit $b$, um $y$ zu eliminiren, wonach man $x$ findet.

Dasselbe Verfahren beobachtet man bei 3 und mehreren Gleichungen mit 3 und mehreren unbekannten Gröfsen.

*C.* Für quadratische Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen hat man folgende einfachsten Fälle:

I. 1) $x+y=a$

2) $xy=b$

1 quadrirt, giebt $x^2+2xy+y^2=a^2$

$4\times$ Gl. 2 „ $+4xy=4b$

1 minus 2 giebt $x^2-2xy+y^2=a^2-4b$

oder $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$

hierzu 1 $x+y=a$

giebt nach *B* Beispiel 1

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

II. 1) $x-y=a$

2) $xy=b$

wie I. 1) $x^2-2xy+y^2=a^2$

$4xy=4b$

$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}$

hierzu $x-y=a$

giebt $x=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2+4b}\right)$

und $y=\frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{a^2+4b}\right)$

III. 1) $x+y=a$

2) $x^2+y^2=b$

1 quadrirt 3) $x^2+2xy+y^2=a^2$

3−2 giebt 4) $2xy=a^2-b$

ferner 5) $4xy=2(a^2-b)$

$\sqrt{3-5}$ $x-y=\pm\sqrt{2b-a^2}$

hierzu $x+y=a$

giebt $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{2b-a^2}\right)$

IV. $x-y=a$

$x^2+y^2=b$

ebenso wie III behandelt, giebt

$$x=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{2b-a^2}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{2b-a^2}\right)$$

V. 1) $x^2+y^2=a$

2) $xy=b$

$2\times$ Gl. 2.: $2xy=2b$

mithin $x+y=\pm\sqrt{a+2b}$

$x-y=\pm\sqrt{a-2b}$

woraus $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}\right]$

oder

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\mp\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}\right]$$

VI. Die Gleichungen

$$x+y=a$$
$$x^2-y^2=b$$

können nicht durch Elimination allein aufgelös't werden. Man substituire daher sogleich $x=a-y$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so hat man

$$(a-y)^2-y^2=0$$

Diese geordnet und aufgelös't, giebt

$$y=\frac{a^2-b}{2a}$$

Diesen Werth in die erste Gl. substituirt, giebt

$$x + \frac{a^2 - b}{2a} = a$$

$$\text{woraus } x = \frac{a^2 + b}{2a}$$

Bei Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade ist daher die nächste Aufgabe, zu beurtheilen, nach welchem Verfahren die Auflösung am leichtesten geschehen kann.

Bei Gleichungen vom dritten und von höheren Graden kann nur in wenigen Fällen eliminirt werden. Z. B.:

VII. 1) $x + y = a$
2) $x^3 + y^3 = b$

Gl. 1 cubirt, giebt

$$x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = a^3$$

hiervon Gl. 3 giebt

$$3xy(x+y) = a^3 - b$$

$$\text{woraus } xy = \frac{a^3 - b}{3a}$$

Diese Gl. verbunden mit Gl. 1, führt zur Auflösung nach Beispiel 1.

**Algebraische Gröfse** ist jede Gröfse, die entweder algebraisch gefunden oder zu Ausführung algebraischer Operationen gegeben worden ist; im Gegensatz von transcendenten Gröfsen, als: logarithmischen, trigonometrischen Gröfsen, Differenzialen und Integralen.

**Algebraische Zeichen** sind die Zeichen, deren sich die Algebra bedient, sowohl um die Gröfsen, mit denen sie operirt, als auch die Art der Operation mit denselben symbolisch darzustellen.

Bekannte Gröfsen werden, wenn sie bestimmt sind, durch die Zahlzeichen, wenn sie unbestimmt sind, durch die Anfangsbuchstaben des Alphabets ausgedrückt ($a$, $b$, $c$.....), unbekannte durch die Endbuchstaben ($s$, $y$, $x$, $w$....)

Gröfsen, die auf gleiche oder ähnliche Weise mit bekannten oder unbekannten verbunden werden, bezeichnet man der leichteren Uebersicht wegen mit denselben Buchstaben und strichelt dieselben. Als:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$ax_,^n + bx_,^{n-1} + cx_,^{n-2} \ \ldots\ldots$$
$$ax_{,,}^n + bx_{,,}^{n-1} + cx_{,,}^{n-2} \ \ldots\ldots$$

u. s. w.

$$ax + by + cz = X$$
$$a'x + b'y + c'z = X'$$
$$a''x + b''y + c''z = X''$$

für die Operationen hat man die folgenden Zeichen:

für die Addition (+) als $a + b$
d. h. $a$ zu $b$ addirt,

für die Subtraction (−) als $a - b$
d. h. $b$ von $a$ subtrahirt,

für die Multiplication (×) oder ein Punkt (·);

auch stellt man die Gröfsen ohne Multiplicationszeichen neben einander, als:

$$a \times b = a \cdot b = ab$$

heifst $a$ mit $b$ multiplicirt.

Das Zeichen für die Division ist (:) oder

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ d. h. } a \text{ durch } b \text{ dividirt.}$$

Das Zeichen für das Potenziiren ist die Wurzel mit dem rechts oberhalb derselben in kleinerem Maafsstabe geschriebenen Exponenten. Als $a^1 = a$

$$a^2 = a \cdot a;\ a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Ebenso $a^n$, $a^{n-1}$ u. s. w.

Das Zeichen für das Extrahiren ist ($\sqrt{}$) (wegen seiner Aehnlichkeit mit dem $r$, $radix$) mit eingeschriebenem Exponenten vor die Potenz gestellt, als $\sqrt[2]{a}$ ist die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt $a$ giebt, so dafs, wenn diese Zahl mit $x$ bezeichnet wird, $x^2 = a$ ist. $\sqrt[3]{b}$ ist die Zahl ($y$), welche 3 Mal mit sich selbst multiplicirt $b$ giebt, also $y^3 = b$. Eben so $\sqrt[m]{a}$; für $\sqrt[2]{a}$ schreibt man auch $\sqrt{a}$

Ein Aggregat von Gröfsen, welches bei irgend einer Operation als eine einfache Gröfse angesehen werden soll, wird in Klammern ( ), [ ], geschlossen. Z. B.

$$a + b \times c + d$$

heifst: multiplicire $b$ mit $c$, und dieses addire zu den Gröfsen $a$ und $d$.

$$(a + b) \times c + d$$

heifst: addire $a$ zu $b$, multiplicire diese Summe mit $c$ und addire dies Product zu $d$.

$$a + (b \times c) + d$$

Hier hat die Klammer gar keine Bedeutung, denn das Product $b \times c$ wird auch ohne die Klammer als einfache Gröfse behandelt

$$(a + b \times c) + d$$

Hier hat die Klammer ebenfalls keine Bedeutung, denn auch ohne dieselbe würde die in der Klammer befindliche Gröfse zu $d$ addirt werden.

$$(a + b)(c + d)$$

heifst: addire $a$ zu $b$, addire $c$ zu $d$ und multiplicire beide Summen mit einander.

$5 + 6 \times 2 + 7$ giebt 24
$(5 + 6) \times 2 + 7$ giebt 29
$(5 + 6) \times (2 + 7)$ giebt 99
$5 + 6 \times (2 + 7)$ giebt 59

$a + b : c$ schreibt man auch $a + \frac{b}{c}$

$(a + b) : c$ desgl. $\frac{a + b}{c}$

indem der Divisionsstrich die Klammer vertritt.

$\sqrt{a}+c$ schreibt man lieber $c+\sqrt{a}$ denn die erste Darstellnng könnte als Schreibfehler für $\sqrt{a+c}$ angesehen werden, nnd $\sqrt{a+c}$ ist gleichbedentend mit $\sqrt{(a+c)}$

$\sqrt{(a+b)}\,(c+d)$ heifst allerdings so viel, als $\sqrt{(a+b)\,(c+d)}$ man vermeidet aber jedenfalls Irrthümer, wenn man die zweite Schreibart wählt, besonders wenn man statt einer strengen Schreibart, wie

$(c+d)\sqrt{a+b}$ die minder strenge

$\sqrt{a+b}(c+d)$ sich angeeignet hat.

Die Algebra bedient sich noch mehrerer Zeicheu, welche die Beziehung von Gröfsen zu einander ausdrücken und welche auch die Geometrie anwendet, als: das Gleichheitszeichen (=), z. B. $a=b$; d. h. $a$ ist gleich $b$;

das Ungleichheitszeichen (>, <)

- $a > b$ heifst: $a$ ist gröfser als $b$, oder $b$ ist kleiner als $a$,
- $a < b$ heifst: $a$ ist kleiner als $b$, oder $b$ ist gröfser als $a$,
- $a \lessgtr b$ heifst: $a$ und $b$ sind einander ungleich; es wird jedoch unbestimmt gelassen, welche Gröfse von beiden die gröfsere oder die kleinere sei.

Das Zeichen 0 für Null, und $\infty$ für nnendlich.

**Albhidade** (arabischer Name). Das an jedem Winkelmefs-Instrument befindliche Lineal, dessen vordere, mit den Dioptern oder der Axe des Fernrohrs in einerlei Ebene befindliche Kante um den Mittelpnnkt des in Grade u. s. w. eingetheilten Kreisringes drehbar ist, so dafs die anf die Visirlinie fallende Theilung genau abgelesen werden kann.

**Aliquoter Theil** der Einheit oder einer Zahl ist ein Theil derselben, der mit einer ganzen Zahl multiplicirt dem Ganzen gleich wird. $\frac{2}{12}$ ist ein a. Th. von 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ n. s. w. also Brüche, deren Zähler $=1$ ist, sind a. Th. der Einheit nnd jeder ganzen Zahl. Eben so ist $\frac{2}{7}$ von $\frac{6}{7}$ ein a. Th.

**Allgemein** ist die Elgenschaft des Inbegriffs einer Mengo von Bestimmten einerlei Art.

Allgemein ist eine Aufgabe, wenn sie die Eigenschaft hat, alle nnr möglichen bestimmten Anfgaben derselben Art in sich zu vereinigen.

Z. B. Eine Zahl $a$ in 2 Theile zn theilen, dafs sich der eine Theil znm andern wie $m$ zu $n$ verhalte, ist die allgemeine Aufgabe für alle bestimmten Aufgaben derselben Art:

Also die Zahl 10 (oder 12, 13, 14, 15 n. s. w.) in 2 Theile zu theilen, dafs sich der eine Theil znm andern wie $1:2$ (oder wie $5:7$; oder wie $11:19$ n. s. w.) verhalte.

Die Anflösnng der allgemeinen Aufgabe ist: die Theile sind $\frac{m}{m+n}\cdot a$ und $\frac{n}{m+n}\cdot a$

Mit dieser allgemeinen Anflösnng sind alle die nachstehendeu bestimmten Aufgaben aufgelös't, wenn man die gegebene zn theilende Zahl für $a$ und die Verhältnifszahlen der Theile für $m$ und $n$ setzt.

Als: 50 in 2 Theile zu theilen, die sich wie $3:2$ verhalten.

Man erhält den einen Theil

$$\frac{3}{3+2}\cdot 50=30$$

den andern Theil $\frac{2}{3+2}\cdot 50=20$

Jede algebraische Formel (s. d.) ist die allgemeine Vorschrift zu einem Verfahren mit bestimmten Zahlen.

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$$

zeigt, wie man die Differenz der Quadrate zweier Zahlen durch eine Multiplication finden kann. Z. B.

$$348^2-347^2=(348+347)\,(348-347)$$
$$=695\times 1=695$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+ab^2\pm b^3$$

sind Vorscbriften, wonach eine zweigliedrige Gröfse durch Summirung znm Quadrat und zum Cubus erboben werden kann. Der binomische Satz:

$$(a\pm b)^n=a^n\pm\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}b$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}b^2\pm\ldots$$

ist eine noch allgemeinere Vorschrift, indem man aufser 2 und 3 noch alle höheren Zahlen für $n$ setzen kann.

Moch allgemeiner als der binomische ist der polynomische Satz.

Dasselbe ist mit den Formeln der Geometrie. Jeder geometrische Satz ist ein allgemeiner nnd hat Geltnng auf alle Linien oder Flächen oder Körper, auf die der Satz lautet. Z. B. der Satz: Dreiecke verbalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe — gilt für Dreiecke von allen nur möglichen bestimmten Dimensionen.

Die Coordinatengleichung für die Ellipse enthält das allgemeine Gesetz der Construction dieser Curve, die allgemeine Coordinatengleichung für sämmtliche Kegelschnitte ist noch allgemeiner, denn sie enthält aufserdem noch das Gesetz der Construction für den Kreis, die Parabel

und die Hyperbel, für alle möglichen bestimmten Parameter.

**Allgemeine Gleichung, Literalgleichung.** Eine Gleichung, in welcher die bekannten Gröfsen in Buchstaben gegeben sind.

**Alligationsrechnung, Alligationsregel.** Lehrt, von zweien zu mischenden Stoffen von gegebenen Werthen die Quantität eines jeden einzelnen Stoffs zu bestimmen, damit eine Mischung von gegebenem Mittelwerth der Einheit entstehe. Die Aufgabe ist:

Zwei Stoffe, $A$ und $B$, deren Einheiten die Werthe $m$ und $n$ haben, so zu vermischen, dafs die Einheit der Mischung den zwischen $m$ und $n$ liegenden Werth $k$ erhält.

Nennt man die Quantitäten der Stoffe zu dem Gemisch für die Gewichts- oder Raum-Einheit $x$ und $y$, so ist der Werth des Gemisches $(x+y)k$

der Werth der einzelnen Stoffe

$x \cdot m + y \cdot n$

also $(x+y)k = xm + y \cdot n$

nun ist $x+y=1$, daher $y=1-x$

mithin erhält man

$k = x \cdot m + (1-x)n$

woraus $x$, die Quantität des Stoffs

$$A = \frac{k-n}{m-n}$$

und $y$, die Quantität des Stoffs

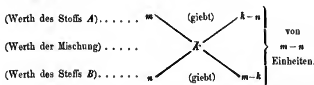
$$B = \frac{m-k}{m-n}$$

Soll die Quantität der Mischung $P$ Einheiten enthalten, so hat man erforderlich

von dem Stoff $A = \frac{k-n}{m-n} P$ Einheiten

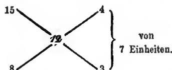
„ „ „ $B = \frac{m-k}{m-n} P$ Einheiten.

Man gieht demnach in einigen Rechenbüchern recht gute praktische Regeln, für welche man folgende bildliche Darstellung wählen könnte:




Beispiel. Es soll aus 15löthigem und 8löthigem Silber 12löthiges gemischt werden.

Man hat:




Zu jeden 7 Loth Mischung sind also 4 Loth 15löthiges und 3 Loth 8löthiges Silber erforderlich, und es sind dann

$4 \times 15 + 3 \times 8 = 7 \times 12 = 84$ (auf 7 Loth).

**Alkoholometer.** Ein Aräometer (s. d.) ausschliefslich zur Bestimmung der Dichtigkeit des Alkohol.

**Almucantharat, Almucantharatskreis, Höhenkreis.** Der auf der Himmelskugel durch einen Stern gelegte, mit dem Horizont des auf der Erdoberfläche befindlichen Standorts parallele Kreis, dessen Pole also das Zenith und das Nadir sind. Gestirne, die in demselben A. sich befinden, haben für den Standort einerlei Höhe und einerlei Scheitel-Abstand. Der Horizont des Orts ist der unterste A., Gestirne darin haben die Höhe = Null und den Scheitel-Abstand (Zenith-Distanz) $= 90°$.

**Alternirende Function** ist bei französischen Mathematikern jede Function mehrerer veränderlichen Gröfsen, in welcher man zwei beliebige derselben mit einander vertauschen kann, ohne dafs sich deren absoluter Werth ändert, wenngleich deren Vorzeichen geändert werden, als:

$$x - y = -(y - x);\ \log x - \log y$$
$$= -(\log y - \log x)$$
$$= \log \frac{x}{y} = -(\log \frac{y}{x}).$$

**Altimeter, Höhenmesser.** Jedes Instrument, mit welchem Höhen gemessen werden können.

**Altimetrie,** Höhenmefskunst.

**Ambe.** Jede Verbindung von je awei Zahlen-Elementen: *ab*, *cd*, 1 • 2; 2 • 1 u. s. w. Die Bezeichnung Ambe ist jedoch vorzugsweise im Lotto gebräuchlich, in der Combinationslehre sagt man Binion.

**Amorphe Körper** (μορφη die Gestalt, α Verneinungssylbe), ungestaltete Körper, im Gegensatz von krystallisirten und krystallinischen Körpern. Erstere entstehen in der Natur durch Sedimente aus Flüssigkeiten, letztere beide, indem sie sich, wenn sie aus dem flüssigen Zustand in den festen übergehen, nach verschieden gelegenen geradlinigen Richtungen formiren.

**Amphiscii** (Zweischattige, eigentlich Amphiskii, von σκια der Schatten). Die Bewohner der heifsen Zone, weil ihr Mittagsschatten bald nördlich, bald südlich fällt; sie heifsen aber auch Ascii (Unschattige, Schattenlose), weil sie den Mittagsschatten der Sonne gröfstentheils unter den Füfsen haben.

**Amplitude,** in der nautischen Sprache s. v. w. Morgen- und Abendweite eines Gestirns (s. letztere).

**Analogischer Beweis.** Ist ein Beweis in Beziehung auf einen ihm vorangegangenen Beweis, der denselben Gegenstand nicht in seiner ganzen Allgemeinheit erfafst hat, indem nun der zweite den ersten erweitert oder vervollständigt. Wenn z. B. erwiesen worden, dafs in einem Vieleck von $n$ Seiten ($n$ eck) mit lauter hohlen Umfangswinkeln die Summe aller nach einerlei Richtung liegenden äufseren Winkel = 4 Rechten ist, und es wird dies Gesetz auch für $n$ ecke mit erhabenen Umfangswinkeln erwiesen, so ist dieser zweite Beweis ein dem ersten a. B.

**Analysis.** Ist die Darstellung und Auflösung einer jeden allgemein gegebenen Rechnungs-Aufgabe. Statt der bestimmten Zahlen wendet sie allgemeine Zahlen an, welche in symbolischen Zeichen, in Buchstaben bestehen, von welchen jeder eine jede beliebige bestimmte Zahl vertritt.

Die A. zerfällt in 2 Haupttheile, in die niedere A. oder die A. des Endlichen, und in die höhere A. oder die A. des Unendlichen.

Die Darstellung und Auflösung der Elementar-Aufgaben, die Grundlage der gesammten A. lehrt die Buchstabenrechnung. Diese zerfällt in 3 Theile: 1) in die 4 Species mit einfachen Buchstabengröfsen, 2) in die 4 Species der Potenzen und Wurzeln von Buchstabengröfsen und 3) in die Entwickelung der Potenzen und Wurzeln in endliche und unendliche Reihen. Sie ist der erste Abschnitt der A., den zweiten Abschnitt bildet die Algebra (s. d.), den dritten und letzten Theil der niedern A. die Wissenschaft von den Functionen, d. h. von zusammengesetzten Gröfsen, deren Werthe von einer oder mehreren veränderlichen Gröfsen abhängig sind. So verschiedenartig solche Abhängigkeiten sind, so verschiedenartige Functionen giebt es.

$$-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\pm x^n$$

ist eine Gröfse in Form einer Reihe, deren Werth von der veränderlichen Gröfse $x$ abhängig ist, und somit eine (algebraische) Function von $x$.

$\log x$; $\cos x$; sind Functionen von $x$, erstere eine logarithmische, letztere eine trigonometrische; beide transcendente Functionen.

Wenn man $-x$ durch $1+x$ dividirt, so erhält man die obige Reihe, also ist:

$$\frac{-x}{1+x}=-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^n$$

Diese Entwickelung eines bestimmten analytischen Ausdrucks in eine unendliche Reihe lehrt die Buchstabenrechnung.

Ist aber die unendliche Reihe gegeben, und man soll dieselbe in einen endlichen Ausdruck verwandeln oder umformen, so reicht die Buchstabenrechnung nicht aus.

Man setze die Reihe:

$$-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\pm x^n=X$$

multiplicire diese Gleichung mit $x$, so erhält man:

$$-x^2+x^3-x^4+\ldots\mp x^n=xX$$

addirt man die untere Reihe zur oberen, so erhält man:

$$-x=X+xX=(1+x)X$$

woraus $x=\dfrac{-x}{1+x}$

Es ist also der Unterschied der Buchstabenrechnung von der Rechnung mit algebraischen Functionen, dafs bei jener die Art der Entwickelung durch eine einfache Rechnungsart vorgeschrieben ist, während bei dieser eine Gleichung dargestellt und aufgelös't werden mufs. Dagegen ist auch zwischen der Behandlung der Functionen und der Algebra der Unterschied, dafs bei dieser aus den algebraischen Gleichungen unbekannte Gröfsen zu entwickeln sind, während bei jener keine Unbekannten gegeben werden, sondern in analytischen Gleichungen veränderliche Gröfsen, die umgeformt werden sollen.

Die A. des Unendlichen besteht aus 2 Theilen, aus der Differenzialrechnung und aus der Integralrechnung. Beide beschäftigen sich mit den Grenzwerthen und Grenzverhältnissen von Functionen, die mit den veränderlichen

Gröfsen, von welchen sie abhangen, als wirklich sich ändernd gedacht werden. Die Differenzialrechnung bestimmt die Grenzverhältnisse von Functionen, wenn diese gegeben sind, die Integralrechnung die Functionen aus gegebenen Grenzwerthen; beide Rechnungen verhalten sich zu einander wie das Potenziiren zum Radiciren.

Die ausführliche Betrachtung der A. des Unendlichen gehört hiernach in die Artikel: Differenzialrechnung und Integralrechnung. Um aber schon hier eine Anschauung von der Wichtigkeit der beiden Rechnungen zu geben, sollen folgende kurze Erläuterungen gegeben werden.

Man denke in und um einen Kreis reguläre Vielecke von gleich viel Seiten beschrieben, das innere hat einen kleineren, das äufsere Vieleck einen gröfseren Inhalt als die Kreisfläche; durch einmalige und wiederholte Verdoppelung der Seiten beider Vielecke wird das äufsere immer kleiner, das innere immer gröfser; allein wenngleich beide Vielecke der Kreisfläche sich auch immer mehr nähern, das äufsere bleibt immer gröfser, das innere immer kleiner als dieselbe, und mithin ist die Gröfse der Kreisfläche der Grenzwerth zwischen beiden Vielecken, dem sich ihre Flächenräume beliebig nähern können.

Wenn man die Function von $x$,

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x}$$

durch wirkliche Division in eine Reihe entwickelt, so erhält man:

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \ldots\ldots x^{n-1}$$

Aus dieser Reihe ersieht man, dafs, wenn man $x$ immer kleiner nimmt, die gesammten, $x$ enthaltenden Glieder in Summe immer kleiner werden müssen, dafs sich also der Werth der Reihe oder der Werth von $y$ dem Werth von $a^{n-1}$ immer mehr nähert. Da nun bei beliebiger Abnahme von $x$ der Werth von $y$ dem Werth $a^{n-1}$ beliebig sich nähern, nie aber geringer werden kann, als $a^{n-1}$, so ist $a^{n-1}$ der Grenzwerth von $y$.

Je näher aber $x$ dem $a$ genommen wird, desto mehr nähert sich das zweite Glied $a^{n-2}x$ dem Werth $a^{n-1}$, das dritte Glied $a^{n-3}x^2$ eben demselben Werth $a^{n-1}$ und so jedes der $n-1$ Glieder, welche $x$ enthalten; es nähert sich also $y$ immer mehr dem Werth $n \cdot a^{n-1}$; und da man die Annäherung von $x$ an $a$ beliebig fortsetzen, $y$ also dem Werth $na^{n-1}$ beliebig nahe kommen kann, ohne jemals diesen Werth zu übersteigen, so ist $na^{n-1}$ ein zweiter Grenzwerth von $y$.

Es sei $y = x^3$.

Aendert sich $x$ um $\triangle x$, so ändere sich $y$ um $\triangle y$. Dann hat man:

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^3 = x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$$

$$\begin{array}{ll} \text{hiervon} & y \qquad = x^3 \\ \text{bleibt} & \triangle y = 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3 \end{array}$$

Diese Gleichung zwischen den Werthen der Aenderungen von $x$ und deren Function $y$ ist also die Differenzengleichung zwischen beiden Functionen.

Um das Verhältnifs zu erkennen, in welchem die Aenderung der Function $y$ zu der Aenderung der Veränderlichen $x$ sich befindet, dividire die Gleichung durch $\triangle x$, so erhält man das Verhältnifs:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3x^2 + 3x \triangle x + \triangle x^2$$

Man nennt ganz naturgemäfs dieses Verhältnifs den Differenzenquotient von $y$ und $x$. Dieser ist, wie die drei Glieder zeigen, nicht nur abhängig von der gegebenen Veränderlichen $x$, sondern auch von deren Aenderung um $\triangle x$; nun ist aber die Gröfse $\triangle x$, um welche $x$ in $x + \triangle x$ umgeändert worden, etwas ganz Beliebiges, Unbestimmtes, von welchem der Differenzenquotient befreit werden mufs, wenn er in bestimmter Relation zu den ursprünglichen Functionen sich befinden soll.

Als solcher ist er also $= 3x^2$.

Dieser, nur von der veränderlichen Gröfse abhängige Differenzenquotient, der für jede Function einer veränderlichen Gröfse bestimmt angegeben werden kann, heifst Differenzial-Quotient, und wird allgemein ausgedrückt durch $\frac{\partial y}{\partial x}$, wo $\partial y$ und $\partial x$ die Differenziale von $y$ und $x$ heifsen.

Aus dem Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3x^2 + 3x \triangle x + \triangle x^2$$

ersieht man zugleich, dafs man dem Werthe $3x^2$ immer näher kommt, je mehr man $\triangle x$ abnehmen läfst, so dafs der Differenzialquotient $3x^2$ der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist.

Die Integralrechnung beschäftigt sich damit, die ursprünglichen Functionen aus gegebenen Differenzialen zu finden.

$$y = \int 3x^2 \cdot \partial x = x^3$$

d. h. das Integral $y$, dessen Differenzialquotient $=$ ist $3x^2$ ist $= x^3$.

**Analysis des Endlichen** s. u. Analysis.

**Analysis des Unendlichen** s. u. Analysis.

**Analytik.** Ist die Analysis als Methode oder Verfahrungsweise bei Erfindung von neuen Sätzen und bei Auflösung von Aufgaben, sowohl für Zahlengrößen, als auch für Raumgrößen. Für die letzteren steht sie der Synthesis gegenüber, welche mit Hülfe geometrischer Constructionen und logischer Schlußfolgen verfährt (s. die folgenden Art.)

**Analytisch.** Alles, was zur Analysis und der Analytik gehört.

**Analytische Auflösung** einer geometrischen Aufgabe ist die Construction einer algebraischen Formel gemäß (lies zuerst: Analytische Geometrie).

Beispiel:

Euklid, 2. Buch, Satz 11. Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie $AB$ so zu schneiden, daß das unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei.

Die im Euklid gegebene Auflösung und der Beweis deren Richtigkeit sind synthetisch.

Die analytische Auflösung dieser Aufgabe ist folgende: Die Linie $AB$ sei $= a$, ein Theil $BH$ derselben setze $= x$, so ist das Rectangel unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte entweder $ax$

Fig. 46.




oder $a(a-x)$. Das Quadrat des zweiten Abschnitts entweder $(a-x)^2$ oder $x^2$. Für die erste Bezeichnung erhält man die algebraische Gleichung:

$$ax = (a-x)^2$$

woraus $x^2 - 3ax + a^2 = 0$

und $x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$

Für die zweite Bezeichnung erhält man die Gleichung:

$$a(a-x) = x^2$$

woraus $x^2 + ax - a^2 = 0$

und $x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$

Bis hierher ist die Auflösung algebraisch. Allein es soll die Theilung der Linie gefunden und diese Theilung einer algebraischen Formel gemäß construirt werden. Demnach nehme man eine der beiden auf 0 reducirten Gleichungen. Z. B.

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

und schreibe für $x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$

$$x = +\frac{3a}{2} - \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$$

so hat man in dem ersten Gliede die Linie $AB$ + der Hälfte derselben und in dem zweiten Gliede die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse das erste Glied $\frac{3}{2}a$ und dessen andere Kathete die Linie $a = AB$ ist.

Demnach hat man für die Construction folgende Vorschrift: Halbire die gegebene $AB$ in $C$, verlängere $AB$ nach einer Seite, nimm $BD = BC$, so ist $AD = \frac{3}{2}a$. Halbire $AD$ in $E$, beschreibe über $AD$ den Halbkreis $AFD$, beschreibe aus $A$ mit $AB$ den Bogen $BF$, so ist die gerade Linie von $A$ nach $F = a$, folglich die Linie $DF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - a^2}$. Beschreibt man nun aus $D$ mit $DF$ den Bogen $FH$, so ist $DH = DF$ und $AH = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$ folglich $GH$, das Rectangel $AB + AG = HI$ dem Quadrat von $BH$.

Fig. 47.




Legt man die zweite Gleichung der Construction zu Grunde, nämlich:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

so erhält man:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Das zweite Glied ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $a$ und $\frac{1}{2}a$ sind, das erste Glied die halbe Seite $a$.

Demnach hat man folgender Art zu construiren. Halbire $AB$ in $C$, errichte in $B$ das Loth $BD = BC$ auf $AB$, ziehe

$AD$, so ist $AD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Beschreibe aus $D$ den Bogen $BE$ mit $BD$, so ist $DE = \frac{1}{2}a$ und $AE = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

Fig. 48.




Beschreibt man nun den Bogen $EH$ aus $A$ mit $AE$, so ist $H$ der Theilpunkt und das Quadrat über $AH$ = dem Rectangel aus $AB = BF$ und $BH$. (S. analytische Geometrie.)

**Analytischer Beweis.** Ein Beweis, bei welchem man von der Schlußfolge des Satzes ausgeht und Rückschlüsse macht, bis man auf einen vorher erwiesenen Satz kommt. Der a. B. dient besonders, um von der Richtigkeit von Behauptungen sich zu überzeugen. Der a. B. eines geometrischen Satzes geschieht mit Hülfe von analytischen Gleichungen.

Beispiel. Euklid, 2. Buch, Satz 9. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie $AB$ bei $C$ in gleiche und bei $D$ in ungleiche Stücke geschnitten, so sind die beiden Quadrate

Fig. 49.



der ungleichen Stücke $AD$, $DB$ doppelt so groß, als die beiden Quadrate der Hälfte $AC$ und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks $CD$.

Der Satz ist im Euklid synthetisch bewiesen. Gesetzt, man wollte sich von der Wahrheit des Satzes überzeugen, und scheute die Durchlesung des langen Euklidischen Beweises, so kann dies analytisch folgender Art geschehen.

Man bezeichne das Stück $AD$ der Linie $AB$ mit $a$, das Stück $DB$ mit $b$, so hat man die Quadrate dieser ungleichen Stücke $a^2$ und $b^2$. Die ganze Linie ist nun $a+b$, deren Hälfte also $\frac{a+b}{2}$, das Quadrat derselben $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, und beide Quadrate der Hälfte sind $= 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Nun ist noch das Quadrat des Stücks $DC$ auszudrücken.

Es ist aber $AC = \frac{a+b}{2}$, $AD = a$, daher $DC = AC - AD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$, das □ von $DC = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ und das Doppelte desselben $= 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

Ist nun der Satz richtig, so muß folgende analytische Gleichung richtig sein.

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

wie sich aus der Anflösung der Klammergrößen auch ergiebt.

**Analytische Formel.** Ist eine Formel, welche eine Vorschrift enthält zur Entwickelung einer zusammengesetzten Größe in ihre Bestandtheile, als: in Summanden, Factoren, in eine endliche oder unendliche Reihe, als:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2 \cdot 4a^3} - \frac{x^6}{2 \cdot 2 \cdot 4a^5} - \ldots - \frac{x^{2(n-1)}}{2^{2(n-1)} \cdot 4a^{2n-3}} \text{ oder auch}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4a^3} - \frac{1 \cdot 3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6x^5} - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2-5)\, x^{2(n-1)}}{2[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)]\, a^{2n-3}}$$

**Analytische Geometrie** ist derjenige Theil der Geometrie, welcher sich damit beschäftigt, aus algebraischen Entwickelungen geometrische Constructionen abzuleiten (vergl. analytische Auflösung).

I. Wenn jeder Buchstab in den nachstehenden Ausdrücken eine Linie bezeichnet, so sind die Elementar-Constructionen in folgenden Ausdrücken gegeben.

1) $a + b$

ist die Summe zweier gegebenen geraden Linien $a$ und $b$, welche in eine Linie von

der Länge $(a+b)$ zusammengesetzt werden sollen.

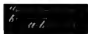
Fig. 50.



2) $a-b$

ist die Differenz zweier gegebenen geraden Linien $a$ und $b$; die zu construirende Linie soll deren Unterschied $(a-b)$ zur Länge erhalten.

Fig. 51.



3) $\frac{a \times b}{c}$

ist die vierte geometrische Proportionale zwischen den gegebenen 3 Linien $a$, $b$ und $c$. Nennt man diese $x$, so hat man

$$c : a = b : x$$

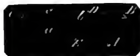
Man hat also für $x$ folgende Construction. Zeichne einen beliebigen Winkel $ACB$, trage auf einem der Schenkel z. B. $CB$ vom Scheitelpunkt aus die im

Fig. 52.



Nenner stehende Linie $c = CD$ ab, auf demselben Schenkel von dem Endpunkt $D$ ab, wie Fig 52, oder ebenfalls vom Scheitelpunkt ab, wie Fig. 53: die Länge einer der beiden im Zähler stehenden

Fig. 53.



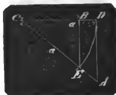
Linien z. B. $b$, Fig. 52 $= DB$, Fig. 53 $= CB$; dann auf dem anderen Schenkel $CA$ vom Scheitelpunkt $C$ ab, die zweite Linie $a$ des Zählers $= CE$, ziehe die gerade Linie $DE$, und aus $B$ die gerade Linie $BA \# DE$, bis sie den Schenkel $CA$ in $A$ trifft oder schneidet, so ist $EA$ in Fig. 52 oder $CA$ in Fig. 53 $= x$, d. h. $= \frac{ab}{c}$

4) $\frac{a^2}{b}$

ist die dritte geometrische Proportionale zwischen $b$ und $a$. Nennt man diese $x$, so hat man

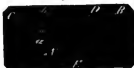
$$b : a = a : x$$

Fig. 54.



Die Construction ist wie für 3. Man nimmt am einfachsten die Linien $a$ und $b$ vom Scheitelpunkt ab, fängt mit der Linie $b$ des Nenners an, nimmt diese $= CB$, trägt $a$ nach $CD$, beschreibt aus

Fig. 55.

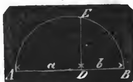


$C$ den Bogen $DE$, so dafs auch $CE = a$ wird, zieht $BE$ und aus $D$ die Linie $DA \# BE$, so ist $CA = x = \frac{a^2}{b}$

5) $\sqrt{a \cdot b}$

ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den gegebenen Linien $a$ und $b$. Zeichne eine gerade Linie $AB$, nimm

Fig. 56.

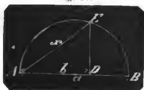


$AD = a$, $DB = b$, halbire $AB$ in $C$, beschreibe aus $C$ über $AB$ einen Halbkreis, errichte in $D$ auf $AB$ das Loth $DE$, bis sie die Kreislinie schneidet, so ist

$$DE = \sqrt{ab}$$

Oder zeichne über die gröfsere $a = AB$ von beiden gegebenen Linien einen Halbkreis, nimm von einem der Endpunkte,

Fig. 57.




z. B. von $A$ aus, $AD = b$, errichte bis zum Halbkreis das Loth $DE$, ziehe $AE$, so ist

$$AE = \sqrt{a \cdot b}$$

6) $\sqrt{a^2 + b^2}$

ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $a$ und $b$ die Katheten sind. Zeichne also einen rechten $\angle ACB$, nimm $AC = a$, $CB = b$, so ist

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fig. 58.




7) $\sqrt{a^2 - b^2}$

ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $a$ die Hypothenuse und $b$ die andere Kathete ist. Zeichne also

Fig. 59.



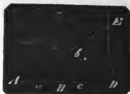

einen rechten $\angle ACB$, nimm auf einem Schenkel, z. B. $CB$ von $C$ aus, das Stück $CD = b$, schneide von $D$ aus mit der Zirkelöffnung $= a$ den anderen Schenkel $A$ in $E$, so ist

$$CE = \sqrt{a^2 - b^2}$$

8) $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ac}$

ist die in einem stumpfwinkligen Dreieck dem stumpfen $\angle$ gegenüber liegende Seite, wenn $a$ und $b$ die beiden anderen Seiten und $c$ die Projection von $b$ auf $a$ ist. Zeichne daher eine gerade Linie $AD$, nimm auf derselben $AB$ gleich derjenigen von beiden Seiten $a$ und $b$, welche in

Fig. 60.



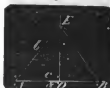

dem dritten Gliede als Factor steht, hier also $= a$, und in deren Verlängerung $BD$ = der Länge $c$, errichte in $D$ auf $AD$ ein Loth und schneide dasselbe von $B$ aus mit der Zirkelöffnung der gegebenen zweiten Länge $b$ in $E$, ziehe $AE$, so ist

$$AE = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ac}$$

9) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ac}$

ist die einem spitzen $\angle$ gegenüber liegende Seite eines Dreiecks, in welchem $a$ und $b$ die beiden anderen Seiten desselben sind und $c$ die Projection von $b$ auf $a$

Fig. 61.




ist. Zeichne daher eine gerade Linie $AB$ = derjenigen von beiden Seiten, welche in dem dritten Gliede als Factor steht, hier also $= a$, nimm darauf $AD = c$, errichte in $D$ ein Loth auf $AB$, schneide dasselbe von $A$ aus mit der Zirkelöffnung = der anderen Seite $b$ in $E$, zeichne $BE$, so ist

$$BE = \sqrt{a^2 + b^2 - ac}$$

II. Die in der algebraischen Geometrie gefundenen Formeln für bestimmte Linien sind zur unmittelbaren Construction nicht geeignet.

**Beispiel 1.** Für die Diagonale eines Quadrats von der Seite $a$ erhält man $a\sqrt{2}$

Soll construirt werden, so ist die Formel nmzuändern. Schreibe

$$a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

und es ist nnn nach Formel 6 zn construiren.

Beispiel 2. Man erhält für die Seite des regulären Dreiecks im Kreise bei gegebenem Halbmesser $r$ die Formel $r^2\sqrt{3}$

Schreibe

$$r^2\sqrt{3} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}$$

nnd man construirt nach Formel 7.

Beispiel 3. Man erhält für die Seite des regulären Fünfecks im Kreise, wenn der Halbmesser $= r$ gegeben ist, die Formel

$$r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \text{ Schreibe } \sqrt{r^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{r \cdot \frac{5r - r\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{r \cdot \frac{5r - \sqrt{5r^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{r \cdot \left(\frac{5}{2} r - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 - r^2}\right)}$$

Nun ist $\frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ (nach Beispiel 2) die halbe Seite des regulären Dreiecks. Diese abgezogen von $2\frac{1}{2}r$, giebt die Klammergröfse als Linie, wird diese $= p$ gesetzt, so hat man die Seite des Fünfecks $\sqrt{rp}$, also die mittlere geometrische Proportionale zwischen $r$ nnd $p$, welche nach 5 construirt wird.

**Analytische Gleichung.** Ist die Gleichsetzung zweier algebraischer gleichen Ausdrücke von verschiedener Form. Man wendet sie an, nm analytische Formeln (s. d.) an entwickeln. Z. B.

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a \pm 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2} \times \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{a \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{4}}} = \sqrt{a \pm b}$$

Man hat also die Formel erhalten:

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

**Analytische Mechanik** ist der Theil der M., in welchem mit Hülfe der Analysis Sätze entwickelt nnd Aufgaben aufgelöst werden.

**Analytische Methode** ist das Verfahren, auf analytischem Wege Sätze zn finden nnd Aufgaben zu lösen, indem nämlich der Zusammenhang des Bekannten nnd Unbekannten oder Veränderlichen als Gleichung aufgestellt und dadurch entwickelt wird, dafs Unbekanntes und Veränderliches wie Bekanntes behandelt wird. Bei Auffindnng oder Prüfung eines Satzes stellt man die Gleichung so auf, als wenn der Satz schon als wahr erwiesen wäre (s. analytischer Beweis). Bei Auflösnng von Aufgaben stellt man die Gleichung auf, als wenn die Auflösung schon gefunden wäre (s. analytische Auflösnng).

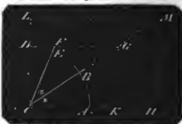
**Analytische Trigonometrie.** 1) Ist der Theil der Trigonometrie, welcher von der Entstehnng der trigonometrischen Fnnctionen durch geometrische Construction ganz absieht, welche aus denselben Formeln entwickelt nnd rechnnngsweise mit denselben verfährt.

Um z. B. die Formel

$$cot\,(2\,\alpha) = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}$$

zu finden, kann man folgender Art synthetisch verfahren:

Fig. 62.




Man zeichne $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibe aus $C$ mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen $ABE$, vollende den Qnedrant $ACD$, errichte das Loth $DG$ auf $CD$ bis in die Richtung $CB$, verlängere $CE$ bis $F$ in $DG$, fälle das Loth $GK$ auf die verlängerte $CA$, zeichne aus $C$ mit $CK$ den Quadrant $KL$, ziehe die mit $DG$ Parallele $LM$ bis in die verlängerte $CB$ nnd fälle das Loth $MH$ auf die verlängerte $CK$, so hat man

$$\angle\alpha = \angle GCK = \angle FCG = \angle FGC$$

$$\text{daher} \quad FG = FC$$

da nnn $\angle CDF = R$, also $\angle CFG$ stnmpf ist, so ist

$$CG^2 = FG^2 + FC^2 + 2FG \cdot DF$$
$$= 2FG^2 + 2FG \cdot DF$$

oder

$$DG^2 + CD^2 = 2FG \cdot (FG + DF)$$
$$= 2FG \cdot DG$$
$$= 2(DG - DF) \cdot DG$$
$$= 2DG^2 - 2DF \cdot DG$$

also

$$CD^2 = DG^2 - 2DF \cdot DG$$

oder

$$DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG \qquad \text{I}$$

Es ist aber $CD:DG = CL:LM$
und da $CL = CK = DG$
auch $CD:DG = DG:LM$
oder $DG^2 = CD \cdot LM$
Diesen Werth in I gesetzt,
giebt $CD \cdot LM - CD^2 = 2DF \cdot DG$
oder $CD \cdot (LM - CD) = 2DF \cdot DG$
oder $2DG:LM - CD = CD:DF$ II

Nun ist $DG = \cot\alpha$
$LM = CL \cdot \cot\alpha = CK \cdot \cot\alpha$
$= DG \cdot \cot\alpha = \cot\alpha \cdot \cot\alpha$
$= \cot^2\alpha$
$CD = AC = 1$
und $DF = \cot(2\alpha)$
daher entsteht durch Substitution dieser Werthe in II die Proportion:

$$2\cot\alpha : (\cot^2\alpha - 1) = 1 : \cot(2\alpha)$$

oder $\cot(2\alpha) = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

2) Analytisch verfährt man dagegen zur Auffindung derselben Formel etwa folgender Art:

Synthetisch erwiesen ist
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
desgl. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Schreibt man in beiden Formeln $\alpha$ für $\beta$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Dividirt man die untere Gleichung durch die obere, so erhält man

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Dividirt man in dem Bruch zur Rechten des Gleichheitszeichens Zähler und Nenner durch $\sin^2\alpha$, so erhält man

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1}{2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Nun ist aber synthetisch erwiesen

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Mithin hat man

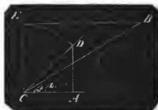
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

3) Aber auch wie bei der analytischen Geometrie kann man nach gegebenen Formeln construiren:

Z. B. es sind die beiden Winkel $\alpha$, $\beta$ und die Länge $b$ gegeben, man soll die Linie $b \sec\alpha \operatorname{cosec}\beta$ zeichnen:

Zeichne $\angle ACB = \beta$, $\angle ACD = \alpha$, trage auf dem gemeinschaftlichen Schenkel $AC$ vom Scheitel $C$ aus das Stück $CA = b$ ab, errichte in $A$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von $\alpha$ das Loth $AD$, und im Scheitel $C$ ein Loth $CE$ auf denselben Schenkel $CA$, zeichne aus $C$ den Bogen $DE$, und ziehe aus $E$ die mit $AC$ parallele Linie $EB$ bis in die Richtung

Fig. 63.




des zweiten Schenkels von $\beta$, so ist das dadurch abgeschnittene Stück desselben, nämlich $BC$ die verlangte Linie $b \sec\alpha \operatorname{cosec}\beta$, denn es ist $CD$, also auch $CE = AC \sec\alpha = b \sec\alpha$, und $BC = CE \operatorname{cosec}\beta = b \sec\alpha \operatorname{cosec}\beta$.

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelös't, die Linie $b\dfrac{\sec\alpha}{\sin\beta}$ zu zeichnen.

**Anfangsglied** ist das erste Glied einer Proportion oder einer Reihe.

**Anfangspunkt** der Abscissen und A. der Coordinaten s. u. Abscisse.

**Angewandte Mathematik.** Die Anwendung der reinen Mathematik auf die Natur.

Während die reine Mathematik in ihrem arithmetischen Theil die Einheit und die Vielheit, in ihrem geometrischen Theil die Ausdehnung im Raume zu Elementen aller ihrer Untersuchungen und Erkenntnisse hat, so sind für die a. M. ebenfalls zwei Elemente, auf welche die Erkenntnisse der reinen Mathematik übertragen werden: 1) Das Belebende und Bewegende der Natur, die Kraft, und 2) das Leidende, das Raum-Erfüllende, der Stoff, an welchem die Kräfte ihre Wirkungen ausüben.

Mehrere Kräfte gemeinschaftlich können so wirken, dafs ein System von Naturkörpern in dem Zustande verbleibt, als wenn die Kräfte nicht vorhanden wären, oder so, dafs das System den Zustand ändert. Im ersten Fall ist Gleichgewicht, im zweiten aufgehobenes Gleichgewicht. Die a. M. hat also 2 Haupttheile: die Erkenntnifs der Gesetze für Kräfte im Gleichgewicht, die Statik, und die für Kräfte bei aufgehobenem Gleichgewicht, die Mechanik.

Die Cohäsions-Verhältnisse des Stoffs scheiden die Naturkörper in 3 Aggregatzustände, in feste, tropfbar flüssige und

luftförmige Körper. Man hat also eine Statik fester Körper, die Geostatik, eine Statik tropfbar flüssiger Körper, die Hydrostatik, und eine Statik luftförmiger Körper, die Aërostatik, und desgleichen eine Geomechanik, eine Hydromechanik, Hydrodynamik oder Hydraulik und eine Aëromechanik, Aërometrie oder Pneumatik. Außer den genannten Theilen der a. M., welche man mit dem gemeinschaftlichen Namen dynamische Wissenschaften benennt, hat man noch zur a. M. gehörig die Astronomie und die optischen Wissenschaften.

**Angewandte Mechanik** ist die Anwendung der reinen M. der Phoronomie auf die Bewegung der Naturkörper mit Rücksicht auf die Kräfte, welche deren Bewegung veranlassen.

Während die reine M. nur den Zusammenhang der Bewegung (Ortsänderung) eines materiellen Punkts in Beziehung auf den Raum, den er durchläuft (den Weg), und die Zeit (die Geschwindigkeit) betrachtet, kommt bei der a. M. noch die Vorstellung des Stoffs (der Materie) und der Summe der materiellen Theile eines Körpers (dessen Masse) zur Betrachtung hinzu.

**Angriffspunkt,** der Punkt an einem Hebel, wo die Kraft oder der Widerstand angebracht ist; ersterer heifst A. der Kraft, letzterer A. der Last.

**Angulaire Befestigung.** Die Befestigung eines Platzes der Art, dafs die äufseren, den Umrifs bildenden Wall-Linien aus lauter geraden unter Winkeln zusammenstofsenden Linien bestehen, im Gegensatz zu circulairer B., wo der Umrifs aus einer einzigen Kreislinie oder aus mit einander zusammenhangenden Kreisbogen besteht.

**Anisometrisches Krystallisationssystem** (ανισος ungleich und μετρον Ausdehnung). Das 4te System, das ein und einaxige System, bei welchem 3 unter einander gleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden.

**Anlagen.** Alle für fortificatorische Bauwerke auf dem Horizont zu nehmenden Abmessungen. Dossirungen der Aufsenflächen von Futtermauern, Brustwehren etc. werden nach dem Verhältnifs bestimmt, welches die abzulothende wagerechte Entfernung zwischen der Ober- und Unterkante der dossirten Fläche (die Breite der Dossirung) zur Höhe derselben hat. Beträgt bei einer 8 Fufs hohen Mauer die Breite der Dossirung 1 Fufs, so ist die Dossirung $\frac{1}{8}$; man sagt $\frac{1}{8}$ der Höhe zur Anlage, oder $\frac{1}{8}$ Anlage. Böschungen von 45° bei Erdwällen haben ganze Anlage.

**Anlauf** bei einer Brustwehr. Die von dem Ban-Horizont nach dem Banquet, dem Aufstellungsort der Vertheidiger schräg aufsteigende Fläche, wenn das Banquet über dem Horizont so hoch liegt, dafs es nicht erstiegen werden kann. Statt des A. werden auch Stufen angelegt.

**Anliegende Seite** in einer Figur ist in Beziehung auf einen Umfangswinkel derselben jede der beiden Seiten der Figur, welche die Schenkel des Winkels bilden; spricht man von beiden, einem Winkel anliegenden Seiten, so nennt man sie den Winkel einschliefsende Seiten.

**Anliegender Winkel.** 1) Der Umfangswinkel einer Figur in Beziehung auf eine Seite derselben, wenn diese Seite der Schenkel des Winkels ist; jede Seite einer Figur hat also zwei a. W., in einem Dreieck hat jede Seite zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel.

2) Verlängert man eine Seite *BC* eines Dreiecks *ABC*, so entsteht der Aufsen-

Fig. 64.




winkel *ACD*, dessen Nebenwinkel *ACB* heifst sein innerer a. W., die beiden anderen Winkel *ABC* und *BAC* seine inneren gegenüber liegenden Winkel.

3) Wenn 2 gerade Linien *AB*, *CD* von einer dritten geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, 4 innere und 4 äufsere

Fig. 65.

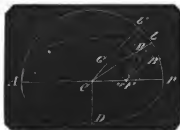



Winkel; jeder derselben heifst der a. W. seines Nebenwinkels; so ist *β* der innere

a. W. von $\alpha$ und von $\delta$: $\gamma$ ist der äufsere a. W. von $\delta$ und von $\alpha$. (Vergl. Aeufsere Winkel, 1).

**Anomalie** (Ungleichmäfsigkeit, Ungleichförmigkeit in der Bewegung der Planeten um die Sonne) ist der augenblickliche Ort eines Planeten in seiner Bahn, in dem er sich wirklich befindet (wahre oder scheinbare A.), oder der Ort, in dem er sich befinden würde, wenn er regelmäfsig sich bewegte (mittlere A.). Beide Orte werden durch bestimmte Winkel angegeben, und diese Winkel die A. des Planeten genannt. Gesetzt, in $S$ befinde sich die Sonne, $ABPD$ sei die elliptische Bahn des Planeten um dieselbe, $AP$ die Absidenlinie (s. d. u. Absiden),

Fig. 66.




$P$ das Perihelium, $A$ das Aphelium, in $B$ befinde sich der Planet, so ist $\angle BSP$, der $\angle$ nämlich, den der Radius vector $BS$ mit der Absidenlinie nach dem Perihelium hin bildet, die wahre oder scheinbare A. des Planeten für den Augenblick seines Standorts $B$.

Bewegt sich der Planet von $P$ über $B$, $A$, $D$ wieder nach $P$, so ist in $P$ seine gröfste, in $A$ seine geringste Geschwindigkeit, und die Zeit, welche er zu diesem Umlauf gebraucht, ist sein Jahr, und zwar sein siderisches, wenn der Punkt $P$ als unverrückbar gedacht wird. Würde nun der Planet durch die Ellipse während derselben Zeit sich gleichförmig bewegen, so wäre sein Ort in demselben Augenblick, wo er in $B$ wirklich sich befindet, zwischen $P$ und $B$, etwa in $B'$, und der $\angle B'SP$ heifst die mittlere A. des Planeten, der Unterschied beider $\angle$, nämlich $\angle BSB'$ die Gleichung des Mittelpunkts, indem in der Astronomie unter Gleichung so viel wie Ausgleichung verstanden wird. Kennt man den Augenblick, in welchem der Durchgang des Planeten durch das Perihel stattgefunden hat, und die Länge des Jahres, so kann man für jeden Zeitaugenblick die mittlere A. finden, indem die Länge des Bogens $PB'$ zur Länge der ganzen elliptischen Bahn sich verhält, wie die auf den Weg durch den Bogen $PB'$ verflossene Zeit zu der des ganzen Jahres, und weil $\angle B'SP$ von dem Bogen $PB'$ abhängig ist.

Um aus der gegebenen mittleren A. $= \angle PSB'$ die wahre A. $= \angle BSP$ zu finden (das Keppler'sche Problem) oder aus der wahren die mittlere A. zu finden (das umgekehrte Keppler'sche Problem), ist also die Reduction von Längen elliptischer Bogen auf Winkel erforderlich, und da es doch nur darauf ankommt, das Verhältnifs zu finden, in welchem die Zeit des Durchlaufs eines elliptischen Bogens zu dem der ganzen Ellipse steht, so erhält man diese einfacher, wenn man für die mittlere A. den excentrischen Kreis und dessen Bogen in Rechnung bringt.

Zeichnet man nämlich aus dem Mittelpunkt $C$ der Ellipse mit der halben grofsen Axe den Kreis und denkt sich diesen excentrischen Kreis als von dem Planeten gleichförmig durchlaufen, so hat man, wenn $t$ die Zeit bedeutet, in welcher der Planet von $P$ wirklich nach $B$ gekommen ist, $T$ die Zeit des siderischen Jahres und $b$ den Punkt in dem excentrischen Kreise, nach welchem von $P$ aus der Planet in derselben Zeit $t$ bei gleichförmiger Bewegung gekommen wäre:

$t : T = \text{Bogen } bP : \pi AP = \angle bCP : 360^\circ$

Aus diesem Grunde nennt man auch wohl, wenn $b$ und $B$ zusammen gehören, Bogen $Pb$ oder $\angle PCb$ die mittlere A.

Desgleichen kann man den Sector $bCP$ die mittlere A. nennen, wenn man ihn auf die Fläche des excentrischen Kreises $(K) = \pi \cdot CP^2$ als Einheit bezieht. Nach dem zweiten Keppler'schen Gesetz bewegt sich jeder Planet der Art, dafs in gleichen Zeiten von dem Radius vector gleich grofse elliptische Sectoren durchlaufen werden. Demnach ist auch der von $P$ nach $B$ von dem Radius vector durchlaufene Sector $BSP$ die mittlere A., wenn man diesen auf die elliptische Ebene $(E) = \pi \cdot CP \cdot CD$ als Einheit bezieht.

Es ist also die mittlere A. $= \dfrac{\text{Bog. } PB'}{PBADP}$

$$= \frac{\text{Sect. } BSP}{\pi \cdot CP \cdot CD} \text{ oder } \frac{\text{Sect. } BSP}{E} = \frac{Pb}{\pi \cdot AP}$$

$$= \frac{\text{Sect. } bCP}{\pi \cdot CP^2} \text{ oder } \frac{\text{Sect. } bCP}{K} = \frac{\angle bCP}{360^\circ}$$

Die directe Auflösung der beiden gedachten Keppler'schen Probleme führt auf eine transcendente Gleichung. Man vermeidet dieselbe durch Einführung einer

Hülfsgröfse, der excentrischen Anomalie. Fällt man nämlich von dem wahren Ort $B$ des Planeten das Loth $BF$ auf die Absidenlinie, verlängert dieses, bis es die excentrische Kreislinie in $b'$ trifft, zieht den Halbmesser $b'C$, so heifst $\angle b'CP$ die excentrische A. des Planeten.

Sämmtliche A. werden vom Perihel $P$ ab bis 360° gezählt und gemessen.

Es sei nun wieder $S$ die Sonne, $B$ der Ort eines Planeten, mithin $\angle BSP$ die wahre A. Um aus dieser die mittlere A. zu finden, construire den excentrischen Kreis, fälle das Loth $BF$, verlängere es bis $b'$, ziehe $b'C$, fälle die Normale $SG$ auf $b'C$, nimm Bogen $b'b = SG$, so ist $\angle bCP$ die zu dem wahren Ort $B$ des Planeten gehörende mittlere A.

Denn $\triangle b'CS = \frac{1}{2} b'C \times SG$

$$\text{Sect}\, b'Cb = \tfrac{1}{2} b'C \times \text{Bog.}\, b'b = \tfrac{1}{2} b'C \times SG$$

mithin $\triangle b'CS = \text{Sect.}\, b'Cb$

beide von Sect. $b'CP$ abgezogen, giebt

$$1)\ \text{Sect.}\, b'SP = \text{Sect.}\, bCP$$

Bezeichnet man nun die Zeit des siderischen Jahres, in welchem der Planet die ganze Ellipse durchläuft, mit $T$, die Zeit, in welcher er den Bogen $PB$ durchlaufen hat, mit $t$, so ist

$$2)\ T : t = E : \text{Sect.}\, BSP$$

Es ist aber:

$$K : E = CP : CD = Fb' : FB$$

$$CP : CD = \text{Abschn.}\, b'FP : \text{Abschn.}\, BFP = \triangle b'SF : \triangle BSF$$

$$CP : CD = \text{Abschn.}\, b'FP + \triangle b'SF : \text{Abschn.}\, BFP + \triangle BSF$$

$$3)\ K : E = \text{Sect.}\, b'SP : \text{Sect.}\, BSP$$

mithin nach Gl. 1

$$K : E = \text{Sect.}\, bCP : \text{Sect.}\, BSP$$

oder durch Umstellung

$$K : \text{Sect.}\, bCP = E : \text{Sect.}\, BSP$$

mithin nach 2:

$$T : t = K : \text{Sect.}\, bCP$$

woraus hervorgeht, dafs $\angle bCP$ oder Sector $bCP$ die mittlere A. ist.

Aus der wahren A. die mittlere A., oder die Auflösung des umgekehrten Keppler'schen Problems durch Zeichnung zu finden, hat keine Schwierigkeiten, dagegen kann das Keppler'sche Problem, die wahre A. aus der mittleren A. durch Zeichnung aufzulösen, nur näherungsweise geschehen. Wenn nämlich die Punkte $b$, $P$, $S$, $C$ für die mittlere A. $= \angle bCP$ gegeben sind, so nimmt man statt des Bogens $bb'$ dessen Sinus, der um so näher demselben kommt, je geringer die Excentricität der Bahn ist; man ziehe demnach $bS$ und aus $C$ die Linie $Cb' \mathrel{\#} bS$, so erhält man näherungsweise den Punkt $b'$ und durch das Loth $b'F$ auch näherungsweise den Punkt $B$ durch Zeichnung.

Um die wahre A. $= PB$ aus der mittleren A. $= Pb$ oder diese aus jener durch Rechnung zu finden, setze man $CP = Cb' = a$; $CD = b$; $CS = e$, so ist

$$Pb = Pb' - bb' = Pb' - SG$$

$$\text{oder I}\quad Pb = Pb' - e \sin Pb'$$

Es ist ferner

$$SF = CF - CS = a \cos Pb' - e$$

und $SB^2 = BF^2 + SF^2 = BF^2 + (a \cos Pb' - e)^2$

und $CP : CD = b'F : BF$

oder $a : b = a \sin Pb' : BF$

woraus $BF = b \sin Pb'$

daher

$$SB^2 = b^2 \sin^2 Pb' + (a \cos Pb' - e)^2$$
$$= b^2 \sin^2 Pb' + a^2 \cos^2 Pb' + e^2 - 2ae \cos Pb'$$
$$= b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 Pb' - 2ae \cos Pb' + e^2$$

Zieht man $SD$, so ist diese $= CP = a$, daher

$$CS^2 = e^2 = a^2 - b^2 \text{ daher}$$

$$SB^2 = a^2 + e^2 \cos^2 Pb' - 2ae \cos Pb'$$

folglich $SB = a - e \cos Pb'$

Nun ist $SF = SB \cos PSB$

$$\text{daher II}\quad \cos PSB = \frac{SF}{SB} = \frac{a \cos Pb' - e}{a - e \cos Pb'}$$

und hieraus

$$\text{III}\quad \cos Pb' = \frac{e + a \cos PSB}{a + e \cos PSB}$$

Wenn also die wahre A. $= \angle PSB$ gegeben ist, so findet man die excentrische A. $= Pb'$ aus Formel III, und aus dieser nach Formel I ganz genau die mittlere $Pb$, weil Bogen $bb' = SG = e \sin Pb'$ ist. Ist aber die mittlere A. $= Pb$ gegeben, so hat man durch Gleichung I $Pb'$ aus $Pb$ zu finden, eine transcendente Gleichung, bei welcher nur probirt werden kann; hat man $Pb'$ möglichst nahe erhalten, so setze dessen Werth in Gl. II, woraus man dann unmittelbar die wahre A. $= PSB$ erhält.

**Anomalistischer Monat.** Die Zeit, in welcher der Mond von einer Erdnähe (Perigeum) oder einer Erdferne (Apogeum) bis zum Wiedereintritt in dieselbe einen Umlauf vollendet, er beträgt 27 Tg. 13 Std. 18 Min. 37,4 Sec.

**Anomalistisches Jahr.** Die Zeit, in welcher ein Planet von dem Eintritt in das Aphel oder Perihel bis zu dem nächstfolgenden seinen Umlauf vollendet. Das der Erde ist etwas gröfser als deren tropisches Jahr und beträgt 365 Tg. 6 Std. 14′ 23″. Die Ursache dieser Vergröfserung liegt darin, dafs die Sonnennähe und die Sonnenferne nicht auf constanten Punkten der Erdbahn verbleiben, sondern jährlich um 11,8 Bogensecunden von Westen nach Osten fortrücken. Da nun zugleich die Nachtgleichen jährlich von Osten nach Westen um 50,1 Bogensecunden fortrücken, so entfernen sich Aphel und

Perihel jährlich um 61,9 Bogensecunden von den Nachtgleichen.

**Anorthotypes Krystallisationssystem.** (*Αν* Verneinung, *ορθος* gerade, *τυπος* Gestalt). Das 6te und letzte System, das ein und eingliedrige System, bei welchem 3 unter einander ungleichartige Axen schiefwinklig mit einander sich schneiden.

**Ansetzen der Gleichungen.** Ist die vermöge geistiger Thätigkeit vorgenommene Uebertragung einer in Worten gegebenen, den Gleichungen angehörigen Aufgabe in die mathematische Zeichensprache. Sie kann nicht wohl gelehrt werden, ist vielmehr das Ergebnifs des Urtheilsvermögens.

1. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 163, No. 5.)

Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs die eine $m$ Mal so grofs als die andere und dafs ihre Summe $=a$ sei.

Es werden hier zwei Zahlen gesucht, beide sind also unbekannt; bezeichnet man die andere mit $x$, so ist die erste, als $m$ Mal so grofs $=mx$, deren Summe ist $x+mx$, und die anzusetzende Gleichung ist

$$x+mx=a$$

woraus (s. algebraische Gleichung No. 7.) die andere $x=\frac{a}{1+m}$, die erste $mx=\frac{ma}{1+m}$

Bezeichnet man die erste mit $x$, so ist die andere, da die erste $m$ Mal gröfser als jene ist, $m$ Mal kleiner als die erste, also $\frac{x}{m}$, und man hat:

$$x+\frac{x}{m}=a, \text{ woraus}$$

die erste $x=\frac{ma}{1+m}$, die andere $\frac{a}{1+m}$

2. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 173, No. 54.)

Vor $n$ Tagen ging ein Bote von hier ab, der täglich $a$ Meilen macht; ihm wird ein anderer nachgeschickt, der täglich $b$ Meilen macht; wie viele Tage wird der zweite brauchen, um den ersten einzuholen?

Der erste Bote hat bei $n$ Tagen Vorsprung $a \cdot n$ Meilen voraus, als der andere ihm mit der offenbar gröfseren Geschwindigkeit $b$ nachgesandt wird. Die Anzahl der Tage, welche dieser laufen mufs, um ihn einzuholen, d. h. um mit dem ersten in einem und demselben Punkt zusammenzutreffen, werde als die unbekannte Gröfse, nach welcher direct gefragt wird, mit $x$ bezeichnet, so läuft der zweite schnellere Bote $x$ Tage zu $b$ Meilen, im Ganzen $bx$ Meilen; der erste, welcher aufser den schon vorher gelaufenen $n$ Tagen noch $x$ Tage läuft, legt in diesen $x$ Tagen zu $a$ Meilen noch $ax$ Meilen zurück und hat im Ganzen $an+ax$ Meilen gemacht; da aber beide Boten von einem und demselben Punkt ausgegangen sind und in einem und demselben Punkte zusammentreffen, so sind Beider Wege gleich lang. Mithin ist die anzusetzende Gl.

$$an+ax=bx$$

woraus die Auflösung $x=\frac{an}{b-a}$ Tage.

3. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 174, No. 59.)

Es sei der Ort, von welchem ein erster Courier ausgeht, um $a$ Meilen mehr vorwärts gelegen; es sei ferner die Anzahl der Stunden, um welche er früher abreiste, $=b$; die Geschwindigkeit des ersten Couriers sei so grofs, dafs er in $d$ Stunden $c$ Meilen zurücklegt, und die Geschwindigkeit eines zweiten Couriers so grofs, dafs er in $f$ Stunden $e$ Meilen zurücklegt. In wie vielen Stunden nach der Abreise des zweiten Couriers werden sie zusammentreffen?

Die Anzahl der Stunden nach Abgang des zweiten Couriers, hier die fragliche Unbekannte werde mit $x$ bezeichnet; da derselbe in $f$ Stunden $e$ Meilen zurücklegt, also in einer Stunde $\frac{e}{f}$ Meilen, so ist die Anzahl der von ihm überhaupt zurückgelegten Meilen $\frac{c}{f}x$. Der erste macht in $d$ Stunden $c$ Meilen, in einer Stunde also $\frac{c}{d}$ Meilen, folglich in jenen $x$ Stunden, in welchen er mit dem ersten Courier zusammentrifft, $\frac{c}{d}x$ Meilen. Allein er ist $b$ Stunden früher abgereist, hat also $(b+x)$ Stunden lang gereist, und in dieser Zeit also, d. h. in Summa, $\frac{c}{d}(b+x)$ Meilen zurückgelegt, wenn der zweite mit ihm zusammentrifft. Da nun ferner derselbe erste Courier von einem um $a$ Meilen mehr vorwärts gelegenen Punkt abgereist ist, so ist der Weg des ersten um die Länge $a$ kürzer, als der Weg des zweiten, d. h. wenn man zu dem summarischen Wege $\frac{c}{d}(b+x)$ des ersten Couriers noch den Weg $a$ addirt, so erhält man den Weg $\frac{e}{f}x$ des zweiten Couriers. Die anzusetzende Gl. ist also

$$\frac{c}{d}(b+x)+a=\frac{s}{f}\cdot x$$

woraus als Auflösung $x=\frac{(ad+bc)f}{de-cf}$ gefunden wird.

4. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 179, No. 75.)

Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. Der erste hatte schon 36 Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, worin der zweite deren 7 macht; hingegen braucht der zweite zu 3 Würfen so viel Pulver, als der erste zu 4. Wie viel Würfe wird der zweite machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht hat als der erste?

Der zweite Bombardier soll wieder $x$ Würfe machen müssen, bis er mit dem ersten gleich viel Pulver verbraucht hat. In derselben Zeit hat der erste $\frac{8}{7}x$ Würfe, im Ganzen also $(36+\frac{8}{7}x)$ Würfe gemacht, der erste aber verbraucht gegen den zweiten weniger Pulver zu einem Wurf und zwar in dem Verhältnifs wie 3 : 4, daher hat man die anzusetzende Gleichung:

$$3(36+\tfrac{8}{7}x)=4x$$

woraus $x=189$ Würfe.

5. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 185, No. 101.)

In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs drei Mal so viele Herren als Damen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältnifs der Anwesenden von beiden Geschlechtern noch ungleicher, es blieben nämlich gar noch fünf Mal so viel Herren als Damen. Aus wie vielen Personen von jedem Geschlecht bestand diese Gesellschaft anfangs?

Bezeichnet man die Anzahl der anfangs vorhandenen Damen mit $x$, so waren $3x$ Herren in der Gesellschaft. Als von diesen 8 Herren und 8 Damen fortgegangen waren, befanden sich noch dort $(3x-8)$ Herren und $(x-8)$ Damen, jene betrugen 5 Mal so viel als diese, und man hat die anzusetzende Gleichung:

$$3x-8=5(x-8)$$

woraus $x=16$.

Es waren also anfänglich 48 Herren und 16 Damen in der Gesellschaft.

6. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 189, No. 116.)

Jemand will eine goldene Uhr ausspielen, und macht zu dem Ende eine gewisse Anzahl Loose. Giebt er das Loos für 1 Thlr. 6 Gr., so verliert er 20 Thlr., weil ihm die Uhr mehr gekostet hat, als in diesem Falle einkommen würde; giebt er aber das Loos für 1 Thlr. 16 Gr., so gewinnt er 13 Thlr. 8 Gr. Wie viel hat ihm demnach die Uhr gekostet und wie viele Loose hat er ausgespielt?

Hier wird nach 2 Zahlen gefragt, nach dem Preis der Uhr und nach der Anzahl Loose. Setzt man letztere $=x$, so verliert er 20 Thlr., wenn er $x$ Mal 1 Thlr. 6 Gr. $=1\frac{1}{4}x$ Thlr. einnimmt. Der Preis der Uhr ist mithin $1\frac{1}{4}x+20$ Thlr.; er gewinnt ferner 13 Thlr. 8 Gr. $=13\frac{1}{3}$ Thlr., wenn er $x$ Mal 1 Thlr. 16 Gr. $=1\frac{2}{3}x$ Thlr. einnimmt, der Preis der Uhr ist also auch $=1\frac{2}{3}x-13\frac{1}{3}$; da die Uhr nur einerlei Preis hat, so ist der Ansatz der Gl.:

$$1\tfrac{1}{4}x+20=1\tfrac{2}{3}x-13\tfrac{1}{3}$$

woraus $x=80$, oder er hat 80 Loose gehabt.

Der Preis der Uhr ist nun $1\frac{1}{4}\times 80$ Thlr. $+20$ Thlr. oder $1\frac{2}{3}\times 80-13\frac{1}{3}$ Thlr. $=$ 120 Thlr.

Nennt man den Preis der Uhr $x$, so hat er 20 Thlr. weniger als $x$, also $x-20$ Thlr. eingenommen, wenn er jedes der Loose zu $1\frac{1}{4}$ Thlr. ausspielt; nennt man die Anzahl der Loose $s$, so ist seine Einnahme $1\frac{1}{4}s$, und man hat den einen Ansatz $x-20=1\frac{1}{4}\cdot s$.

Durch die zweite Bestimmung der Aufgabe erfährt man, dafs er $13\frac{1}{3}$ Thlr. mehr als $x$, also $x+13\frac{1}{3}$ Thlr. eingenommen hat, wenn er jedes der $s$ Loose zu $1\frac{2}{3}$ Thlr. verkauft hätte, woraus der Ansatz $x+13\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}\cdot s$. Man hat demnach 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen:

$$x-20=1\tfrac{1}{4}s$$
$$x+13\tfrac{1}{3}=1\tfrac{2}{3}s$$

Man erhält als Auflösung (s. algebraische Gleichungen, No. 29.) $x=120$ Thlr., $s=80$ Stück.

7. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 190, No. 120.)

Um alle meine Ausgaben bestreiten zu können, sagt Jemand, müfste ich ein jährliches Einkommen von 540 Thlrn. haben; hieran fehlt aber noch ein Beträchtliches. Wären meine Einkünfte $3\frac{1}{2}$ Mal so grofs, als sie wirklich sind, so würde ich nicht allein alle meine Ausgaben bestreiten können, sondern ich würde sogar noch jährlich so viel übrig behalten, als mir jetzt fehlt. Wie hoch belaufen sich die jährlichen Einkünfte dieses Mannes?

Setzt man seine Einnahme, nach der gefragt wird, $=x$, so hätte er bei dem $3\frac{1}{2}$fachen derselben, also bei $3\frac{1}{2}x$ Thlr., nicht nur die sämmtlichen, von ihm jährlich zu bestreitenden Ausgaben mit 540 Thlrn., sondern noch als Ueberschufs, was ihm jetzt fehlt; dieser Ueberschufs beträgt aber offenbar $540-x$ Thlr., und man hat die Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}x=540+540-x$$

woraus seine jährliche Einnahme $x=240$ Thlr.

Setzt man die Summe, welche ihm fehlt, $=x$, so ist seine Einnahme, da seine Gesammt-Ausgaben 540 Thlr. betragen, offenbar $=540-x$; wenn diese nun $3\frac{1}{2}$ Mal so grofs wäre, also wenn seine Einnahme $3\frac{1}{2}x(540-x)$ betrüge, so würde er nicht nur sämmtliche Ausgaben mit 540 Thlrn. bestreiten können, sondern noch $x$ übrig haben, d. h. er würde in Summa haben $540+x$, und man hat die Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}(540-x)=540+x$$

Man erhält das ihm fehlende $x=300$ Thlr., so dafs diese, von 540 abgezogen, sein Einkommen $=240$ Thlr. ergiebt.

8. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 191, No. 124.)

Es wollte Jemand ein Haus kaufen, und um das dazu erforderliche Capital aufzubringen, jedem seiner Schuldner eine gleiche Summe aufkündigen. Er versuchte zu dem Ende, ob es hinlänglich wäre, wenn er Jedem 250 Thlr aufkündigte; fand aber, dafs er alsdann 2000 Thlr. zu wenig erhalten würde. Er versuchte es daher mit 340 Thlrn.; dies brachte ihm aber 880 Thlr mehr, als er brauchte. Wie viel Schuldner hatte er? Wie grofs war das herbei zu schaffende Capital? Und wie viel mufs er jedem seiner Schuldner aufkündigen?

Setzt man hier die Anzahl seiner Schuldner $=x$, so hat er bei Einziehung von 250 Thlrn. von jedem, also bei $250\cdot x$ Thlr. zum Hauskauf 2000 Thlr. zu wenig; das Haus soll also $250\cdot x+2000$ Thlr. kosten; bei Einziehung von $340\cdot x$ Thlr. hat er 880 Thlr. mehr, als er zum Hauskauf nöthig hat. Das Haus soll also nach dieser zweiten Bestimmung $340\,x-880$ Thlr. kosten, folglich hat man die Gleichung:

$$250\,x+2000=340\,x-880$$

und die Auflösung ergiebt die Anzahl seiner Schuldner $x=32$.

Der Preis des Hauses $=250\times32+2000=340\times32-880=10000$ Thlr., und was er jedem der Schuldner aufzukündigen hat $\frac{10000}{32}=312\frac{1}{2}$ Thlr.

Setzt man den Preis des Hauses $x$, so ist in dem ersten Fall die Summe, welche von sämmtlichen Schuldnern eingezogen wird, $=x-2000$ Thlr., und da jeder derselben 250 Thlr. zahlt, so ist die Anzahl der Schuldner $=\frac{x-2000}{250}$.

Im zweiten Fall ist die eingezogene Summe $=x+880$ Thlr. und die Anzahl der Schuldner nach dieser Bestimmung $=\frac{x+880}{340}$. Mithin hat man die Gleichung:

$$\frac{x-2000}{250}=\frac{x+880}{340}$$

woraus:

Der Preis des Hauses $x=10000$ Thlr., wonach nun die Anzahl der Schuldner und das, was von Jedem einzuziehen ist, um 10000 Thlr. zu geben, durch einfache Zahlenrechnung zu ermitteln ist.

9. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 195, No. 136.)

Zu einer Verlassenschaft, welche nach Abzug gerichtlicher Kosten sich auf 3139 Thlr. beläuft, melden sich drei Gläubiger, der eine mit einer Forderung von 2000, der andere von 2500 und der dritte von 3500 Thlrn. Da nun die Verlassenschaft nicht hinreicht, diese drei Gläubiger ganz zu befriedigen, und ihre Ansprüche auch überdies nicht gleich rechtskräftig sind, so soll, nach einem gerichtlichen Ausspruche, die Masse unter die Gläubiger nach dem Verhältnisse ihrer Forderungen vertheilt werden, jedoch soll, aus dem angeführten Grunde, der zweite 10 und der dritte 25 Procent über seinen Antheil erhalten. Wie viel wird demnach Jeder bekommen?

Das Verhältnifs, in welchem die Vertheilung der Verlassenschaft erfolgen soll, ist offenbar

$$2000:\tfrac{11}{10}\cdot2500:\tfrac{5}{4}\cdot3500$$

Bezeichnet man den Factor dieser Verhältnifszahlen mit $x$, so hat man die Gleichung:

$$\left(2000+\tfrac{11}{10}\cdot2500+\tfrac{5}{4}\cdot3500\right)\cdot x=3139$$

woraus $x=\frac{43}{125}$

| | | |
|---|---|---|
| Der erste erhält demnach | $\frac{43}{125}\cdot2000$ Thlr. | $=688$ Thlr. |
| Der zweite „ „ | $\frac{43}{125}\cdot\frac{11}{10}\cdot2500$ Thlr. | $=946$ Thlr. |
| Der dritte „ „ | $\frac{43}{125}\cdot\frac{5}{4}\cdot3500$ „ | $=1505$ „ |
| | Summa | 3139 Thlr. |

10. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 199, No. 152.)

Ich hatte einmal eine Summe ungezählten Geldes vor mir liegen. Von dieser Summe nahm ich zuerst den dritten Theil weg und legte dafür 50 Thlr. zu. Einige Zeit nachher nahm ich von der so vermehrten Summe den vierten Theil weg und legte dafür wieder 70 Thlr. zu. Ich zählte hierauf mein Geld und fand 120 Thlr. Wie viel war es anfangs?

Die fragliche Summe werde mit $x$ be-

zeichnet, von dieser wurde zuerst $\frac{1}{3}$ fortgenommen, also $\frac{1}{3}x$, es blieben mithin $\frac{2}{3}x$, hierzu wurden 50 Thlr. gelegt, die Summe war nun $\frac{2}{3}x+50$; von dieser wurde dann $\frac{1}{4}$ fortgenommen, es blieb mithin die Summe $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x+50)$; hierzu wurden 40 Thlr. gelegt, und nun betrug das Ganze 120 Thlr. Man hat demnach die Gleichung:

$$\tfrac{3}{4}(\tfrac{2}{3}x+50)+70=120$$

woraus $x$ gefunden wird $=25$ Thlr.

11. **Beispiel.** (Maier Hirsch, pag. 203, No. 164.)

Ein General wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erste Mal blieben ihm 39 Mann übrig; das zweite Mal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergrößerte, fehlten ihm 50 Mann, um das Quadrat voll zu machen. Wie stark war das Regiment?

Die Seite des Quadrats, in welches er sein Regiment zuerst aufstellte, bezeichne man mit $x$, so standen in demselben $x^2$ Mann, und da 39 Mann übrig blieben, so war das Regiment $(x^2+39)$ Mann stark. Um einen Mann die Seite des Quadrats vermehrt, wären in demselben $(x+1)^2$ Mann aufgestellt gewesen, wenn nicht 50 Mann gefehlt hätten, hiernach war das Regiment $[(x+1)^2-50]$ Mann stark; man hat also die Gleichung:

$$x^2+39=(x+1)^2-50$$

woraus $x=44$.

Das Regiment bestand also aus

$$44^2+39=45^2-50=1975 \text{ Mann.}$$

Wollte man hier die Anzahl der Mannschaft, wonach gefragt wird, mit $x$ bezeichnen, so hätte man folgende Betrachtung: Zu dem ersten Quadrat wurde das Regiment weniger 39 verwendet; die Seite des Quadrats war also $\sqrt{x-39}$; zu dem zweiten Quadrat gehören $x+50$ Mann, dessen Seite also ist $\sqrt{x+50}$; die Seite des zweiten Quadrats ist um 1 größer, als die des ersten, mithin hätte man die Gleichung:

$$\sqrt{x-39}+1=\sqrt{x+50}$$

Die Auflösung ist hier offenbar weitläufiger: denn man muſs erst quadriren und erhält:

$$x-39+1+2\sqrt{x-39}=x+50$$

hieraus $\sqrt{x-39}=44$; und quadrirt

$$x-39=1936$$

woraus $x=1975$ Mann.

12. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 204, No. 168.)

Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Gröſse. Füllt er das zweite leere Faſs aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $\frac{4}{7}$ des Weins zurück; füllt er das dritte leere Faſs aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $\frac{1}{4}$ des Weines zurück; füllt er das vierte leere Faſs aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt; wollte er aber das dritte und vierte leere Faſs aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es blieben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

Bezeichne den Inhalt des ersten Fasses mit $x$; füllt man das zweite leere aus dem vollen ersten, so bleiben in diesem $\frac{4}{7}x$, mithin enthält das zweite Faſs $\frac{3}{7}x$; füllt man aus dem vollen zweiten das dritte leere, so bleibt im zweiten $\frac{1}{4}$ der Füllung, also enthält das dritte Faſs $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}x=\frac{9}{28}x$. Füllt man das vierte leere aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt, es enthält also das vierte Faſs $\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{28}x=\frac{4}{7}x$. Wenn nun endlich aus dem Inhalt $x$ des ersten Fasses das dritte und vierte in Summe mit $(\frac{9}{28}+\frac{4}{7})x=\frac{25}{28}x$ gefüllt wird, so bleiben 15 Quart übrig, daher hat man die Gleichung:

$$x=\tfrac{25}{28}x+15$$

woraus der Inhalt des 1. Fasses $= \quad x=140$ Quart
des 2. „ $=\frac{3}{7}x=60$ „
des 3. „ $=\frac{9}{28}x=45$ „
des 4. „ $=\frac{4}{7}x=80$ „

13. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 219, No. 59.)

**$A$, $B$, $C$ kaufen Kaffee, Zucker und Thee zu denselben Preisen. $A$ bezahlt 11 Thlr. 15 Gr. für $7\frac{1}{2}$ Pfund Kaffee, 3 Pfund Zucker und $2\frac{1}{4}$ Pfund Thee; $B$ bezahlt 16 Thlr. 6 Gr. für 9 Pfund Kaffee, 7 Pfund Zucker und 3 Pfund Thee; $C$ bezahlt 12 Thlr. 6 Gr. für 2 Pfund Kaffee, $5\frac{1}{2}$ Pfund Zucker und 4 Pfund Thee. Was kostet das Pfund von jedem?**

Hier setze man den Preis des Kaffees $x$ Gr., den des Zuckers $y$ Gr. und den des Thees $z$ Groschen, so hat man die 3 Gleichungen unmittelbar:

$$7\tfrac{1}{2}x+3y+2\tfrac{1}{4}z=11 \text{ Thlr. } 15 \text{ Gr.}$$
$$9x+7y+3z=16 \text{ Thlr. } 6 \text{ Gr.}$$
$$2x+5\tfrac{1}{2}y+4z=12 \text{ Thlr. } 6 \text{ Gr.}$$

woraus $x=18$ Gr., $y=12$ Gr. und $z=2$ Thlr. sich ergiebt.

14. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 224, No. 73.)

Eine gewisse Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl mit der Summe ihrer Ziffern an sich (d. h. ohne auf den Werth zu sehen, welchen sie durch ihre Stellen erhalten) dividirt, so ist der Quotient 48, zieht man aber von dieser Zahl 198 ab, so erhält man eine Zahl, welche die nämlichen Ziffern als die gesuchte, aber in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

Es seien die Ziffern der Zahl der Reihe nach $x$, $y$, $z$; $x$ die Hunderter, $y$ die Zehner, $z$ die Einer; der Werth der Zahl ist also:

$$= 100x + 10y + z$$

Aus der ersten Bestimmung, dafs die Ziffern in arithmetischer Proportion stehen, hat man die Gleichung:

1) $x - y = y - z$

Die Summe der Ziffern ist $x + y + z$, der Quotient aus dieser Summe in die Zahl giebt die Gleichung:

2) $\frac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 48$

Aus der dritten Bestimmung erhält man:

3) $100x + 10y + z - 198 = x + 10y + 100z$

Man hat also hier 3 Gleichungen mit 3 unbekannten Gröfsen. Aus 1. erhält man:

4) $x = 2y - z$

Diesen Werth von $x$ in 2 gesetzt, giebt:

5) $2y = 3z$

und Gleichung 3 in gleicher Verbindung mit Gleichung 4, ergiebt:

6) $y = z + 1$

aus 5 und 6 erhält man:

$$z = 2$$
$$y = 3$$

und nun aus 4. $x = 4$

Die Zahl ist 432; die Summe deren Ziffern $= 9$, $\frac{432}{9}$ giebt 48 und $432 - 198$ die Zahl 234.

**Antarktisch**, südlich; antarktischer Pol s. v. w. südlicher Pol u. s. w.

**Ant-Evolute.** Ist die Curve, welche entsteht, wenn man die von sämmtlichen Punkten einer Evolute nach der Evolvente gezogenen Krümmungshalbmesser durch diese verlängert, jede Verlängerung dem zugehörigen Krümmungshalbmesser gleich lang nimmt und deren Endpunkte durch eine Curve verbindet.

Ist *ABCDE* eine Curve, wird um dieselbe eine biegsame mathematische Linie gedacht und diese unter steter Anspannung von derselben entfernt, so beschreibt der Endpunkt der biegsamen Linie die Curve *Abcd*. Es ist mithin *ABCDE* eine Evolute, *Abcd* ... die zu derselben gehörige Evolvente, *Bb*, *Cc*, *Dd* ... sind in der Reihenfolge die Krümmungshalbmesser der Evol-

Fig. 67.




vente, und diese durch $b$, $c$, $d$ ... verlängert, $bB' = Bb$, $cC' = Cc$, $dD' = Dd$ genommen, giebt die zugehörige Ant-Evolute $AB'C'D'$ ...

**Ant-hapsologarithmus** s. u. Antilogarithmus.

**Antikaustische Linie** (Anticaustica) entsteht dadurch, dafs die Lichtstrahlen, die von einer krummen Linie zurückgeworfen werden und deren der Reihenfolge nach genommenen gegenseitigen Durchschnittspunkte die kaustische Linie (caustica, Brennlinie) bilden, durch die erstere zurückwerfende Linie hindurch um gleichviel verlängert werden, wonach die Endpunkte sämmtlicher Strahlverlängerungen die a. L. bilden. Die a. L. hat also zur Brennlinie dieselbe Beziehung, wie die Ant-Evolute zur Evolute.

Es sei *ABCDE* eine krumme Linie, die Strahlen $a'A$, $b'B$ ..... fallen ∥ auf dieselbe, der Strahl $a'A$ treffe die Curve

Fig. 68.




in $A$ unter rechten Winkeln und wird mithin in sich selbst zurückgeworfen, der Strahl $b'B$ wird nach $Ba$ zurückgeworfen, so dafs $\angle ABa = \angle b'BC$, der Strahl $c'C$ nach $Cb$, so dafs $\angle BCb = \angle c'CD$ u. s. w.

und die Durchschnittspunkte $a$, $b$, $c$, $d$ u. s. w. bilden unter der Voranssetzung, dafs die Strahlen $a'A$, $b'B$ ... sehr nahe an einander liegen, die Caustica. Verlängert man nun $aA$ bis $A'$, so dafs $AA' = aA$, ebenso $bB$, $cC$, $dD$, so dafs $BB' = bB$, $CC' = cC$, $DD' = dD$ u. s. w., so liegen die Punkte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ ... in der Anti-Caustica.

**Antilogarithmus** ist die veraltete Bezeichnung verschiedener Begriffe.

1. Neper bezeichnete damit den Logarithmus eines Cosinus in Beziehung auf den in den Tafeln ihm gegenüber stehenden Logarithmus des Sinus desselben Winkels, wie Mercator den Logarithmus einer Cotangente Ant-hapsologarithmus in Beziehung auf den ihm in den Tafeln gegenüber stehenden Logarithmus der Tangente, welchen er hapsologarithmus (ἅπτειν, berühren) nannte.

2. Wallis versteht darunter Logarithmen, die in einer auf einander folgenden Reihe mit den zugehörigen Zahlen tabellarisch geordnet zusammengestellt werden. Etwa wie;

| Logarithmus. | Zahl. |
|---|---|
| 0001 . . . | 100023027 |
| 0002 . . . | 100046062 |
| 0003 . . . | 100069102 |
| 0004 . . . | 100092146 |
| 0005 . . . | 100115196 |
| 0006 . . . | 100138020 |
| 0007 . . . | 100161311 |
| 0008 . . . | 100184376 |
| 0009 . . . | 100207448 |
| 0010 . . . | 100230523 |

u. s. w.

Wollte man nun den Numerus des Logarithmus 1,2458 finden, so hätte man in den Tafeln aufzusuchen den $log = 2458$, man fände den Numerus: 176116485 und mithin für den $log = 1{,}2458$ den Numerus 17,6116485. Solche Antilogarithmische Tafeln sind nicht in Gebrauch gekommen.

3. Hutton erklärt nach dem Dictionnaire encyclopédique, wie Klügel behauptet, den A. als das Complement eines Sinus, einer Tangente oder einer Secante, d. h. als den Unterschied zwischen dem Logarithmus des Sinus totus und jedem der gedachten Logarithmen. So z. B. ist

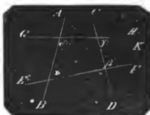
$$\log \sin 40^\circ 23' = 9{,}8115069 - 10$$
$$\log \sin tot = \log 1 = 0 = 10{,}0000000 - 10$$
$$\text{Antilog.} \sin 40^\circ 23' = 0{,}1884931$$

Da $\log 1 - \log \sin x = \log \frac{1}{\sin x}$, so ist der Antilog. eines $\sin x$ = dem $\log$ der $\operatorname{cosec} x$, desgl. der A. von $tg\, x$ = dem $\log \cot x$ und der A. von $\sec x$ = dem $\log \cos x$.

Nicht eine der genannten Bezeichnungen von A. und ein A. überhaupt nicht, ist noch in Gebrauch.

**Antiparallele Linien** sind 2 Paar gerade Linien, die von 2 anderen geraden Linien so geschnitten werden, dafs die entgegengesetzt liegenden Gegenwinkel einander gleich sind, während bei 2 parallelen geraden Linien, die von irgend einer dritten geraden geschnitten werden, die (auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden) Gegenwinkel einander gleich sind.

Fig. 69.




Werden die geraden Linien $AB$ und $CD$ von der dritten $EF$ geschnitten, und ist $AB \nparallel CD$, so ist $\angle \alpha = \angle \beta$. Sind aber $AB$ und $CD$ nicht $\nparallel$ und man schneidet beide Linien durch eine zweite gerade Linie $GH$, so dafs $\alpha = \gamma$, so sind beide Paar Linien antiparallel, und da, wenn man beide Linien $EF$ und $GH$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt $K$ verlängert, $\angle K + \beta + \gamma = \angle K + \alpha + \delta$, auch $\angle \beta = \angle \delta$.

Ist $EKG$ der Durchschnitt eines Kegels und bildet $AB$ dessen Grundfläche, so heifst $CD$ ein Wechselschnitt, und dessen Durchschnitts-Ebene bildet gleichfalls einen Kreis.

**Antiparallelogramm** s. v. w. Trapez, ein Viereck, in welchem 2 gegenüber liegende Seiten $\nparallel$, die beiden anderen nicht $\nparallel$ sind.

**Antipoden** (Gegenfüfsler), die Bewohner, welche unter entgegengesetzter Breite, d. h. die einen auf der nördlichen, die anderen auf der südlichen Halbkugel, und auf entgegengesetzten Seiten, d. h. die einen in der östlichen, die anderen in der westlichen Halbkugel, und in derselben Meridian-Ebene wohnen; sie haben entgegengesetzte Jahreszeiten und Tageszeiten.

**Antiscii** (Gegenschattige, eigentlich Antiskii, von σκιά der Schatten). Die Be-

wohner der gemäfsigten Zone, weil die der nördlichen ihren Sonnenschatten nach Norden, die der südlichen nach Süden, beide also entgegengesetzt gerichtete Schatten werfen. (Vergl. Amphiscii, Ascii.)

**Antithesis** hiefs früher die Versetzung eines Gliedes von der einen Seite einer Gleichung auf die andere Seite derselben mit entgegengesetztem Vorzeichen. Z. B. aus

$$x^2 + ax = b$$

wurde per antithesin

$$x^2 + ax - b = 0$$

**Antoeci** (Gegenwohner), die Bewohner, welche auf derselben Seite desselben Meridians und unter entgegengesetzten Breiten wohnen, sie haben gleiche Tageszeiten, aber entgegengesetzte Jahreszeiten. (Vergl. Antipoden.)

**Anzahl**, ist eine Menge von Einheiten, die durch eine bestimmte Zahl ausdrückbar ist oder gezählt werden kann.

**Anziehende Kraft**, die einer Masse beiwohnende Kraft, vermöge welcher eine andere Masse, ohne Einwirkung einer anderen Ursache, das Bestreben erhält, ihr näher zu kommen. Aus den wahrnehmbaren, in der Natur vorkommenden gegenseitigen Anziehungen von Massen, und da keine Wirkung ohne Ursache denkbar ist, mufs eine a. K. angenommen warden. (Vergl. Abstofsende Kraft, Anziehung.)

**Anziehung**, das wahrnehmbare Bestreben der in der Natur befindlichen Massen, einander sich zu nähern, und als Wirkung die Aeufserung einer nicht wahrnehmbaren, aber als nothwendig vorauszusetzenden Ursache, einer Kraft, die wir Anziehungskraft nennen.

Man hat A. in bemerkbarer und A. in unbemerkbarer Ferne; oder A. in der Entfernung und A. in der Berührung.

A. in der Entfernung; Attraction, das Bestreben der von einander entfernten Massen auf dem kürzesten Wege, also in gerader Linie zu einander hin sich zu bewegen. A. in der Berührung kommt in verschiedenen Erscheinungen vor:

a. Als Cohäsion, Wirkung der Cohärenz, das Bestreben der Massentheilchen eines Körpers, an einander haften zu bleiben, und das je nach der physikalischen Beschaffenheit des Körpers gröfser oder geringer ist (als bei festen, tropfbar flüssigen, luftförmigen Körpern).

b. Als Adhäsion (s. d.)

c. Als elektrische A. Entgegengesetzte Elektricitäten (elektrische Materien) haben das Bestreben, durch Strömung in einander überzugehen und sich auszugleichen, sich gegenseitig zu neutralisiren. Sind beide Fluida fern von einander, so entsteht eine gegenseitige Spannung zwischen beiden, und sind sie in einer dieser Ferne angemessenen Quantität vorhanden, so endigt diese Spannung in einen Uebersprung, wie bei der Elektrisirmaschine, dem Blitz, einer galvanischen Batterie. Hier ist also A. in der Ferne. Dennoch begreift man auch die elektrischen Erscheinungen durch Spannung und Ueberspringen unter die A. bei Berührung, weil das Bestreben zur Neutralisation, zu gegenseitiger Durchdringung die Ursache davon ist, die Körper aber, denen die Elektricität inwohnt, in einerlei Entfernung von einander bleiben, im Gegensatz zu Attraction.

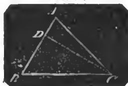
d. Als magnetische A. Auch diese hat, wie es scheint, eine A. in der Ferne. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

e. Als chemische A., das Bestreben verschiedener Körper, ihre unzertheilbaren, also auch undurchdringlichen Theilchen (Atome) in anderer Weise neben einander zu ordnen, wodurch ein dritter, den nun chemisch verbundenen Körpern ungleicher Körper entsteht. Also im Gegensatz zu Adhäsion, wo 2 heterogene Körper während ihrer Berührung dieselben bleiben. Man unterscheidet noch die auflösende A., das Bestreben verschiedener Körper, ihre Atome (oder vielmehr wohl ihre Moleküle, Massentheilchen, eine Summe von Atomen) neben einander zu ordnen, ohne dafs jeder von beiden aufhört zu sein, was er ist (z. B. Zucker und Wasser), also ein Gemenge zu bilden; wiewohl einige Chemiker diese Anflösung als einen schwachen Grad von Chemismus ansehen.

**Anziehungskraft** s. v. w. Anziehende Kraft.

**Apagogischer Beweis** (indirecter B.) Ein Beweis in der Form, dafs die Unrichtigkeit oder Unmöglichkeit des Gegentheils der Behauptung bewiesen wird, wonach der Schlufs zu folgern ist, dafs die Behauptung richtig oder nothwendig ist. Z. B. Euklid, 6. Satz, Lehrsatz:

Fig. 70.



Wenn in einem Triangel *ABC* zwei ∠ *ABC*, *ACB* einander gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten *AC* und *AB* einander gleich.

Vorangegangen sind nur 2 Lehrsätze:

1) Satz 4. Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, eine jede jeder für sich gleich sind, und ein Winkel einem Winkel gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschliefsen: so ist auch die dritte Seite der dritten gleich; auch sind die Triangel selbst einander gleich: und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, ebenfalls einander gleich.

2) Satz 5. In jedem gleichschenkligen Triangel sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Diese beiden vorangegangenen Lehrsätze und die bekannten voranstehenden Grundsätze können nur allein auf den Beweis des verstehenden 6. Satzes angewendet werden, und Euklid giebt folgenden indirecten Beweis:

Wären *AC*, *AB* ungleich, so wäre eine davon gröfser, etwa *AB* (es mufs daher ein Theil von $AB = AC$ sein) es sei daher $BD = AC$. Ziehe *CD*. In den Triangeln *ABC*, *DBC* wäre demnach $BD = AC$, *BC* beiden gemein, und (die in beiden Triangeln von den wechselseitig gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel) $DBC = ACB$; folglich (4. S.) $\triangle DBC = \triangle ABC$, welches unmöglich ist (weil etwas einem ihm kleineren oder einem ihm gröfseren nicht gleich sein kann). Demnach können *AC*, *AB* nicht ungleich sein und sind also gleich.

Der indirecte Beweis ist der schärfste, wenn eine Graduirung erlaubt ist, aller mathematischen Beweise, und er ist immer zulässig, wenn Umkehrungen von Sätzen zu erweisen sind, wie auch der verstehende 6. Satz der umgekehrte 5. Satz ist.

**Apertur.** Die mittlere in dem Objectiv eines nicht achromatischen Fernrohrs für das Gesichtsfeld frei gelassene Oeffnung, indem der Rand des Glases rund herum mit einem undurchsichtigen Ringe, der Blendung versehen wird, damit die hier einfallenden farbigen und daher undeutlichen Lichtstrahlen zurückgehalten werden (s. achromatisch No. 1.)

**Aphelium** (Sonnenferne) s. u. Absiden.

**Apogeum**, die gröfste Entfernung des Mondes von der Erde, sie beträgt 63,6 Erdhalbmesser = 54664 Ml. Die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde, das Perigeum beträgt 55,8 Erdhalbmesser = 47960 Ml.

**Apollonische Parabel**, heifst die aus dem Kegelschnitt entstehende P. zum Unterschiede von der P. höherer Ordnung, weil Apollonius von Pergae das uns bekannte älteste Werk über Kegelschnitte geschrieben hat.

Fig. 71.




Führt man durch einen Punkt *F* des Kegelmantels eine Ebene ‡ der mit *F* in einerlei Axenebene liegenden Seite *AB*, so ist die durch den Mantel begrenzte Curve eine Parabel. Durch den Winkel *BAD* ist der ganze Kegel gegeben und durch die durch den Anfangspunkt *F* mit dem Durchmesser *BD* des Grundkreises parallele Linie *EF* zugleich die Parabel. Bezeichnet man die von *F* aus gemessenen Abscissen, wie *FI*, mit *x*, die zugehörigen normalen Ordinaten, wie *IG*, mit *y*, so findet man:

$$y^2 = 2\,EF \cdot \sin\tfrac{1}{2} BAD \times x$$

Die Constante $2\,EF \sin\tfrac{1}{2} BAD$, eine Linie, heifst der Parameter, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben *p* bezeichnet, jede durch die Gleichung $y^2 = px$ gegebene Curve ist eine Parabel, und es gehören zu derselben unzählige Kegel und dazu gehörige Anfangspunkte *F*, je nachdem man *p* in verschiedene Factoren $2\,EF$ und $\sin\tfrac{1}{2} BAD$ zerlegt.

Die (rechtwinklige) Coordinatengleichung $y^2 = px$ hat man nun in eine ihr ähnliche allgemeinere umgeändert, nämlich in:

$$y^{m+n} = a^m \times x^n$$

nennt Curven, deren Formen solcher Coordinatengleichung entsprechen, Parabeln höherer Ordnung, und zum Unterschiede von solchen die P. einfacher Ordnungen auch die A. P.

**Aporema** (Ungewifsheit, Zweifel). Eine vielleicht lösbare, aber noch nicht zu lösen möglich gewesene mathematische Aufgabe.

**Aporisma** s. v. w. Aporēma.

**Apothema**, die gerade Linie von dem Mittelpunkt eines regulären Polygons normal auf eine Seite desselben.

**Apotome** (Ablösung, Trennung). Hiermit bezeichnet Euklid (10. B. 74. S.) die Differenz, welche entsteht, wenn man von einer Rationallinie eine andere, ihr blofs in Potenz commensurable Linie fortnimmt, und von der er (74. S.) beweist, dafs sie eine Irrationallinie ist. Hierbei ist zu bemerken, dafs Euklid nicht nur commensurable Linien, sondern auch solche Linien rational nennt, die zwar incommensurabel, aber in der Potenz (d. h. im Quadrat) commensurabel sind (10. Bd. 6. Erkl.), und dafs er unter irrationalen Linien nur solche versteht, die weder als Linien, noch in der Potenz commensurabel sind (10. Bd. 10. Erkl.)

Man nehme ein rechtwinkliges △, dessen Katheten die Linien = 1 sind, so ist die Hypothenuse ($=\sqrt{2}$) bei uns mit jeder Kathete (= 1) irrational, bei Euklid rational, weil das Quadrat = 1 der Kathete mit dem Quadrat = 2 der Hypothenuse commensurabel ist, eben so jede der Katheten = 1 und = 2 mit der Hypothenuse $=\sqrt{5}$. Bildet man aber aus den so erhaltenen Linien $=\sqrt{2}$ und $=\sqrt{5}$ ein Rechteck, $=\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$, und construirt nach (2. B. 14. S.) das diesem gleiche Quadrat $=\sqrt{10}$, so ist die Seite $=\sqrt[4]{10}$ mit den Seiten = 1 und $=\sqrt{2}$ der zuerst betrachteten Quadrate irrational, weil auch deren Quadrate = 1 und 2 mit dem Quadrat $=\sqrt{10}$ incommensurabel sind.

Bezeichnet man mit $b$, $c$, $d$ ... gerade, mit einander commensurable Linien, mit $B$, $C$, $D$ ... Potenzen (Quadrate) von solchen geraden Linien, so dafs also $A$, $B$, $C$ ebenfalls unter einander commensurabel sind; mit $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ ... Linien, die im Quadrat, aber nicht in der Länge commensurabel sind und mit A. eine Apotomē, so ist A. entweder von der Beschaffenheit $b-\sqrt{C}$ oder $\sqrt{B}-c$ oder $\sqrt{B}-\sqrt{C}$.

Euklid erklärt 6 Apotomen, in der Uebersetzung in einer nicht üblichen Sprech- und Bezeichnungsweise, welche das Studium erschwert, auch unleidlich macht. Es soll daher hier Erklärung 1 (nach dem 85. Satz) näher erläutert werden.

Erkl. 1. Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so dafs die ganze, aus beiden bestehende Linie um das Quadrat einer ihr an Länge commensurablen Linie, über die angefügte potenzirt, heifst die **erste A.**, wenn solche ganze Linie einer angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Aus dem Schlufs des Satzes geht hervor, dafs die A. nur die erste der 3 Beschaffenheiten $b-\sqrt{C}$ haben kann, weil $A$ *plus* einer angefügten Linie $\sqrt{C}$ eine ganze, in Länge commensurable Linie $b$ geben soll. Dafs die ganze $b$ über die angefügte $\sqrt{C}$ potenzirt, heifst: dafs folgendes Verhältnifs $b^2 : b^2 - C$, also das Quadrat der ganzen zu der Differenz der Quadrate der ganzen und der angefügten, gemeint wird, und dafs dieses Potenziren um das Quadrat einer ihr in Länge commensurablen Linie geschieht, heifst, dafs $b : \sqrt{b^2 - C} = d : e$ ist, also dafs die Seite $\sqrt{b^2 - C}$ eines der Differenz der Quadrate gleichen Quadrats eine mit $b$ commensurable Linie giebt.

Bei der **zweiten Apotome** ist die angefügte ($C$) in Länge commensurabel, mithin $A=\sqrt{B}-c$ und für die Potenzirung $B : \sqrt{B-c^2} = d : e$

Bei der **dritten Apotome** ist weder die angefügte ($\sqrt{C}$), noch die ganze ($\sqrt{B}$) in Länge commensurabel, daher

$$A=\sqrt{B}-\sqrt{C}$$

und für die Potenzirung

$$\sqrt{B} : \sqrt{B-C} = d : e$$

Bei den übrigen 3 Apotomen soll die ganze Linie über die angefügte um das Quadrat einer in Länge **incommensurablen** Linie potenziren.

Bei der **vierten Apotome** ist die ganze ($b$) in Länge commensurabel, also

$$A=b-\sqrt{C} \text{ und}$$

$$b^2 : \sqrt{b^2-C} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

Bei der **fünften Apotome** ist die angefügte $c$ in Länge commensurabel, daher $A=\sqrt{B}-c$ und

$$B : \sqrt{B-c^2} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

Bei der **sechsten Apotome** ist weder die ganze, noch die angefügte in Länge commensurabel, also $A=\sqrt{B}-\sqrt{C}$ und

$$B : \sqrt{B-C} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

**Apparat.** 1) Ein stabiles Geräth; es unterscheidet sich von **Werkzeug** oder **Instrument**, dafs dieses ein **nicht** stabiles Geräth ist. **Geräth** ist jeder Körper und jede zu einem Ganzen zusammengefügte Summe von Körpern, mit deren Hülfe der Mensch eine Thätigkeit ausübt. Das stabile Geräth, der A. unterscheidet sich von **Maschine**, dafs ersterer entweder selbst unthätig bleibt, oder wenn er selbstthätig ist, weder mechanische noch Ortsänderung von Körpern zu bürgerlich nutzbarem Zweck vollführt, während letztere durch Kräfte, welche auf dieselbe einwirken und in ihr zerlegt werden, selbst

zur Thätigkeit kommt, und zu bürgerlich nutzbarem Zweck Körper mechanisch oder deren Ort ändert. Aus diesem Grunde sollten die sogenannten astronomischen Maschinen, welche die Bewegung der Planeten um die Sonne figürlich darstellen, astr. Apparate genannt werden.

Zirkel, Kette, Stäbe sind Mefs-Instrumente; Mefstische, Astrolabien, Theodoliten sind Mefs-Apparate. Barometer, Thermometer, Lupen sind Beobachtungs-Instrumente; Calorimeter, Mikroskope Beobachtungs-Apparate. Die Adwood'sche Fallmaschine würde geeigneter Fall-Apparat genannt werden.

2) Eine Summe von Apparaten und Instrumenten, die zur praktischen Ausübung einer Wissenschaft gehören. Man hat mathematische, physikalische, chemikalische, astronomische, chirurgische etc. Apparate.

**Appareille**, Anffahrt, Rampe, bei einer Brustwehr die von dem Ban-Horizont nach der Geschützbank (Barbette) schräg aufsteigende Fläche. Sie hat mindestens 8 Fufs, höchstens in schlechtem Boden 12 Fufs Breite und eine Dossirung von mindestens der 6fachen Höhe zur Anlage (s. d.)

**Applicate** s. v. w. Ordinate (s. u. Abscisse), jedoch nur für Curven, aber für jede beliebige Abscissenlinie und unter beliebigem Winkel mit derselben.

Die Alten nannten (nach Apollonius) A. nur diejenigen Ordinaten einer Curve, welche ⫩ mit einander zu beiden Seiten der Abscisse gleich grofs werden, also für Kegelschnitte, wenn die Abscisse ein Durchmesser, und für rechtwinklige A., wenn die Abscisse die Axe des Kegelschnitts ist.

**Approximation** s. v. w. Näherung, das Nahekommen an eine bestimmte Gröfse. Einem Bruch $=\frac{298}{399}$ nähert man sich, wenn man für denselben $\frac{3}{4}$ setzt.

| | |
|---|---|
| Der wirkliche Werth $\frac{298}{399}$ ist, in einen Decimalbruch ausgedrückt, | $=0,747686\ldots$ |
| Der Näherungswerth $\frac{3}{4}$ | 0,750000 |
| Die Annäherung ist geschehen auf | 0,002313... |

**Approximationsformel, Näherungsformel**, eine Formel, mit deren Anwendung man dem wirklichen Werth einer Gröfse nur nahe kommt, ohne ihn ganz zu erreichen. Z. B. die Formel für den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks von der Grundlinie $a$ und dem Schenkel $b$ ist $I=\frac{1}{4}a\sqrt{(2b+a)(2b-a)}$ Ist nun $a$ gegen $b$ nur klein, so kann man das Dreieck als einen Kreisausschnitt betrachten, dessen Bogen die Länge $a$ und dessen Radius $= b$ ist, und man hat $I=\frac{1}{2}ab$. Diese Formel wäre dann die Näherungsformel für den Inhalt des Dreiecks. Für $b=30$ Fufs, $a=8$ Fufs hat man

$$I=\tfrac{1}{4}\cdot 8\sqrt{68\cdot 52}=118{,}9335\ \square'$$

näherungsweise $=\frac{1}{2}8\cdot 30 \ldots\ldots = 120{,}0000\ \square'$

Die Annäherung ist geschehen auf $1{,}0665\ \square'$

**Approximations-Werth, Näherungswerth**, der durch Annäherung gewonnene Werth anstatt des wirklichen Werths einer Gröfse (s. d. vor. u. d. folg. Art.)

**Approximativ** (näherungsweise) findet man nur den Werth aller Irrationalzahlen, als $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ u. s. w., ferner die Werthe der transcendenten Zahlen, als aller briggischen Logarithmen mit Ausnahme der für die dekadischen Zahlen; die der trigonometrischen Zahlen mit wenigen Ausnahmen. Durch die Auflösung deren Werthe in Decimalbrüche oder in Kettenbrüche kann man jedoch einer solchen Zahl beliebig nahe kommen.

Z. B. die Ludolph'sche Zahl, das Verhältnifs der Peripherie eines Kreises ist (Vega logarithm. Tafeln) auf 140 Decimalstellen berechnet. Auf die ersten 8 Decimalstellen ist dieselbe 3,14159265...

Ein sehr brauchbarer Näherungswerth derselben ist 3,1416; durch Kettenbruch erhält man:

$\frac{22}{7}=3{,}14258\ldots$; zu grofs um 0,00099

$\frac{333}{106}=3{,}141509$; zu klein um 0,000083

$\frac{355}{113}=3{,}1415929$; zu grofs um 0,000003

also eine für die Praxis sehr bedeutende Annäherung u. s. w.

**Appuls**, der Anstofs zum Durchgang eines Gestirns an ein vor dem Beobachtungs-Instrument angebrachtes Loth.

**Apsiden**, Schreibart auch für Absiden (s. d.)

**Aptom.** Das in der Mitte auf der Polygonseite einer bastionirten Verschanzung errichtete Perpendikel, nach welcher

als Hauptlinie (nächst der Polygonseite) die Bastion in Linien construirt (tracirt) wird. Ist das Polygon ein Viereck, so wird nach Vauban das A. $= \frac{1}{8}$, für ein Fünfeck $= \frac{1}{7}$, für ein Mehr als Fünfeck $= \frac{1}{6}$ der Polygonseite. (Kriegsw.)

Ist *GABH* ein Theil des Umrisses eines Polygons, z. B. eines Sechsecks, *AB* eine der Polygonseiten, so ist *CD* das Aptom $= \frac{1}{6} AB$. Durch den Punkt *D* werden nun die geraden Defens- oder Streichlinien

Fig. 72.



*AE* und *BF*, von welchen $AI = BK = \frac{2}{7} AB$ die Facen, *IF* normal *BF* und *KE* normal *AE* die Flanken und *EF* die Courtine bestimmt. Die Winkel *BAE* und *ABF* zwischen der Polygonseite und den Streichlinien heifsen die abnehmenden Winkel (angles diminnés).

**Aräometer** (von ἀραιός, dünn und μετρεῖν, messen). Ein mathematisch-physikalisches Instrument zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichts einer tropfbaren Flüssigkeit, welches nicht nur für die Wissenschaft von Werth, sondern auch für die gesammte Technik von grofsem Nutzen ist.

Die Einrichtung und Construction des Instruments beruht auf dem hydrostatischen Gesetz, dafs ein in eine tropfbare Flüssigkeit eingetauchter specifisch leichterer fester Körper von der Flüssigkeit an Gewicht durch Einsenkung in dieselbe so viel verdrängt, als er selbst schwer ist, dafs also ein und derselbe Körper um so tiefer sich einsenkt, je dünner die Flüssigkeit ist, und um so weniger, je dichter sie ist.

Ein Instrument oder Apparat zur Bestimmung von Gewichten heifst allgemein eine Waage, und da das A. eingesenkt wird, so nennt man es auch Senkwaage. Das A. wird ferner nach jeder eigenthümlichen Flüssigkeit benannt, für deren Prüfung es ausschliefslich eingerichtet ist. So Alkalimeter für die Prüfung von Laugen, Alkoholometer für die des Weingeistes, Hydrometer für die des Wassers, Sacharometer für die einer Zuckerlösung, Bierwaage für die des Bieres, Salzspindel oder Solwaage für eine Sole.

Man hat dem Princip nach zweierlei A. Das Scalen-A., bei welchem das Gewicht des in die zu prüfende Flüssigkeit eingesenkten Körpers constant bleibt, und das Gewichts-A., bei welchem das Gewicht desselben variabel ist.

1. Scalen-Aräometer.

2. Wenn ein Körper von dem Gewicht *P* in eine Flüssigkeit *F* eingesenkt wird und er verdrängt ein Volumen *V* derselben, so hat dies Vol. *V* von *F* das Gewicht *P*, und die in anderen Flüssigkeiten $F'$, $F''$, $F'''$ ... verdrängten Vol. $V'$, $V''$, $V'''$ ... haben jede das Gewicht *P*. Bezieht man die Vol. $V$, $V'$, $V''$ ... auf dieselbe Raum-Einheit (Kubikfufs, Kubikzoll u. s. w.) $= k$, und bezeichnet man die (absoluten) Gewichte von $k$ für $F$, $F'$, $F''$ ... mit $g$, $g'$, $g''$ ... so hat man $Vg = V'g' = V''g'' = \ldots = P$ und hieraus $V : V' : V'' \ldots = \ldots g'' : g' : g$ d. h. die verdrängten Vol. der Flüssigkeiten verhalten sich umgekehrt wie deren absolute Gewichte von gleichem Volumen.

Denkt man sich unter der Flüssigkeit *F* von dem Vol. *V* destillirtes Wasser, so ist das Gewicht $g$ eines Kubikfufses $k = 66$ preufs. Pfund; dieses Gewicht als Einheit gesetzt und die anderen absoluten Gewichte $g'$, $g''$ ... mit demselben verglichen, giebt die specifischen Gewichte $S'$, $S''$ ... der Flüssigkeiten $F'$, $F''$ ..., nämlich $S' = \frac{g'}{g} = \frac{g' \text{ ℔}}{66 \text{ ℔}}$, $S'' = \frac{g'' \text{ ℔}}{66 \text{ ℔}}$ ....

Die specifischen Gewichte $S'$, $S''$ ... der Flüssigkeit verhalten sich also wie deren absolute Gewichte, und mithin

$$V : V' : V'' \ldots = \ldots S'' : S' : 1$$

3. Denkt man sich als A. einen Cylinder vom Querschnitt *Q*, der Länge *L*, dem Gewicht *G*, so ist die Tiefe $L'$, um welche er sich in eine Flüssigkeit *F* von dem spec. Gew. *S*, also dem abs. Gew. $Sg$ einsenkt,

$$L' = \frac{G}{Q\,Sg} \qquad (1)$$

Die Einsenkungstiefe ist also um so gröfser, nicht nur je geringer das spec. Gew. oder das abs. Gew. von *F*, sondern auch je gröfser *G* des A. und je kleiner *Q*, je gröfser also zugleich *L* des A. ist.

4. Ist das spec. Gew. des A. $= s$, so ist

$$G = Q\,Lg \cdot s$$

$$\text{daher } L' = \frac{Q\,Lgs}{Qg\,S} = L \cdot \frac{s}{S} \qquad (2)$$

Für einerlei Stoff bei prismati-

schen A. ist also die **Einsenkungstiefe** $L'$ **in irgend einer** $F$ **vom Querschnitt des A. unabhängig**; sie wächst nur mit der Länge $L$ des A. und dem spec. Gew. dessen Stoffs.

Hat man Flüssigkeiten $F$ von verschiedenen Dichtigkeiten zu prüfen, gehört zu $F$ von der geringsten Dichtigkeit $S^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ die Einsenkungstiefe $l^{\frac{1}{n}}$, zu der von der gröfsten Dichtigkeit $S^n = n$ die Tiefe $l^n$, so theilt man die Länge $l^{\frac{1}{n}} - l^n$ als Scala in eine Anzahl Theile, versieht diese mit den auf einander folgenden Zahlen, und kann für jede $F$ von zwischen liegender Dichtigkeit diese direct ablesen. Der Deutlichkeit und Genauigkeit wegen ist eine möglichst lange Scala, also eine möglichst grofse Differenz $l^{\frac{1}{n}} - l^n$ erwünscht.

Der aus physikalischen und chemischen Gründen zweckmäfsigste Stoff für ein A. ist **Glas**. Da dies aber schwerer als Wasser ist, so mufs es, wenn man spec. leichtere $F$ als das Glas selbst damit prüfen will, hohl und unten geschlossen sein, damit innerhalb die bei Weitem leichtere Luft den gröfseren Theil des Volumens im A. ausmache. Man hat also das spec. Gew. $s$ des A. in seinem Belieben, und mit dem möglich gröfsten $s$ und dem möglich gröfsten $L$ kann $l^{\frac{1}{n}} - l^n$ beliebig grofs erhalten werden.

5. Da die Einsenkungstiefe $L'$ nie gröfser werden kann, als die Länge $L$ des A., so **mufs** $\frac{s}{S}$ **ein ächter Bruch sein**.

Also $s < S^{\frac{1}{n}}$, d. h. kleiner als $\frac{1}{n}$ des spec. Gew. 1 des Wassers; und da diese Differenz nur äufserst gering zu sein braucht, so soll das spec. Gew. $s$ des A. $= \frac{1}{n}$ als Grenzwerth genommen werden. Dann ist nach No. 4

$$L' = \frac{1}{n} \frac{L}{S}$$

Für $S = \frac{1}{n}$ wird $L' = L$

„ $S = \frac{2}{n}$ „ $L' = \frac{1}{2} L$

„ $S = \frac{3}{n}$ „ $L' = \frac{1}{3} L$

Für $S = \frac{m}{n}$ wird $L' = \frac{1}{m} L$

„ $S = \frac{n}{n} = 1$ „ $L' = \frac{1}{n} L$

„ $S = \frac{2n}{n} = 2$ „ $L' = \frac{1}{2n} L$

„ $S = n$ „ $L' = \frac{1}{n^2} L$

**Bei gleichen Abständen der spec. Gew. von Flüssigkeiten nehmen die Einsenkungstiefen also ungleichmäfsig ab.**

Setzt man das geringste spec. Gew. der zu prüfenden $F = \frac{1}{4}$, also das des A. ebenfalls $= \frac{1}{4}$, die Länge $L$ des A. $= 16''$, so hat man für

| | | |
|---|---|---|
| $S = \frac{1}{4}$, | $L = 16''$ | Differenz $8''$ |
| $S = \frac{1}{2}$, | $L = 8''$ | |
| $S = \frac{3}{4}$, | $L = 5\frac{1}{3}''$ | „ $2\frac{2}{3}''$ |
| $S = 1$, | $L = 4''$ | „ $1\frac{1}{3}''$ |
| $S = 1\frac{1}{4}$, | $L = 3\frac{1}{5}''$ | „ $\frac{4}{5}''$ |
| $S = 1\frac{1}{2}$, | $L = 2\frac{2}{3}''$ | „ $\frac{8}{15}''$ |
| $S = 1\frac{3}{4}$, | $L = 2\frac{2}{7}''$ | „ $\frac{8}{21}''$ |
| $S = 2$, | $L = 2''$ | „ $\frac{2}{7}''$ |
| $S = 3$, | $L = 1\frac{1}{3}''$ | „ $\frac{2}{3}''$ |
| $S = 4$, | $L = 1''$ | „ $\frac{1}{3}''$ |

Aus den Differenzen ersieht man, dafs die Abnahme der Einsenkungstiefen von den leichteren zu den schwereren $F$ hin in einem sehr bedeutenden Verhältnifs geschieht.

6. Nimmt man einen Cylinder von dem Gew. $P$, taucht ihn in Wasser, markirt die Einsenkungstiefe $l$ in der Höhe des Wasserspiegels, so hat das verdrängte Wasser das Gew. $P$. Bezeichnet man mit $q$ den Querschnitt des Cylinders, so ist $qlg = P$.

Für eine $F$ von doppelter Schwere des Wassers, also von dem abs. Gew. $2g$, würde für $P$ das Vol. nur die Hälfte $= \frac{1}{2} lq$, also auch die Einsenkungstiefe nur die Hälfte $= \frac{1}{2} l$ betragen. Bezeichnet man daher die Wassermarke mit einer Zahl, z. B. 10, theilt die Tiefe $l$ in 10 gleiche Theile, bezeichnet diese mit 9, 8, 7 . . . 1 nach abwärts, so verhalten sich die Einsenkungstiefen bis zu den Theilstrichs-Zahlen wie diese Zahlen und wie die verdrängten Wassermengen, also die Zahlen umgekehrt wie die abs. Gewichte und die Dichtigkeiten der $F$.

**Das spec. Gew. des Wassers** $= 1$ **gesetzt, giebt eine** $F$, **in welcher das A. eingesunken ist, bis zum**

| | | | | | | Differenzen der Gew. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Theilstrich | 1 | das Vol. | =0,1 | spec. Gew. | =10 | |
| | | | | | | 5 |
| „ | 2 | „ „ | =0,2 | „ „ | = 5 | |
| | | | | | | 1,66 . . . |
| „ | 3 | „ „ | =0,3 | „ „ | = 3,33 . . . | |
| | | | | | | 0,83 . . . |
| „ | 4 | „ „ | =0,4 | „ „ | = 2,5 | |
| | | | | | | 0,5 |
| „ | 5 | „ „ | =0,5 | „ „ | = 2 | |
| | | | | | | 0,33 . . . |
| „ | 6 | „ „ | =0,6 | „ „ | = 1,66 . . . | |
| | | | | | | 0,23 |
| „ | 7 | „ „ | =0,7 | „ „ | = 1,43 . . . | |
| | | | | | | 0,18 |
| „ | 8 | „ „ | =0,8 | „ „ | = 1,25 | |
| | | | | | | 0,14 |
| „ | 9 | „ „ | =0,9 | „ „ | = 1,11 . . . | |
| | | | | | | 0,11 |
| „ | 10 | „ „ | =1 | „ „ | = 1,00 . . . | |

Aus den Differenzen ersieht man, wie aus 5, daſs Abtheilungen für gleich weit abstehende spec. Gewichte sehr ungleich und zwar von oben bei 10, nach unten bei 0 immer kürzer werden würden.

Taucht man dasselbe A. in eine *F* von dem halben spec. Gew., also dem absoluten $\frac{1}{2}g$, so hat das verdrängte Vol. der *F* wieder das Gew. *P*, es ist also $= 2\,gl$.

Setzt man daher dieselbe gleiche Theilung nach oben fort, bezeichnet die Theilstriche mit 11, 12, 13 . . . 20 . . ., so verhalten sich die Einsenkungstiefen bis zu den Zahlen und die verdrängten Volumina wie die Zahlen, und die Gew. der *F* umgekehrt wie dieselben.

Es ist nämlich, wenn in eine *F* das A. eingesunken ist, bis zu dem

| | | | | | | Differenz. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Theilstrich | 11 | das Vol. | =1,1 | das spec. Gew. | $=\frac{10}{11}$=0,909 . . . | |
| | | | | | | 0,076 |
| „ | 12 | „ „ | =1,2 | „ „ „ | $=\frac{10}{12}$=0,833 . . . | |
| | | | | | | 0,063 |
| „ | 13 | „ „ | =1,3 | „ „ „ | $=\frac{10}{13}$=0,770 | |
| . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | |
| „ | 19 | „ „ | =1,9 | „ „ „ | $=\frac{10}{19}$=0,526 | |
| | | | | | | 0,026 |
| „ | 20 | „ „ | =2,0 | „ „ „ | $=\frac{10}{20}$=0,500 | |

Auch hier würden Abtheilungen für gleich weit abstehende Gewichtsverminderungen, wie ad 5 gezeigt, nach oben zu immer länger werden.

Man nennt A. mit gleich weiten Abtheilungen, weil sie das von denselben verdrängte Volumen einer *F* angeben, Volumeter.

7. Man sieht aus dem Vorigen, daſs bei dem Eintauchen des A. in schwere *F* wegen der so geringen Einsenkungstiefe das Instrument wenig stabil ist, schwer zu handhaben und die Ablesung der Tiefen unsicher ist. Geht man auf die Formel $L'=\frac{G}{QSg}$ (1, No. 8) zurück, so kann man ein möglichst groſses Gew. *G* des A. mit einem möglichst kleinen *Q* desselben dadurch vereinigen, daſs man das Vol. $V^n$ des A., welches von der schwersten der zu untersuchenden *F* vom spec. Gew. $S^n = n$ verdrängt werden muſs, damit $nV^n g = G$ werde, aus einer gröſseren mit Quecksilber beschwerten Kugel bestehen läſst, und von dieser ab einen leichten, dünnen Cylinder fortsetzt.

Es sei $G^n$ das Gew. dieser Kugel, $V^n$ deren Vol., so ist das Gew. des Scalenrohrs $= G - G^n = g^n$, dessen Länge sei *l*, dessen Querschnitt *q*, dessen spec. Gew.

$$s^n = \frac{g^n}{qlg} \qquad (3)$$

Soll nun bei der $F^n$ von dem spec. Gew. *n* nur die Kugel, bei der $F^{\frac{1}{m}}$ von dem spec. Gew. $\frac{1}{m}$ (als Grenzwerth) die ganze Länge *l* des Rohrs eintauchen, so hat man

$$n \cdot V^n \cdot g = G \qquad (4)$$

$$\frac{1}{m}\,(V^n + ql) \cdot g = G \qquad (5)$$

woraus

$$l = \frac{V^n}{q} \cdot \frac{n - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} = (nm - 1) \cdot \frac{V^n}{q} \qquad (6)$$

In eine $F$ von dem spec. Gew.

$$S\frac{k}{m}=\frac{k}{m}$$

taucht das Rohr ein um die Tiefe $l'$, so dafs

$$(V^n+ql')\frac{k}{m}g=G$$

$$=(V^n+ql)\frac{1}{m}g$$

$$\text{woraus } l'=\frac{1}{k}l-\frac{k-1}{k}\frac{V^n}{q}$$

für $k=m$, also für destillirtes Wasser hat man

$$l'=\frac{1}{m}l-\frac{m-1}{m}\cdot\frac{V^n}{q} \qquad (7)$$

8. Es sei $r$ der Halbmesser der Röhre, $sr$ der Halbmesser der Kugel, dann ist $q=r^2\pi$

$$V^n=\tfrac{4}{3}s^3r^3\pi, \text{ mithin}$$

$$\frac{V^n}{q}=\tfrac{4}{3}s^3r \qquad (8)$$

$$l=\tfrac{4}{3}(nm-1)s^3r$$

hieraus

$$nm=\tfrac{3}{4}\cdot\frac{l}{s^3r}+1 \qquad (9)$$

je gröfser $l$ und je kleiner $r$, desto gröfser wird $n\cdot m$, desto gröfser ist der Abstand der geringsten und gröfsten Dichtigkeit zweier $F$, die man mit demselben A. prüfen kann.

Setzt man $l$, wie ad 5 = 16 Zoll, $r$ mindestens $\frac{1}{4}$ Zoll, damit man deutliche Zahlen schreiben kann, so ist

$$n\cdot m=\frac{48}{s^3}+1 \qquad (10)$$

Nimmt man $s=1$, d. h. den Halbmesser der Kugel = dem der Röhre, so ist $n\cdot m=49$, und man kann $F$ von $S=7$ bis zu $S=\frac{1}{7}$ mit demselben A. prüfen.

Die Einsenkungstiefe $l'$ für destillirtes Wasser wäre nach 7, No. 7 $=3\frac{1}{3}$ Zoll, die obere übrige Länge $12\frac{2}{3}$ Zoll, so dafs leichtere $F$ viel genauer zu bestimmen sind als schwere.

9. Man kann die Theorie des A. in Beziehung auf die in der Natur uns gegebenen tropfbar flüssigen Stoffe in engere Grenzen schliefsen:

Nach Schubarth's Tabellen hat unter allen dort aufgeführten tropfbaren Flüssigkeiten der Kohlenwasserstoff $H^4C^2$ das geringste spec. Gew. $=0{,}6270$ mithin das geringste abs. Gew. $=0{,}627\times 66$ ℔ $=$ 41,382 ℔, und mit Ausnahme von Quecksilber das Chlor-Arsenik das gröfste spec. Gew. $=6{,}300$ mithin das gröfste abs. Gew. 415,8 ℔.

Innerhalb dieser Grenzen, nämlich für spec. Gew. von 0,627 bis 6,300 mit der Differenz 5,673; und für absolute Gew. von 41,382 bis 415,800 ℔ mit der Differenz 374,418 ℔ hat man also nur nöthig, das A. zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten einzurichten.

10. Da die leichteste $F$ von 0,627 noch mufs gemessen werden können, das A. also nicht bis zum obersten Grenzpunkt einsinken darf (übrigens ist dies nur theoretisch richtig, praktisch auszuführen jedoch noch nicht gelungen: ein Körper schwimmt entweder, d. h. er ist leichter als die $F$, oder er geht unter, d. h. er ist schwerer als die $F$. Einen festen Körper von solcher Beschaffenheit zu erzeugen, der als gleich spec. schwer mit $F$ in jeder Tiefe von $F$ ruhen bleibt, ist noch nicht möglich gewesen), so soll das geringste $S$ für $F=\frac{1}{m}=0{,}600$ festgesetzt werden; das gröfste $S=n$ bleibt 6,300.

Dann ist $m=\frac{10}{6}$

$$n=6{,}3$$

also $\qquad nm=10{,}5$

(aus 10, No. 8) $s^3=\frac{48}{9{,}5}=5\frac{1}{19}$

daher $\qquad s=1{,}71$

Bei $\frac{1}{4}''=3'''$ Halbmesser oder $6'''$ Durchmesser der Scalenröhre, wird der Durchmesser der Kugel $=10\frac{1}{4}'''$.

Und aus 6, No. 7 oder aus 8, No. 8:

$$\frac{V^n}{q}=1\tfrac{11}{16}''=20{,}2'''$$

das Volumen der Kugel

$$V^n=\tfrac{4}{3}\cdot\left(\frac{5\frac{1}{8}}{12}\right)^3\cdot\pi \text{ cub.}''=0{,}3263 \text{ cub.}''$$

das Volumen des Rohrs

$$q\cdot l=(\tfrac{1}{4})^2\pi\cdot 16 \qquad =3{,}1416 \text{ „}$$

das Volumen des A. $\qquad =3{,}4679$ cub.''

Das spec. Gew. des A. ist nach 5, No. 7 $=\frac{1}{m}=0{,}6$; das Gew. des cub.'' Wasser $=g=1\frac{2}{9}$ Loth, daher das Gew. $G$ des A. $=2{,}5431$ Loth.

Das Gew. der schwersten $F$ von $S=6{,}3$ welches von dem Vol. $V^n$ der Kugel verdrängt wird,

$$0{,}3263\cdot 6{,}3\cdot 1\tfrac{2}{9} \text{ Loth} = 2{,}5125 \text{ Loth.}$$

Der Mantel der Röhre ist

$$=16\times 1{,}5708=25{,}1328\,\square''$$

der Umfang der Kugel

$$=4\left(\frac{5\frac{1}{8}}{12}\right)^2\pi = \quad 2{,}2922 \text{ „}$$

der Umfang des A. $\qquad =27{,}425\,\square''$

Das Glas hat das spec. Gew. = 3;

1 cub.'' Glas wiegt also $3\frac{1}{3}$ Loth, daher die Stärke des Glases

$$= \frac{2,5431 \cdot 12'''}{3\frac{1}{3} \cdot 27,425} = \frac{1}{3}'''$$

Die Kugel würde also bei der Stärke des Glases von $\frac{1}{3}'''$ keine Beschwerung durch Quecksilber etc. erleiden.

Die Einsenkungstiefe $l'$ für Wasser $(S=1)$ erhält man aus 7, No. 7, wenn man für

$$\frac{V^n}{q} = 20,2''' \text{ und für } m = \frac{10}{6} \text{ setzt:}$$

$$l' = 106,12''' = 8''\ 10,12'''$$

so daſs für die Scala der leichteren $F$ von $S=1$ bis $S=0,6$ die kleinere Länge $7''\ 1,88'''$ sich ergiebt, während die schweren $F$ von $S=1$ bis $S=6,3$ die gröſsere Länge zur Ablesung erhalten, aber auch in einem verhältniſsmäſsig viel gröſseren summarischen Abstande der $S$, so daſs dennoch diese $S$ nicht so genau bestimmt werden als die oberen.

11. In einer $F$ von dem spec. Gew. $p$ taucht das Rohr ein um die Tiefe $l'$, so daſs

$$(V^n + ql')p \cdot g = G = (V^n + ql)\frac{1}{m}g \quad (11)$$

woraus

$$l' = \frac{l}{mp} - \frac{p - \frac{1}{m}}{p} \cdot \frac{V^n}{q} \quad (12)$$

Die Werthe für die bekannten Gröſsen aus 10 eingesetzt, giebt:

$$l' = \frac{0,6 \cdot 16''}{p} - \frac{p - 0,6}{p} \cdot \frac{20,2''}{12}$$

Für $p=6,3$ wird $l'=0$, wie die Annahme, daſs das Maximum von $p=6,3$ betragen solle, es bedingt.

Für $p=5$ wird $l'=0,44''=5,28'''$; diese Länge ist für einen Abstand von 1,3 der $S$ von $F$, also von 85,8 Pfund pro cub.' an abs. Gew. viel zu gering, es können so schwere $F$ mit diesem A. nicht untersucht werden.

12. Verzichtet man also auf die Prüfung dieser schwersten $F$, so erhält man für eine $F^n$, wo $n$ geringer ist, ein gröſseres $V^n$ und gewinnt, wenn von diesem kleineren $n$ die Scala anfängt, für $F$ von geringerem summarischen Abstand an Schwere dieselbe Länge $l$ der Scala.

Für das obige $l=16''$ und $r=\frac{1}{4}''$, also $q=\frac{1}{16}\pi=0,1963$ (wofür hier 0,2 □'' genommen werden soll) hat man aus 6, No. 7, wenn nach No. 10 $m=\frac{10}{6}$ verbleibt:

für $n=6,3$; $V^n = \frac{0,2 \cdot 16}{9,5} = 0,33 \ldots$ cub.''

„ $n=4$; $V^n = \frac{0,2 \cdot 16}{5\frac{2}{3}} = 0,56 \ldots$ „

„ $n=2$; $V^n = \frac{0,2 \cdot 16}{3\frac{2}{3}} = 0,87 \ldots$ „

u. s. w.

Dasselbe günstige Ergebniſs für die Vermehrung von $V^n$ findet statt, wenn man das spec. Gew. $\frac{1}{m}$ vermehrt, also $m$ vermindert, und in noch höherem Maaſse, wenn zugleich $n$ und $m$ vermindert wird.

13. Diese Betrachtung führt offenbar auf die Anordnung, daſs man die leichteren $F$ durch ein anderes A. miſst, als die schwereren.

Theilt man die Differenz $6,3-0,6=5,7$ der gröſsten und geringsten $S$ aller $F$ in 3 gleiche Theile, und nimmt ein A. nämlich ein

$A'$ für $F$ von $S=6,3$ bis 4,4; Differenz 1,9
$A''$ „ „ „ „ $=4,4$ „ 2,5; „ 1,9
$A'''$ „ „ „ „ $=2,5$ „ 0,6; „ 1,9

so hat man für dieselben

$l=16''$, $r=\frac{1}{4}''$

| Benennung | | für $A'$ | für $A''$ | für $A'''$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{m}$ | = | 4,4 | 2,5 | 0,6 |
| $n$ | = | 6,3 | 4,4 | 2,5 |
| $n \cdot m$ | = | $\frac{63}{44}$ | 1,76 | $\frac{25}{6}$ |
| $s^3$ | = | $\frac{2112}{19}$ | $\frac{1200}{19}$ | $\frac{288}{19}$ |
| $s$ | = | 4,8082 | 3,9824 | 2,4748 |
| $\frac{V^n}{q}$ | = | $\frac{704}{19} = 37\frac{1}{19}''$ | $\frac{400}{19} = 21\frac{1}{19}''$ | $\frac{96}{19} = 5\frac{1}{19}''$ |
| $q$ | = | 0,19635 □'' | 0,19635 □'' | 0,19635 □'' |
| $V^n$ | = | 7,2753 cub.'' | 4,1337 cub.'' | 0,9921 cub.'' |
| $ql$ | = | 3,1416 cub.'' | 3,1416 cub.'' | 3,1416 cub.'' |
| $V^n + ql$ | = | 10,4169 cub.'' | 7,2753 cub.'' | 4,1337 cub.'' |

| Benennung | | für $A'$ | für $A''$ | für $A'''$ |
|---|---|---|---|---|
| $G$ | = | 56,0198 Loth | 22,2301 Loth | 3,0314 Loth |
| Umfang von $V^n$ | = | 18,1572 □″ | 12,4559 □″ | 4,8106 □″ |
| „ der Röhre | = | 25,1328 □″ | 25,1328 □″ | 25,1328 □″ |
| „ des A. | = | 43,2900 □″ | 37,5887 □″ | 29,9434 □″. |
| erforderliche Glasstärke der Röhre | = | ½ Linie | ½ Linie | ½ Linie |
| Gew. der Röhre $ql$ | = | 2,56 Loth | 2,56 Loth | 2,56 Loth |
| Gew. der Kugel $V^n$ inclusive Quecksilberfüllung | = | 53,46 Loth | 19,67 Loth | 0,47 Loth |

Ist für ein A. das Minimum des spec. Gew. $s$ einer $F$, welche geprüft werden kann, $= \frac{1}{m}$, so taucht dies A. in eine $F$ von dem spec. Gew. $p$ ein (s. 12, No. 11)

$$l' = \frac{l}{mp} - \frac{p - \frac{1}{m}}{p} \cdot \frac{V^n}{q} \quad (13)$$

Die bekannten Gröſsen aus der obigen Tabelle eingesetzt, giebt:

$$\text{für das } A' : l' = \frac{704}{19}\left(\frac{63}{10p} - 1\right)$$

$$\text{für das } A'' : l' = \frac{400}{19}\left(\frac{44}{10p} - 1\right)$$

$$\text{für das } A''' : l' = \frac{96}{19}\left(\frac{25}{10p} - 1\right)$$

Für $p=5$ war in dem A. No. 11: $l'=0,44''$ für das $A'$ erhält man $l'=9,628$ Zoll, woraus der bedeutende Unterschied zwischen beiden A. hervorgeht, wenn sehr schwere $F$ geprüft werden sollen.

Für $p=0,7$ erhält man bei dem A. No. 11: $l'=12,9''$; für $p=0,6$ ist sie daselbst 16″, mithin für den obersten Abstand der spec. Gew. von 0,1 die Länge 3,1 Zoll.

Für das $A'''$ erhält man $l'=13''$; mithin den oberen Abstand 3″, also dieselbe Länge, wie bei jenem A., und man ersieht den Vortheil, den es hat, wenn man für $F$ von nur kleinen Differenzen an Schwere ein A. construirt.

Die Einsenkungstiefen $l'$ ergeben sich für $F$ von dem spec. Gew. in den Abständen 0,1 wie folgt:

1. Bei dem $A'$

| spec. Gew. | Eintauchungstiefe über $V^n$ | Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$ |
|---|---|---|
| 6,3 | $l' =$ 0,0000 | |
| 6,2 | $l' =$ 0,5976 | 0,5976 |
| 6,1 | $l' =$ 1,2148 | 0,6172 |
| 6,0 | $l' =$ 1,8526 | 0,6378 |
| 5,9 | $l' =$ 2,5120 | 0,6594 |
| 5,8 | $l' =$ 3,1941 | 0,8822 |
| 5,7 | $l' =$ 3,9002 | 0,7061 |
| 5,6 | $l' =$ 4,6316 | 0,7313 |
| 5,5 | $l' =$ 5,3895 | 0,7579 |
| 5,4 | $l' =$ 6,1754 | 0,7859 |
| 5,3 | $l' =$ 6,9911 | 0,8157 |
| 5,2 | $l' =$ 7,8381 | 0,8470 |
| 5,1 | $l' =$ 8,7183 | 0,8802 |
| 5,0 | $l' =$ 9,6337 | 0,9154 |
| 4,9 | $l' =$ 10,5865 | 0,9528 |
| 4,8 | $l' =$ 11,5789 | 0,9924 |
| 4,7 | $l' =$ 12,6137 | 1,0348 |
| 4,6 | $l' =$ 13,6934 | 1,0797 |
| 4,5 | $l' =$ 14,8210 | 1,1276 |
| 4,4 | $l' =$ 16,0000 | 1,1790 |

2. Bei dem $A''$

| spec. Gew. | Eintauchungstiefe über $V^n$ | Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$ |
|---|---|---|
| 4,4 | $l' =$ 0,00000 | |
| 4,3 | $l' =$ 0,48960 | 0,48960 |
| 4,2 | $l' =$ 1,00251 | 0,51291 |
| 4,1 | $l' =$ 1,54044 | 0,53793 |
| 4,0 | $l' =$ 2,10526 | 0,56482 |
| 3,9 | $l' =$ 2,69906 | 0,59380 |
| 3,8 | $l' =$ 3,32410 | 0,82504 |
| 3,7 | $l' =$ 3,98293 | 0,65883 |
| 3,6 | $l' =$ 4,67836 | 0,69543 |
| 3,5 | $l' =$ 5,41353 | 0,73517 |

| spec. Gew. | Eintauchungs-tiefe über $V^n$ | Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$ |
|---|---|---|
| | | 0,77842 |
| 3,4 | $l' =$ 6,19195 | |
| | | 0,82559 |
| 3,3 | $l' =$ 7,01754 | |
| | | 0,87720 |
| 3,2 | $l' =$ 7,89474 | |
| | | 0,93378 |
| 3,1 | $l' =$ 8,82852 | |
| | | 0,99604 |
| 3,0 | $l' =$ 9,82456 | |
| | | 1,06473 |
| 2,9 | $l' =$ 10,88929 | |
| | | 1,14078 |
| 2,8 | $l' =$ 12,03007 | |
| | | 1,22529 |
| 2,7 | $l' =$ 13,25536 | |
| | | 1,31954 |
| 2,6 | $l' =$ 14,57490 | |
| | | 1,42500 |
| 2,5 | $l' =$ 16,00000 | |

3. Bei dem $A'''$

| spec. Gew. | Eintauchungs-tiefe über $V^n$ | Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$ |
|---|---|---|
| 2,5 | $l' =$ 0,00000 | |
| | | 0,21053 |
| 2,4 | $l' =$ 0,21053 | |
| | | 0,22883 |
| 2,3 | $l' =$ 0,43936 | |
| | | 0,24964 |
| 2,2 | $l' =$ 0,68900 | |
| | | 0,27341 |
| 2,1 | $l' =$ 0,96241 | |
| | | 0,30075 |
| 2,0 | $l' =$ 1,26316 | |
| | | 0,33241 |
| 1,9 | $l' =$ 1,59557 | |
| | | 0,36934 |
| 1,8 | $l' =$ 1,96491 | |
| | | 0,41280 |
| 1,7 | $l' =$ 2,37771 | |
| | | 0,46440 |
| 1,6 | $l' =$ 2,84211 | |
| | | 0,52631 |
| 1,5 | $l' =$ 3,36842 | |
| | | 0,60150 |
| 1,4 | $l' =$ 3,96992 | |
| | | 0,69405 |
| 1,3 | $l' =$ 4,66397 | |
| | | 0,80971 |
| 1,2 | $l' =$ 5,47368 | |
| | | 0,95694 |
| 1,1 | $l' =$ 6,43062 | |
| | | 1,14833 |
| 1,0 | $l' =$ 7,57895 | |
| | | 1,40351 |
| 0,9 | $l' =$ 8,98246 | |
| | | 1,75439 |
| 0,8 | $l' =$ 10,73685 | |
| | | 2,25563 |
| 0,7 | $l' =$ 12,99248 | |
| | | 3,00752 |
| 0,6 | $l' =$ 16,00000 | |

14. Aus den Differenzenreihen der drei Tabellen ist zu ersehen, dafs die Theilunge-Unterschiede um so gleichförmiger sind, je schwerer, und um so ungleichförmiger, je leichter die abzuwägenden *F* sind.

Bei dem $A'$ beträgt von den *S* 6,3 bis 6,2 die unterste Theilung $0,5976'' = 7\frac{1}{6}'''$. Es iet diese Länge recht gut in 10 Theile zu theilen, um die *S* auf Hundertel anzugeben, und wenn man zugleich erwägt, dafs die folgende Theilung zwischen 6,2 und 6,1 nur $0,6172'' = 7,4'''$ beträgt, so kann die Theilung, nachdem man den Theilstrich für das $S = 6,25$ festgestellt hat, in der oberen und in der unteren Hälfte zwischen 6,30 bis 6,25 und zwischen 6,25 bis 6,20 in gleichen Abständen geschehen.

Bei dem $A''$ beträgt die unterste Theilung nur $0,4896'' = 5\frac{7}{8}'''$, bei dem $A'''$ dieselbe nur $0,2105'' = 2\frac{1}{2}'''$ und hier würde also eine fernere Eintheilung zu Ablesung von Hunderteln zu klein ausfallen.

Sollten die 3 A. in No. 13 zu Normal-A. für alle *F* eingerichtet werden und hätten die untersten der leichteren *F* mit den untersten der schwersten *F* einerlei Anspruch auf Genauigkeit bei einerlei Differenz der *S*, so müfsten die $A'$; $A''$; $A'''$ so viele gleich weit an *S* von einander abstehende *F* zu wägen erhalten, wie ungefähr das Verhältnifs $7\frac{1}{6} : 5\frac{7}{8} : 2\frac{1}{2} = 172 : 141 : 60$ angiebt, also 26,22 und 9, d. h.

$A'$ die *F* der *S* von 6,3 bis 3,7 Differenz 2,6
$A''$ die *F* der *S* von 3,7 bis 1,5 „ 2,2
$A'''$ die *F* der *S* von 1,5 bis 0,6 „ 0,9
in Summa *S* von 6,3 bis 0,6 „ = 5,7

Die letzte Theilung würde dann in den 3 A. so ziemlich gleich und zwischen $2\frac{1}{2}'''$ und $7\frac{1}{6}'''$ betragen.

Allein man kann mit der Angabe auf Hundertel nicht wohl zufrieden sein, die *S* müssen bis auf Tausendtel sicher angegeben werden können, und daher sind mehr als 3 Normal-A. einzuführen.

Die schwerste *F* hat die $S = 6,300$
die leichteste *F* nach No. 10 als Grenzwerth $S = 0,600$
summarische Differenz $= 5,700$

Nimmt man der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen 10 Normal-A. als nothwendig, welche Tausendtel nachweisen sollen, so hat man 5700 Theilungen, und auf jedes A. im Mittel 570 Theilungen.

Der unterste Körper vom Volum $V^n$ hat nicht nöthig, eine Kugel zu sein; er sei ein Gefäfs von dem Volum $= V$.

Die Scalenröhre soll zur bequemen Handhabung die Länge $l = 10'' = 120'''$ erhalten, als Cylinder 4''' Durchmesser haben; dann ist ihr Querschnitt $q = 12,5664$ □''' und ihr Volum $ql = 1508$ cub.'''

Das A. in $F$ von der schwersten $S=n$ habe die Einsenkungstiefe $=0$; das in ihr von A. verdrängte Volnm ist also $=V$

In der $F$ von der leichtesten $S=m$ sei (als Grenzwerth) die Tiefe $=l=120'''$

Aus 10 nnd 11 hat man ferner:

$$nV=m(V+ql) \qquad (1)$$

$$l=\left(\frac{n}{m}-1\right)\frac{V}{q} \qquad (2)$$

$$\frac{n}{m}=\frac{lq}{V}+1 \qquad (3)$$

$$V=\frac{m}{n-m}\cdot ql \qquad (4)$$

$$\frac{V}{q}=\frac{m}{n-m}\cdot l \qquad (5)$$

Die Einsenkungstiefe ($l'$) für eine $F$ von der $S=p$

$$l'=\frac{m}{p}\,l-\left(1-\frac{m}{p}\right)\frac{V}{q}=\frac{m}{p}\left(l+\frac{V}{q}\right)-\frac{V}{q}$$

$$=\frac{m}{n-m}\,l\left(\frac{n}{p}-1\right) \qquad (6)$$

Will man in allen 10 A. die untersteu Theilnngen gleich grofs haben, und mau schreibt deshalb für $p$ den Werth $n-1$, dann erhält man für diese

$$l''=\frac{m}{(n-m)(n-1)}\,l=120\cdot\frac{m}{(n-m)(n-1)} \qquad (7)$$

für das A. No. 1 ist $n=6300$; $m$ nnbekannt,

für das A. No. 10 ist $m=600$; $n$ ist unbekannt.

Es entsteht eine quadratische diophantische Gleichung, es mufs probirt werden, nnd dies führt hier ohne die für jedes der 10 A. anzusetzende dioph. Gl. leichter anm Ziel.

15. Für die 10 Normal-A. mögen vorläufig folgende Bestimmnugen gelten:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. No. 1 | wäge | $F$ | von | $S=6{,}300$ | bis | $S=5{,}700$; | Differenz 0,600 |
| A. No. 2 | „ | $F$ | „ | $S=5{,}700$ | „ | $S=5{,}110$ | „ 0,590 |
| A. No. 3 | „ | $F$ | „ | $S=5{,}110$ | „ | $S=4{,}530$ | „ 0,580 |
| A. No. 4 | „ | $F$ | „ | $S=4{,}530$ | „ | $S=3{,}960$ | „ 0,570 |
| A. No. 5 | „ | $F$ | „ | $S=3{,}960$ | „ | $S=3{,}390$ | „ 0,570 |
| A. No. 6 | „ | $F$ | „ | $S=3{,}390$ | „ | $S=2{,}820$ | „ 0,570 |
| A. No. 7 | „ | $F$ | „ | $S=2{,}820$ | „ | $S=2{,}250$ | „ 0,570 |
| A. No. 8 | „ | $F$ | „ | $S=2{,}250$ | „ | $S=1{,}690$ | „ 0,560 |
| A. No. 9 | „ | $F$ | „ | $S=1{,}690$ | „ | $S=1{,}140$ | „ 0,550 |
| A. No. 10 | „ | $F$ | „ | $S=1{,}140$ | „ | $S=0{,}600$ | „ 0,540 |

Da aber die obersten $S$ jedes A. die Grenzwerthe sind, d. h. bei welchen die A. gänzlich eintauchen, was, wie ad 10 aus einander gesetzt, praktisch nicht ausführbar ist, so würden die $F$ der zunächst obersten $S$ in jedem A. nicht abgewägt werden können, es müssen daher die $S$ der $F$ in den auf einander folgenden A. sich übergreifen, eine Nothwendigkeit, die bei den 3 A. in No. 13 nnberücksichtigt gelassen worden ist. Dieses Uebergreifen soll um 25 Einheiten geschehen und die 10 Normal-A. würden dann abwägen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. No. 1 | wäge | $F$ | von | $S=6{,}300$ | bis | $S=5{,}675$ |
| A. No. 2 | „ | $F$ | „ | $S=5{,}700$ | „ | $S=5{,}085$ |
| A. No. 3 | „ | $F$ | „ | $S=5{,}110$ | „ | $S=4{,}505$ |
| A. No. 4 | „ | $F$ | „ | $S=4{,}530$ | „ | $S=3{,}935$ |
| A. No. 5 | „ | $F$ | „ | $S=3{,}960$ | „ | $S=3{,}365$ |
| A. No. 6 | „ | $F$ | „ | $S=3{,}390$ | „ | $S=2{,}795$ |
| A. No. 7 | „ | $F$ | „ | $S=2{,}820$ | „ | $S=2{,}225$ |
| A. No. 8 | „ | $F$ | „ | $S=2{,}250$ | „ | $S=1{,}665$ |
| A. No. 9 | „ | $F$ | „ | $S=1{,}690$ | „ | $S=1{,}115$ |
| A. No. 10 | „ | $F$ | „ | $S=1{,}140$ | „ | $S=0{,}600$ |

Fafst man 10 $S$ in Summa mit 0,010 als eine Theilung zusammmen, so erhält man nach Formel 7 die untersten Theilungen für

$$\text{A. No. } 1=\frac{5{,}675\cdot 120}{0{,}625\cdot 629}=1{,}732$$

$$\text{A. No. } 2=\frac{5{,}085\cdot 120}{0{,}615\cdot 569}=1{,}744$$

$$\text{A. No. } 3=\frac{4{,}505\cdot 120}{0{,}605\cdot 510}=1{,}752$$

$$\text{A. No. } 4=\frac{3{,}935\cdot 120}{0{,}595\cdot 452}=1{,}756$$

$$\text{A. No. } 5=\frac{3{,}365\cdot 120}{0{,}595\cdot 395}=1{,}718$$

$$\text{A. No. } 6=\frac{2{,}795\cdot 120}{0{,}595\cdot 338}=1{,}668$$

$$\text{A. No. } 7=\frac{2{,}225\cdot 120}{0{,}595\cdot 281}=1{,}597$$

$$\text{A. No. } 8=\frac{1{,}665\cdot 120}{0{,}585\cdot 224}=1{,}525$$

$$\text{A. No. } 9 = \frac{1,115 \cdot 120}{0,575 \cdot 168} = 1,385$$

$$\text{A. No. } 10 = \frac{0,600 \cdot 120}{0,540 \cdot 113} = 1,180$$

Bei dem A. No. 1 wären demnach die *F* von den *S* = 6,290 bis 6,300 auf eine Länge von 1,732‴ abzuwägen, bei dem A. No. 10 die *F* von den *S* = 0,600 bis 0,610 auf eine Länge von 1,18‴. Da nun schwere und leichte *F* einerlei Anspruch auf Genauigkeit haben, so ist im Folgenden die Differenz beider Längen durch Probiren vertheilt worden. Wenn dies nicht ganz genau geschehen ist, so liegt es nur darin, dafs ich mir zugleich die Aufgabe stellte, die obersten und untersten Einheiten in jedem A. durch 25 theilbar zu machen.

Demnach haben die 10 A. folgende Eigenschaften

| Aräometer No. | gröfstes spec. Gew. | geringstes spec. Gew. | Summa der Einheiten | Grenzwerth bei 10″ Eintauchung | unterste Theilung Linien |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,300 | 5,650 | 650 | 5,625 | 1,60 |
| 2 | 5,650 | 5,000 | 650 | 4,975 | 1,57 |
| 3 | 5,000 | 4,375 | 625 | 4,350 | 1,61 |
| 4 | 4,375 | 3,750 | 625 | 3,725 | 1,60 |
| 5 | 3,750 | 3,150 | 600 | 3,125 | 1,60 |
| 6 | 3,150 | 2,575 | 575 | 2,550 | 1,62 |
| 7 | 2,575 | 2,025 | 550 | 2,000 | 1,63 |
| 8 | 2,025 | 1,500 | 525 | 1,475 | 1,60 |
| 9 | 1,500 | 1,025 | 475 | 1,000 | 1,61 |
| 10 | 1,025 | 0,625 | 400 | 0,600 | 1,67 |

Es sollen diese Normal-A. nun einzeln kurz näher erläutert werden:

Normal-Aräometer $l = 120'''$; $ql = 1508$ cub.‴

| A. No. | $n =$ | $m =$ | $\frac{m}{n-m}$ | V cub.‴ | Gew. des A. Loth |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,300 | 5,625 | $\frac{25}{3}$ | $12566\frac{2}{3}$ | 56 |
| 2 | 5,650 | 4,975 | $\frac{199}{27}$ | $11114\frac{14}{27}$ | $44\frac{1}{2}$ |
| 3 | 5,000 | 4,350 | $\frac{87}{13}$ | 10092 | 31 |
| 4 | 4,375 | 3,725 | $\frac{149}{26}$ | 8642 | $26\frac{3}{4}$ |
| 5 | 3,750 | 3,125 | 5 | 7540 | 20 |
| 6 | 3,150 | 2,55 | $\frac{17}{4}$ | 6409 | $12\frac{1}{2}$ |
| 7 | 2,575 | 2,000 | $\frac{80}{23}$ | $5245\frac{5}{23}$ | $9\frac{1}{2}$ |
| 8 | 2,025 | 1,475 | $\frac{59}{22}$ | $4044\frac{2}{11}$ | $5\frac{3}{4}$ |
| 9 | 1,500 | 1,000 | 2 | 3016 | $3\frac{1}{4}$ |
| 10 | 1,025 | 0,600 | $\frac{24}{17}$ | $2128\frac{16}{17}$ | $1\frac{1}{2}$ |

A. No. 1. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 1000\left(\frac{6,3}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 6,300$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,5895 |
| $= 6,290$ | „ $l = 1,5895$ | |
| | | 1,5952 |
| $= 6,280$ | „ $l = 3,1847$ | |
| | | 1,6000 |
| $= 6,270$ | „ $l = 4,7847$ | |
| . . . . | . . . . | |
| $= 5,680$ | „ $l = 109,1549$ | |
| | | 1,9562 |
| $= 5,670$ | „ $l = 111,1111$ | |
| | | 1,9631 |
| $= 5,660$ | „ $l = 113,0742$ | |
| | | 1,9700 |
| $= 5,650$ | „ $l = 115,0442$ | |
| | | 4,9558 |
| $= 5,625$ | ist $l = 120,0000$ | |

Die untersten Theilungen sind an Länge so wenig verschieden, dafs man, um Tausendtel abzulesen, jede derselben in 10 gleiche Theile theilen kann. Dies gilt, denke ich, auch für die obersten Theilungen; eine Länge der Scala von nahe 5‴ von der leichtesten $F$ bis zum Grenzpunkt bleibt natürlich unbenutzt.

A. No. 2. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{7960}{9}\left(\frac{5,65}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 5,650$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,5681 |
| $= 5,640$ | „ $l = 1,5681$ | |
| | | 1,5738 |
| $= 5,630$ | „ $l = 3,1419$ | |
| | | 1,5793 |
| $= 5,620$ | „ $l = 4,7212$ | |
| . . . . | . . . . | |
| $= 5,030$ | „ $l = 109,0170$ | |
| | | 1,9790 |
| $= 5,020$ | „ $l = 110,9960$ | |
| | | 1,9869 |
| $= 5,010$ | „ $l = 112,9829$ | |
| | | 1,9949 |
| $= 5,000$ | „ $l = 114,9778$ | |
| | | 5,0222 |
| $= 4,975$ | ist $l = 120,0000$ | |

A. No. 3. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{10440}{13}\left(\frac{5}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 5,000$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,6094 |
| $= 4,990$ | „ $l = 1,6094$ | |
| | | 1,6158 |
| $= 4,980$ | „ $l = 3,2252$ | |
| | | 1,6223 |
| $= 4,970$ | „ $l = 4,8475$ | |
| . . . . | . . . . | |
| Für $p = 4,405$ | ist $l = 108,4746$ | |
| | | 2,0741 |
| $= 4,395$ | „ $l = 110,5487$ | |
| | | 2,0835 |
| $= 4,385$ | „ $l = 112,6322$ | |
| | | 2,0931 |
| $= 4,375$ | „ $l = 114,7253$ | |
| | | 5,2747 |
| $= 4,350$ | ist $l = 120,0000$ | |

A. No. 4. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{8940}{13}\left(\frac{4,375}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 4,375$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,5755 |
| $= 4,365$ | „ $l = 1,5755$ | |
| | | 1,5827 |
| $= 4,355$ | „ $l = 3,1582$ | |
| | | 1,5900 |
| $= 4,345$ | „ $l = 4,7482$ | |
| . . . . | . . . . | |
| $= 3,780$ | „ $l = 108,2479$ | |
| | | 2,1112 |
| $= 3,770$ | „ $l = 110,3591$ | |
| | | 2,1225 |
| $= 3,760$ | „ $l = 112,4816$ | |
| | | 2,1338 |
| $= 3,750$ | „ $l = 114,6154$ | |
| | | 5,3846 |
| $= 3,725$ | ist $l = 120,0000$ | |

A. No. 5. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 600\left(\frac{3,75}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 3,750$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,6043 |
| $= 3,740$ | „ $l = 1,6043$ | |
| | | 1,6129 |
| $= 3,730$ | „ $l = 3,2172$ | |
| | | 1,6215 |
| $= 3,720$ | „ $l = 4,8387$ | |
| . . . . | . . . . | |
| $= 3,180$ | „ $l = 107,5472$ | |
| | | 2,2320 |
| $= 3,170$ | „ $l = 109,7792$ | |
| | | 2,2461 |
| $= 3,160$ | „ $l = 112,0253$ | |
| | | 2,2604 |
| $= 3,150$ | „ $l = 114,2857$ | |
| | | 5,7143 |
| $= 3,125$ | ist $l = 120,0000$ | |

A. No. 6. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 510\left(\frac{3,15}{p} - 1\right)$$

| $p$ | $l$ | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p = 3,150$ | ist $l = 0,0000$ | |
| | | 1,6242 |
| $= 3,140$ | „ $l = 1,6242$ | |
| | | 1,6346 |
| $= 3,130$ | „ $l = 3,2588$ | |
| | | 1,6450 |
| $= 3,120$ | „ $l = 4,9038$ | |
| . . . . | . . . . | |

| | | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p=2{,}605$ | ist $l=106{,}6987$ | 2,3764 |
| $=2{,}595$ | „ $l=109{,}0751$ | 2,3949 |
| $=2{,}585$ | „ $l=111{,}4700$ | 2,4135 |
| $=2{,}575$ | „ $l=113{,}8835$ | 6,1165 |
| $=2{,}550$ | ist $l=120{,}0000$ | |

A. No. 7. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{9600}{23}\left(\frac{2{,}575}{p}-1\right)$$

| | | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p=2{,}575$ | ist $l=\phantom{0}0{,}0000$ | 1,6273 |
| $=2{,}565$ | „ $l=\phantom{0}1{,}6273$ | 1,6400 |
| $=2{,}555$ | „ $l=\phantom{0}3{,}2673$ | 1,6528 |
| $=2{,}545$ | „ $l=\phantom{0}4{,}9201$ | |
| . . . . . | . . . . . | |
| $=2{,}055$ | „ $l=105{,}6173$ | 2,5575 |
| $=2{,}045$ | „ $l=108{,}1748$ | 2,5826 |
| $=2{,}035$ | „ $l=110{,}7574$ | 2,6081 |
| $=2{,}025$ | „ $l=113{,}3655$ | 6,6345 |
| $=2{,}000$ | ist $l=120{,}0000$ | |

A. No. 8. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{3540}{11}\left(\frac{2{,}025}{p}-1\right)$$

| | | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p=2{,}025$ | ist $l=\phantom{0}0{,}0000$ | 1,5971 |
| $=2{,}015$ | „ $l=\phantom{0}1{,}5971$ | 1,6131 |
| $=2{,}005$ | „ $l=\phantom{0}3{,}2102$ | 1,6292 |
| $=1{,}995$ | „ $l=\phantom{0}4{,}8394$ | |
| . . . . . | . . . . . | |
| $=1{,}530$ | „ $l=104{,}1176$ | 2,8023 |
| $=1{,}520$ | „ $l=106{,}9199$ | 2,8393 |
| $=1{,}510$ | „ $l=109{,}7592$ | 2,8772 |
| $=1{,}500$ | „ $l=112{,}6364$ | 7,3636 |
| $=1{,}475$ | ist $l=120{,}0000$ | |

A. No. 9. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=240\left(\frac{1{,}5}{p}-1\right)$$

| | | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p=1{,}500$ | ist $l=\phantom{0}0{,}0000$ | 1,6107 |
| $=1{,}490$ | „ $l=\phantom{0}1{,}6107$ | 1,6325 |
| $=1{,}480$ | „ $l=\phantom{0}3{,}2432$ | 1,6548 |
| $=1{,}470$ | „ $l=\phantom{0}4{,}8980$ | |
| . . . . . | . . . . . | |
| Für $p=1{,}055$ | ist $l=101{,}2322$ | 3,2654 |
| $=1{,}045$ | „ $l=104{,}4976$ | 3,3285 |
| $=1{,}035$ | „ $l=107{,}8261$ | 3,3934 |
| $=1{,}025$ | „ $l=111{,}2195$ | 8,7805 |
| $=1{,}000$ | ist $l=120{,}0000$ | |

A. No. 10. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{2880}{17}\left(\frac{1{,}025}{p}-1\right)$$

| | | Differenz |
|---|---|---|
| Für $p=1{,}025$ | ist $l=\phantom{0}0{,}0000$ | 1,6691 |
| $=1{,}015$ | „ $l=\phantom{0}1{,}6691$ | 1,7023 |
| $=1{,}005$ | „ $l=\phantom{0}3{,}3714$ | 1,7365 |
| $=0{,}995$ | „ $l=\phantom{0}5{,}1079$ | |
| . . . . . | . . . . . | |
| $=0{,}655$ | „ $l=\phantom{0}95{,}6982$ | 4,1103 |
| $=0{,}645$ | „ $l=\phantom{0}99{,}8085$ | 4,2397 |
| $=0{,}635$ | „ $l=104{,}0482$ | 4,3753 |
| $=0{,}625$ | „ $l=108{,}4235$ | 11,5765 |
| $=0{,}600$ | ist $l=120{,}0000$ | |

Es ist nun für die vorstehenden 10 Normal-A. Folgendes zu bemerken.

1) Die Länge der untersten Theilung wächst von dem A. No. 1, wo sie 1,5895''' ist, bis zum A. No. 10 =1,6691'''.

2) Die Längen-Differenz zwischen der ersten und zweiten Theilung wächst von dem A. No. 1 (1,5952 – 1,5895=0,0057''') bis zum A. No. 10 (1,7023 – 1,6691 = 0,0332'''). Demnach kann man bei den ersten 8 A. die unterste Theilung in 10 gleiche Theile theilen; bei den folgenden A. ist der mittlere Theilstrich durch die Formel noch auszumitteln, und dann jede Hälfte in 5 gleiche Theile zu theilen.

3) Dasselbe findet auch bei den folgenden, von unten nach oben gerechneten Theilungen statt. Die obersten Theilungen können noch bei den ersten 4 A. in 10 gleiche Theile getheilt werden, bei den folgenden sind Zwischentheilungen durch die Formel zu bestimmen.

4) Die unbenutzte Länge des Scalenrohrs vom obersten Theilstrich bis zum Ende der Röhre wächst vom A. No. 1 (=4,9558''') bis zum A. No. 10 (=11,5765'''). Dies ist zwar nicht so wesentlich; wenn man aber bei dem A. No. 10 und den ihm voranstehenden eine größere Länge benutzen will, so hat man nur nöthig,

den Grenzwerth *m* für jeden derselben zu erhöhen, und man erhält dann für jedes A. durchweg längere Theilungen.

16. Die hier angeführten und untersuchten Normal-A. sollen nicht als so und nicht anders möglich festgestellt sein, sondern nur einen Anhalt geben dem Physiker und Techniker, welcher A. für *S* innerhalb bestimmter Grenzen verlangt, und dem Mechaniker, der sie anzufertigen hat. Die Fundamental-Abstände sind wohl in allen Fällen durch Probiren und Einsenkung in *F* von bestimmten *S* festzusetzen, wie solches auch bei den Thermometern geschieht.

17. Ein Scalen-A., welches als Normal-A. allgemeine Verbreitung hat, ist das Alkoholometer, welches für Käufer, Verkäufer und Steuer-Beamte von der gröfsten Wichtigkeit ist. Der absolute Alkohol hat, das Wasser = 1 gesetzt, das spec. Gew. 0,793. Zwischen dem Wasser und dem Alkohol ist also nur ein Unterschied von 0,207, ferner eignet sich ein Scalen-A. ganz besonders zur Prüfung des Alkohol, weil dessen Mischungen mit Wasser dem reinen Alkohol näher als dem Wasser liegen, weil man also im A. nur mit den oberen gröfseren Theil-Unterschieden zu thun hat, und die Gradigkeit des Alkohol um so genauer abgelesen wird, je mehr er der absoluten Reinheit sich nähert.

Der Gehalt des absoluten Alkohol in seiner Mischung mit Wasser wird nach Raumprocenten und nach Gewichtsprocenten angegeben. Abs. Alk. ist 100 procentig, 90% Alk. mit 10% Wasser in 100 Theilen ist 90 procentig, reines Wasser ist 0 procentig. Man hat also eine Scala von 100 Theil-Abständen; die Einsenkungstiefe für das spec. Gew. = 1 entspricht dem Theilstrich mit der Bezeichnung 0, die für das spec. Gew. 0,793 würde dem Theilstrich mit der Bezeichnung 100 entsprechen. Eine Reihe specifischer Gewichte von 0,793 bis 1 in Abständen von $\frac{1}{10}$ der Differenz = 0,207, also von 0,0207 gäben die Theilstrich-Bezeichnungen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,7930 | die Zahl | 100 | 0,8965 | die Zahl | 50 |
| 0,8137 | " " | 90 | 0,9172 | " " | 40 |
| 0,8344 | " " | 80 | 0,9379 | " " | 30 |
| 0,8551 | " " | 70 | 0,9586 | " " | 20 |
| 0,8758 | " " | 60 | 0,9793 | " " | 10 |

0,9793 + 0,0207 = 1 die Zahl 0

Die richtige Gradnirung der Alkoholometer-Scala hängt aber noch von einem anderen Umstande ab, nämlich von der Contraction der Mischung, welche bei gleichen Theilen Wasser und Alkohol etwa $\frac{1}{25}$ beträgt, so dafs 30 Raumtheile Wasser mit 30 Raumtheilen Alkohol gemischt, nur 59 Raumtheile ausfüllen. Es hat der Alkohol nach angestellten Versuchen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| von | 100% | das spec. Gew. | 0,7930 |
| " | 90% | " " " | 0,8225 |
| " | 80% | " " " | 0,8470 |
| " | 70% | " " " | 0,8704 |
| " | 60% | " " " | 0,8948 |
| " | 50% | " " " | 0,9173 |
| " | 40% | " " " | 0,9391 |
| " | 30% | " " " | 0,9578 |
| " | 20% | " " " | 0,9712 |
| " | 10% | " " " | 0,9830 |
| " | 0% | " " " | 1,0000 |

Ein A. auf diese Angaben der spec. Gew. gegründet und abgetheilt, würde also ein Alkoholometer sein, welches die Procenthaltigkeit nach Gewichten angiebt, der Art, dafs 50 procentiger Spiritus aus einer Mischung von 50 Pfund Alkohol mit 50 Pfund Wasser besteht, und welcher mit 56 procentigem Spiritus einerlei ist, wenn die Procenthaltigkeit nach Räumen angegeben wird.

Eine Alkoholometer-Scala nach Gewichtsprocenten ist die von Richter.

In Preufsen ist die Messung nach Raumprocenten üblich und gesetzlich; die dafür eingeführte Scala ist die von Tralles. Nach dieser hat Spiritus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| von | 0 | Procent das spec. Gew. | 1,0000 |
| " | 10 | " " " " | 0,9857 |
| " | 20 | " " " " | 0,9751 |
| " | 30 | " " " " | 0,9646 |
| " | 40 | " " " " | 0,9510 |
| " | 50 | " " " " | 0,9335 |
| " | 60 | " " " " | 0,9126 |
| " | 70 | " " " " | 0,8892 |
| " | 80 | " " " " | 0,8631 |
| " | 90 | " " " " | 0,8332 |
| " | 100 | " " " " | 0,7930 |

Das Scalen-Aräometer von Beaumé s. u. Beaumé's Aräometer.

2. Gewichts-Aräometer.

1. Bei diesem ist das Gewicht des in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers veränderlich.

Der Körper *A* habe bis zum Theilstrich *mm* das Volumen = *V* cub"; in die leichteste Flüssigkeit (*F*) von dem spec. Gew. (*S*) = 0,627 getaucht, mufs sein Gewicht, damit er genau bis zum Theilstrich *mm* einsinke, betragen

$$0{,}627 \times V \cdot g$$

wo *g* das Gew. eines cub" destillirten Wassers = $\frac{11}{9}$ Loth bedentet. Die untere Kugel mufs also mit Schrot, Quecksilber u. dergl. so weit beschwert werden, dafs

dieses geringste Gew. des A. hergestellt wird.

Es sei das ajustirte Selbstgewicht des A. $= p$, so ist

$$p = 0{,}627 \cdot V \cdot g$$

In Wasser von $S = 1$ getaucht, ist in die obere Schale ein Gew. $p'$ hinzuzulegen, dafs

$$p + p' = V \cdot g$$

Man hat also

$$p : p + p' = 0{,}627 \cdot V \cdot g : V \cdot g$$
$$= 0{,}627 : 1$$

also $p : p' = 0{,}627 : 1 - 0{,}627$

woraus $p' = \frac{1 - 0{,}627}{0{,}627} \cdot p = 0{,}595 \cdot p$

Dies ist also das geringste Gewicht, welches für Wasser noch hinzuzufügen ist, wenn eine $F$ von dem geringsten $S$ mit demselben A. abgewägt werden soll. Setzt man $S$ dieser $F = 0{,}600$ statt 0,627, wie beim Scalen-A. geschehen, so hat man das geringste $p' = \frac{2}{3} p$. Allein es ist dies hier nicht nöthig, und man kann $p' = 0{,}6 p$ festsetzen, wobei das geringste $S = 0{,}625$ ist.

2. Setzt man nun das Gewicht 1,6 $p$ des A. für Wasser $= P$

so ist $P$ (für $S = 1$) $= V \cdot g$

$P'$ (für $S = s$) $= V \cdot s \cdot g$

also $P : P' = 1 : s$

Nennt man das Gewicht, welches man für $F$ von $S$ abnehmen mufs, $p''$, so ist $P' = P - p''$, und man hat

$$P : P - p'' = 1 : s$$

woraus $p'' = (1 - s) P$

Je gröfser das Gewicht $p''$, welches für einerlei $S$ aus der Schale des A. fortgenommen werden mufs, desto genauer wird $F$ in seinen $S$ angegeben, und dies geschieht mit der Vermehrung von $P$.

Für $S = 0{,}999$ ist $p'' = 0{,}001 P$

„ $S = 0{,}998$ „ $p'' = 0{,}002 P$

„ $S = 0{,}987$ „ $p'' = 0{,}003 P$

u. s. w.

3. Nimmt man zu Ablesung der $S$ in Unterschieden von 0,001 für jedes Tausendtel 1 preufs. Grän $= \frac{1}{18}$ Loth $= 0{,}811998$ Gramme, so hat man $P = 1000$ Grän, d. h. das Selbstgewicht $p$ + der Summe $p' = 0{,}6 \cdot p$ der Gewichte für Wasser $= 1{,}6 p = 1000$ Grän, woraus das Selbstgewicht $p$ des A. $= 625$ Grän, und die in die Schale zu legenden Gewichte 375 Grän.

Die Gewichte werden eingelegt

in 3 Stück, jedes zu 100 Grän

„ 6 „ „ „ 10 „

„ 15 „ „ „ 1 „

Das constante Volumen $V$ bis zur Marke $mm$

$$= \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18} = \frac{500}{11} = 45\tfrac{5}{11} \text{ cub}''$$

Das A. ist sehr leicht zu construiren, wenn man einen Körper, von der gezeichneten Form weniger als 625 Grän oder 34 Loth 13 Grän schwer, und mit dem Halse von dem Volumen etwas gröfser als $45\tfrac{5}{11}$ cub'' nimmt, 375 Grän in die Schale legt, ihn in destillirtes Wasser einsenkt, und die untere Kugel mit Schrotkörnchen belastet, bis das A. auf eine geeignete Tiefe einsinkt, die man markirt.

Taucht man nun das A. in eine leichtere $F$ als Wasser und hat $n$ Grän fortgenommen, wenn die Marke des A. in den $F$-Spiegel tritt, so hat man das spec. Gew. der $F = 1 - \frac{n}{1000}$

Z. B. es sind 168 Grän fortgenommen, so ist das spec. Gew. der

$$F = 1 - 0{,}168 = 0{,}832$$

Denn ist bei einer $F$ von dem spec. Gew. $= S$ das fortgenommene Gew. $= p''$ Grän, so ist das noch verbleibende Gew. des A. $= P - p'' = (1000 - p'')$ Grän; das verdrängte Gew. der

$$F = V \cdot S \cdot g = \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18} \cdot S \cdot \frac{11}{19} \cdot 18 \text{ Grän,}$$

beides gleich gesetzt, giebt:

$$1000 - p'' = 1000 S$$

$$\text{woraus } S = 1 - \frac{p''}{1000}$$

4. Setzt man in No. 2 $s > 1$, so ist $p''$ das Gew., welches angelegt werden mufs, und dann ist

$$P : P + p'' = 1 : s$$

woraus $p'' = (s - 1) P$

Für $S = 1{,}001$ ist $p'' = 0{,}001 P$

$= 1{,}002$ „ $p'' = 0{,}002 P$

u. s. w.

Man hat also, wie ad 3, für jedes Tausendtel des spec. Gew. einer $F$ mehr 1 Grän hinzuzulegen.

Für $F$ von $S > 1$ kann man die ad 3 gedachten zu $S = 1$ gehörenden 375 Grän in 1 Stück = 375 Grän schwer auswechseln, und aus einem zweiten Satz von Gewichten einen Vorrath bis zu 6,300 Grän enthaltend, alle übrigen schwereren $F$ abwägen, oder auch ein zweites A. für $F$ von $S = 1$ bis $S = 6{,}300$ nach demselben Princip, wie ad 3 gedacht, construiren.

**Aräometrie.** Die Wissenschaft von der Bestimmung der vergleichenden Dichtigkeiten tropfbar flüssiger Körper, von den dazu gehörenden Instrumenten, den Aräometern, deren Construction und Anwendung.

**Arbeit, mechanische Arbeit.** Ist die

von einer Kraft aus auf einen Körper übergehende **sichtbare Wirkung**. Die Wirkung wird sichtbar durch die Ortsänderung des Körpers; das Hindernifs, welches dieser Ortsänderung entgegen wirkte, ist der **Widerstand**, den die Kraft zu überwinden hatte. Eine Kraft, so gering, dafs sie einen bestimmten Widerstand nicht überwindet, so dafs also ungeachtet des Angriffs der Kraft der Körper in Ruhe bleibt, verrichtet keine A. Tritt nun noch eine Kraft hinzu, so dafs Bewegung, also A. erfolgt, so hat die zuerst angegriffene Kraft den Widerstand zu Gunsten der zweiten vermindert.

Wenn ein Balken fortgeschoben werden soll, wozu mehrere Menschenkräfte gehören, und ein einziger Mensch schiebt vergeblich daran, so arbeitet er **nicht**, er ruht sich entweder aus, oder es mangelt ihm an Einsicht. Erst wenn die erforderlichen Mannschaften mit einander angreifen, geschieht A.

Die Gröfse der A. bestimmt sich aus dem Product des Widerstandes mit dessen zurückgelegtem Wege; mithin ist die **Arbeits-Einheit** das Product einer Gewichts-Einheit mit einer Längen-Einheit (also 1 Pfund mal 1 Fufs = 1 Pfund-Fufs, 1 Kilogramm mal 1 Meter = 1 Kilg.-M.) Ein Rammbär, von 600 Pfund schwer, 4 Fufs hoch gehoben, giebt die A. = 2400 (Pf. Ffs.) Ein Lastwagen, 50 Ctr. schwer, der eine Reibnng von $\frac{1}{15}$ verursacht, erfordert für einen Weg von 12 Meilen eine A. von 60 (Ctr.-Ml.)

**Arbeitsmaschinen.** Jede Arbeit, welche von Maschinen verrichtet wird, ist **Maschinen-Arbeit** nnd zugleich mechanische Arbeit. Man nnterscheidet jedoch von den **Productionsmaschinen** die **Arbeitsm.** Jene sind der Art construirt, dafs sie Gegenstände der Industrie hervorbringen, d. h. dafs sie rohere Körper in Form und Wesen zu brauchbareren umändern, als Mehlmaschinen, Webe-, Strickmaschinen, Walzwerke n. s. w. Diese, die A., bewirken nnr Ortsänderung von Körpern, ohne dieselben selbst zn ändern, als: Lastwagen, Pumpen, Fenerspritzen, Rammen.

**Archimedische Aufgabe.** Aus dem Gewichtsverlust einer Mischnng von Gold nnd Silber (allgemein: zweier bekannten Stoffe) die Menge des Goldes nnd die des Silbers (allgemein: die Menge jedes einzelnen Stoffes) zu finden.

Ist der Gewichtsverlnst von $P$ ℔ Mischnng $=m$, der von $P$ ℔ Gold $=g$, der von $P$ ℔ Silber $=s$, so hat man die Menge des Goldes

$$= \frac{s-m}{s-g} \cdot P$$

die Menge des Silbers

$$= \frac{m-g}{s-g} \cdot P$$

Denn bezeichnet man das Gew. an Gold in der $P$ ℔ schweren Mischnng mit $x$, so ist das Gew. an Silber darin $P-x$

Wiegen nnn $P$ ℔ Gold in der Luft, im Wasser $g$ ℔ leichter, so wiegen $x$ ℔ Gold im Wasser $\frac{x}{P} g$ ℔ leichter; nnd eben so $(P-x)$ ℔ Silber im Wasser $\frac{P-x}{P} s$ leichter.

Der Gewichts-Verlust beider Stoffe in Snmma mufs aber gleich sein dem Gewichts-Verlnst deren Mischnng (wenn nämlich die Summe der Volnmen beider Stoffe gleich ist dem Volnmen der Mischnng) nnd es ist

$$\frac{x}{P} g + \frac{P-x}{P} s = m$$

$$\text{woraus } x = \frac{m-s}{g-s} P$$

oder vielmehr, da ein Stoff desto mehr im Wasser verliert, je specifisch leichter er ist, mithin

$$g < m < s$$

$$x = \frac{s-m}{s-g} \cdot P \text{ nnd}$$

$$P - x = \frac{m-g}{s-g} P$$

Der Name a. A. rührt daher, dafs Archimedes den Betrug eines Goldschmiedes entdeckte, indem er auf die obige Weise fand, dafs die Krone des Königs Hiero nicht aus reinem Golde bestehe, wie dieser befohlen hatte, sondern aus einer Mischnng von Gold nnd Silber.

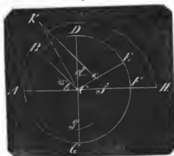
**Archimedische Spirale.** Eine von Konon erfundene und von Archimedes untersnchte Spirale.

Es sei $\varphi$ ein Winkel oder Kreisbogen, $f\varphi$ eine Länge, welche mit dem Wachsthum von $\varphi$ nach irgend einem Gesetz ebenfalls wächst. Zeichnet man nnn um einen Pnnkt $C$ in einerlei Ebene lauter gleiche Winkel $(\varphi)$ $ACB$, $BCD$, $DCE$ u. s. w. nnd trägt von $C$ ans anf $CB$ die Länge $f(\varphi) = Cb$, anf $CD$ die Länge $f(2\varphi) = Cd$, auf $CE$ die Länge $f(3\varphi) = Ce$ n. s. w., ferner wenn man wieder in die Richtnng $CA$ gekommen ist, auf $CA$ die Länge $f(360^\circ)$, anf $CB$ dann die Länge $f(360+\varphi)$ n. s. f. nnd verbindet die Endpunkte der abgesteckten Längen, so erhält man eine Spirale.

Die a. S. ist die einfachste, indem die Längen $Cb$, $Cd$, $Ce$, $Cf$ ... bei gleichen

Winkel-Abständen wie die natürlich auf einander folgenden Zahlen sich verhalten. Ist also bei $\varphi = 360°$, d. h. bei einem

Fig. 73.




vollständigen Umlauf der Spirale $CA$ die abzusteckende Länge und man beschreibt mit $CA$ $(= r)$ einen Kreis, so ist für $\angle BCA = 45°$, $Cb = \frac{1}{8}r$; für $\angle DCA = 90°$, $Cd = \frac{1}{4}r$; $Cf = \frac{1}{2}r$; $Cg = \frac{3}{4}r$; $CA = r$; beim zweiten Umlauf $CH = 1\frac{1}{4}r$ u. s. w., und es kann auf diese Weise die Spirale mit 2, 3 und mehreren Windungen construirt werden, wobei die in einerlei Linie befindlichen Radii vectoren um den Halbmesser $= r$ von einander an Länge unterschieden sind, so daſs man, wenn die erste Windung aufgetragen worden, die 2te Windung, aus dieser die 3te u. s. w. erhält, indem man jeden Radius um die Linie $AC = r$ verlängert.

2. Es sei von dem festen Schenkel $AC$ aus ein beliebiger $\angle ACE = \varphi$, der zugehörige Radius vector $Ce$ der Spirale $= y$, so ist der Erklärung zufolge

$$r : y = 360° \text{ (oder } 2\pi) : \varphi$$

$$\text{also } y = \frac{r}{360°}\varphi = \frac{r}{2\pi}\varphi$$

für $\varphi = 360°$ wird $y = r$
„ $\varphi = 2 \cdot 360°$ „ $y = 2r$
„ $\varphi = n \cdot 360°$ „ $y = nr$
„ $\varphi' = n \cdot 360° + \varphi$ wird $y = \frac{n \cdot 360° + \varphi}{360°} r$

$$= \left(n + \frac{\varphi}{360°}\right) r$$

Setzt man $\frac{r}{360°} = A$, so hat $y = A\varphi$

$$\text{und } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = A$$

3. Zieht man an einen beliebigen Punkt, z. B. an $e$ der Spirale eine Tangente, und schneidet dieselbe durch eine in $C$ auf die Ordinate $Ce$ genommene Normale $CK$, so ist $eK$ die Tangente an $e$ und $CK$ die zugehörige Subtangente.

Nun ist für Polar-Coordinaten die trigonometrische Tangente des Winkels $KeC$, den die Curventangente $Ke$ mit der Ordinate $Ce$ bildet, $= \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}$

und die Subtangente $CK = \frac{y^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}$

mithin für die Spirale:

$$tg \angle KeC = \frac{y}{A} = \frac{A}{A}\varphi = \varphi$$

die Subtangente

$$CK = \frac{y^2}{A} = A\varphi^2 = y \cdot \frac{y}{A} = y\varphi$$

und hieraus die Tangente

$$eK = \sqrt{Ce^2 + CK^2} = y\sqrt{1 + \varphi^2}$$

Ist $\varphi$ als Winkel in Graden ausgedrückt, so wird $\frac{\varphi}{180°}\pi$ dafür genommen, weil sich $\varphi$ als Zahl auf den Halbmesser $= 1$ bezieht.

Für $\varphi = 90°$ ist $tg\, KeC = \frac{1}{2}\pi$
die Ordinate $y = \frac{1}{4}r$
die Subtangente $= \frac{1}{8}\pi r$
die Tangente $= \frac{1}{8}r\sqrt{4 + \pi^2}$
Für $\varphi = 180°$ ist
$tg\, KeC = \pi$; $y = \frac{1}{2}r$; Subtg. $= \frac{1}{2}\pi r$
für $\varphi = 360°$, nach dem ersten Umlauf:
$tg\, KeC = 2\pi$; $y = r$; Subtg. $= 2 \cdot \pi r$
nach dem 2ten Umlauf für $\varphi = 2 \cdot 360°$
$tg\, KeC = 4\pi$; $y = 2r$; Subtg. $= 8\pi \cdot r$

4. Zur Bestimmung der Länge eines Bogens der a. S. hat man die allgemeine Rectificationsformel

$$\partial s = \sqrt{y^2 \partial \varphi + \partial y^2}$$

also hier

$$\partial s = \sqrt{(A\varphi \cdot \partial \varphi)^2 + (A\,\partial \varphi)^2}$$
$$= A\,\partial \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} = \frac{r}{2\pi}\partial \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1}$$

woraus

$$s = \int A\,\partial \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1}$$
$$= \tfrac{1}{2} A\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1}$$
$$+ \tfrac{1}{2} A \, logn\left(\sqrt{\varphi^2 + 1} + \varphi\right) + \text{Const.}$$

für $\varphi = 0$ wird $s = 0$

Setzt man also $\varphi = 0$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1} \times 0 + \tfrac{1}{2} A \, logn \sqrt{1} + C = 0$$

und da $logn \sqrt{1} = logn\, 1 = 0$, so ist $C = 0$ und vollständig

$$s = \frac{r}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + ln\left(\sqrt{\varphi^2 + 1} + \varphi\right)\right]$$

5. Zur Bestimmung des von einer Ordinate abgeschnittenen Flächenraums der

s. 8. hat man die allgemeine Quadraturformel:

$$\partial F_y = \tfrac{1}{2} y^2 \, \partial \varphi$$

woraus $F_y = \tfrac{1}{2} \int y^2 \, \partial \varphi + C$

Setzt man für $\partial \varphi$ seinen Werth $\frac{2\pi}{r} \partial y$

so ist $F_y = \frac{\pi}{r} \int y^2 \cdot \partial y + C$

oder setzt man für $y$ seinen Werth $\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi}$

$$= \frac{r}{2\pi} \varphi$$

so ist $F_y = \frac{r^2}{8\pi^3} \int \varphi^2 \cdot \partial \varphi + C$

Man hat daher

$$F_y = \frac{\pi}{3r} y^3 + C = \frac{r^2}{24\pi^3} \varphi^3 + C$$

für $\varphi = 0$ wird $y = 0$ und $F_y = 0$, daher $C = 0$ und daher vollständig

$$F_y = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{r} y^3 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{r^2}{8\pi^3} \varphi^3$$

für $\varphi = 360^\circ = 2\pi$ wird $y = r$ und

$$F_{2\pi} = \tfrac{1}{3} \pi r^2$$

Die spiralische Ebene bei einmaligem Umlauf ist daher = dem dritten Theil des mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kreises.

6. Nach No. 5 hat man für zusammengehörige $s$ und $\psi$

$$F_s = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{r} s^3 = \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{8\pi^3} \psi^3$$

daher für einen zwischen zweien Radien $y$ und einen vorhergehenden $s$ oder den zu ihnen gehörenden Winkeln $\varphi$ und $\psi$ belegenen Sector

$$F_y^s = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{r} (y^3 - s^3) = F_\varphi^\psi = \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{8\pi^3} (\varphi^3 - \psi^3)$$

7. Nach No. 6 ist in dem ersten Umgang der Sector zwischen den Radien $y$ und $s$

$$F_y^s = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{r} (y^3 - s^3) = \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{8\pi^3} (\varphi^3 - \psi^3)$$

also für zwei Umgänge

$$F_{y+r}^{s+r} = \tfrac{1}{3} \frac{\pi}{r} [(y+r)^3 - (s+r)^3]$$

$$= \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{8\pi^3} [(\varphi + 2\pi)^3 - (\psi + 2\pi)^3]$$

und die Differenz beider Sectoren, d. i. das Ringstück zwischen den Radien $y$ und $s$ und zwischen dem zweiten und ersten Umgang

$$= \pi (y - s)(y + s + r) = \tfrac{1}{4} \frac{r^2}{\pi} (\varphi - \psi)(\varphi + \psi + 2\pi)$$

Für den vollständigen ersten Ring, nachdem also der Radius vector 2 Umläufe gemacht hat, ist $y = r$, $s = 0$, $\varphi = 2\pi$, $\psi = 0$

und man erhält den ersten Ring $= 2\pi r^2$

für den vollständigen zweiten Ring ist $y = 2r$, $s = r$, $\varphi = 4\pi$, $\psi = 2\pi$

und man erhält für den zweiten Ring $4\pi r^2$

für den vollständigen $n$ten Ring ist $y = nr$, $s = (n-1)r$, $\varphi = 2 \cdot n\pi$, $\psi = 2(n-1)\pi$

und man erhält für den $n$ten Ring $2n\pi r^2$

für vollständige $n$ Ringe in Summa ist $y = nr$, $s = 0$, $\varphi = 2n\pi$, $\psi = 0$

daher sämmtliche $n$ Ringe $= n(n+1)\pi r^2$

hierzu der erste Umgang $= \tfrac{1}{3} \pi r^2$

giebt die ganze Fläche nebst $n$ Ringen $[\tfrac{1}{3} + n(n-1)] \pi r^2$

**Archimedische Wasserschnecke** und **Wasserschraube.** Eine Wasserhebemaschine, deren schon Vitruv erwähnt und deren Erfindung man dem Archimedes zuschreibt. Sie besteht, so wie sie jetzt angewendet wird, aus einer Spindel, um welche schneckenförmig hervorragende Bretter oder Metallbleche so befestigt sind, dafs sie auf die ganze Länge der Spindel einen zusammenhangenden schneckenförmig gewundenen hohlen Raum um dieselbe bilden. Die äufsere Schneckenlinie der Windungen ist gleich weit von der Spindelaxe entfernt und mit einem Mantel umgeben. Ist dieser Mantel von Blechen oder Brettern an dem Umfang der Schneckengänge befestigt, so dafs derselbe einen geschlossenen Cylinder bildet, so heifst die Maschine Wasserschnecke; liegt der Mantel in einem geringen Spielraum um den Umfang der Gänge, ist er also von denselben abgesondert und unabhängig, so heifst die Maschine Wasserschraube.

Beide Maschinen, die Schnecke und die Schraube, werden schräg in das zu hebende Wasser (in ein Sammelbecken, in welches von Wiesen, Baugruben etc., die entwässert werden sollen, das Wasser zusammenfliefst), so gestellt, dafs die untere, die schöpfende Grundfläche zum Theil untertancht, und die Spindel wird um ihre Axe fortdauernd gedreht, wonach das von der ersten Windung geschöpfte Wasser in die zweite, aus dieser in die dritte u. s. f. bis zum oberen Querschnitt gehoben und von diesem ausgegossen wird.

2. Fig. 74 sei eine Wasserschnecke mit ihrer ersten Windung *abdef* um die Spindel *cc* und zum Theil unter dem Wasserspiegel *WW* in verticaler Ansicht mit Hinfortnahme des Mantels.

Bei der mit vollen Linien gezeichneten Lage, die man aus Blech bestehend sich

denke, liegen die Punkte *a*, *d*, *f* in einerlei Vertical-Ebene, der Punkt *b* vor, der Punkt *e* hinter der Spindel. Die erste Windung bildet eine Kammer, und ist *gh* die durch den höchsten Punkt *g* des Schneckenumfangs gezogene Horizontale, so ist *hdg* der Querschnitt der Wassermenge, welche die Kammer in sich aufzunehmen vermag. (Das Wasser, welches zwischen *g* und dem oberen Spindelumfang zurückfliefst, vorläufig bei Seite gesetzt). Damit diese Wassermenge geschöpft werden könne, mufs die Schnecke so um die Spindel *cc* gedreht werden, dafs die oberen Punkte *a*, *f*, sowie der Punkt *e* nach hinten herabgehen, während die Punkte *g*, *b*, *d*, *h* vorn aufsteigen. Das Blech bildet vorn eine scharfe

Fig. 74.



Kante *ac'* vom Umfang der Schnecke bis zum Umfang der Spindel; hinter dieser Kante und mit derselben beginnt die Einflufsöffnung. Ist der Punkt bei solcher Drehung in *a'* gekommen, so hat die Schnecke die Lage *a'bd'ef'*; die Punkte *a'*, *d'*, *f'* liegen in einerlei Vertical-Ebene, der Punkt *b* liegt hinter, der Punkt *e* vor der Spindel, die Einflufsöffnung liegt vor *a'c''*, das Wasser des Sammelbeckens reicht bis gegen die Fläche *a'b*, aber da die Windung keine Kammer bildet, nicht weiter. So wie aber der Punkt *a'* nach vorn sich erhebt, wird eine Kammer gebildet, deren Busen sich nach links aufwärts immer mehr erweitert; und wenn *a'* um 90° sich gehoben hat und in *c* gekommen ist, so ist der hinter der Spindel liegende Punkt *b* um eben so viel, also nach vorn bis *b'* herabgegangen, der Punkt *d'* desgleichen nach hinterwärts bis *d''* herab, und der vor der Spindel liegende Punkt *e* vorn bis *e'* aufgestiegen, so dafs die Kammer die Form *cb'd''e'* annimmt. In dieser Lage ist also schon eine Wassermenge von dem Querschnitt *ch°b'* darin so befindlich, dafs sie nicht wieder hinausfliefsen kann, und bei der weiteren Umdrehung der Spindel wird auch noch die oberhalb *ch°* bis *MM* in die Kammer hineinreichende Wassermenge von der Schärfe *ac* abgeschnitten, und wenn der Punkt in *a* gekommen ist, befindet sich die anfangs gedachte Wassermenge *ghd* in der Kammer der ersten Windung.

3. Dreht sich nun die Spindel weiter herum und senken sich die Punkte *a*, *f* um 90° hinterwärts nach *c* und *f''*, so steigen die Punkte *b* und *d* vorn um 90° nach *b''*, *d''*, der Punkt *e* hinter der Spindel fällt nach *e''*, die erste Windung hat die Lage *cb''d''e''f''*, und die Wassermenge *ghd* ist in die Lage *g'h'e''* nach links aufwärts geschoben. Dreht sich die Spindel abermals um 90° herum, so fällt der hinterwärts liegende Punkt *c* nach *a'*, der Punkt *b''* fällt hinter die Spindel nach *b*, der vor der Spindel liegende Punkt *d''* steigt vorn nach *d*, der Punkt *e''* steigt in den vor der Spindel liegenden Punkt *e*, der hinter der Spindel be-

findliche Punkt $f'$ fällt nach $f$, der Punkt $k''$ fällt nach $k$ hinter die Spindel herab, die Schnecke hat die Lage $a'bd'efk$ und die Wassermenge $ghd$ ist wieder weiter links aufwärts in die Lage $g''h''f$ geschoben worden.

Jetzt befindet sich diese Wassermenge bereits in der Kammer der zweiten Windung, denn so wie die Spindel sich um ein Geringes weiter dreht, so wie der Punkt $a'$ vorn aufsteigt, bildet sich die erste Kammer $cb'd''e'$ von Neuem, schöpft zum zweiten Mal eine Wassermenge $ghd$, welche die gezeichnete Lage erhält, so wie der Punkt $a'$ bis in $a$ sich erhoben hat, und während dieser Zeit hat die zuerst geschöpfte Wassermenge in der zweiten Windung die weiter links und weiter oben befindliche Lage $g'''h'''l$ erhalten.

Somit schöpft mit jedem Umgang der Spindel die erste Schneckenwindung die Wassermenge $ghd=M$, giebt dies $M$ der zweiten Windung, diese ihr $M$ der dritten u. s. f. bis zur obersten, welche bei jedem Umgang $M$ ausgiefst. Sämmtliche $M$ in den Windungen sind abgesondert von einander, und eben so wird jede $M$ abgesondert ausgegossen.

4. Wird die Schnecke so weit in's Wasser gesenkt, dafs der Wasserspiegel, wo er deren Grundfläche schneidet, in $g^\circ$, mit den höchsten Punkten $g$; $g'$; $g''$ der Kammern in einerlei Ebene liegt, so werden die Kammern vollständig gefüllt. Steht der Wasserspiegel niedriger, so taucht die vordere Schärfe $ac'$ früher aus dem Wasser und es wird weniger Wasser geschöpft, steht der Wasserspiegel höher, so läuft das über $hg$ in die erste Kammer hineinreichende Wasser wieder heraus.

5. Bei der ad 3 betrachteten Thätigkeit der Schnecke zeigt sich, dafs zwischen je 2 benachbarten Windungen ein Raum von der Länge $gg'''=af=$ der Länge eines Schneckenganges wasserleer bleibt, und der auf diese Länge befindliche Theil der Maschine, eine mit zu bewegende todte Last bei einerlei dazu gehöriger Nutzlast $M$ mufs möglichst vermindert werden.

Vermindert man die Länge $af$, d. h. giebt man dem Schneckengange weniger Steigung, so wird in gewissem Verhältnifs jeder Kammerraum und mit diesem die Nutzlast $M$ vermindert; man hat aber ein zweckmäfsiges Mittel zur Vermehrung der Nutzlast, nämlich statt nur eines Schneckenganges zwei oder mehrere anzuordnen, die in gleichen Abständen und unabhängig von einander Wasser schöpfen.

Fängt daher ein Gang von $a$ an und ein ihm congruenter zweiter von $a'$, beide also in einem Abstande von 180°, so hat der Gang von $a$ während eines Spindel-Umganges die Wassermenge $M$ von $gh$ nach $g''h'''$ gehoben, und der Gang von $a'$ während derselben Bewegung ein gleiches $M$ bis $h'g''$ gefördert. Es wird also in einerlei Zeit das doppelte $M$ geschöpft, gehoben und ausgegossen, beide $M$ sind und bleiben durch ihre Schneckenwandungen bis zum Ausgufs von einander getrennt.

Je mehr von einander gleich weit abstehende congruente Schneckengänge um eine Spindel gelegt werden, desto mehr $M$ werden in einerlei Zeit gefördert; durch 3 Gänge $3M$, durch $n$ Gänge $nM$.

Bestehen die Schneckengänge aus Brettern, so setzt die nothwendige Stärke derselben der Anzahl Gänge eine Grenze, denn die Wandung vermindert den Raum der Kammern um ihre Stärke, 2 Gänge vermindern denselben also um das 2fache u. s. w. Es sind daher wo möglich die Gänge aus Blech zu fertigen, besonders bei permanenten Schöpfmühlen, z. B. für Wiesen-Entwässerung.

6. Die einzige Bedingung, dafs eine Schnecke Wasser schöpfe und hebe, ist nach dem Vorgetragenen, dafs jede Windung eine Kammer bilde, in welcher ein vorderer Punkt höher liegt, als ein anderer nachfolgender, und das Maximum an Wasser wird geschöpft, wenn unter übrigens gleichen Umständen der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Punkt ein Maximum ist.

Bezeichnet man den Winkel, den die Spindelaxe mit dem Horizont bildet, den Standwinkel oder Neigungswinkel $=\angle mae$ mit $\beta$; ferner den Winkel, welchen

Fig. 75.



jedes Element des Schnecken-Umfangs mit der auf der Spindel normal gedachten Ebene bildet, den Steigungs- oder Windungswinkel mit $\alpha$, so ist die Höhe $af$ (Fig. 74) $= h$ einer Schnecken-

windung die Tangente von $\alpha$, wenn der Umfang der Grundfläche $2 \cdot ac \cdot \pi = 2 r \pi$ der Halbmesser ist. Also $h = 2 \pi r \, tg \, \alpha$ und $\alpha = arc \cdot tg \frac{h}{2 \pi r}$

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt des Schnecken-Umfangs eine Ebene, normal auf der Spindel, errichtet in diesem Punkt an dieser Ebene eine Tangente an dem Umfang, so bildet diese mit dem anliegenden Schnecken-Element den Steigungswinkel $\alpha$.

Denkt man sich nun das Stück des Mantels zwischen den Kanten durch den niedrigsten Punkt $d$ und den höchsten $g$ abgewickelt, so bildet $gd$ eine gerade Linie mit der Grundlinie $ga$ unter dem $\angle dga = \alpha$, ist $eaE$ die Horizontale, so ist $\angle mae = \beta$, und $d$ kann nur niedriger als $g$ sein, wenn $gd$ die $eE$ schneidet.

Dann ist

$$\angle gea = \angle gaE - \alpha$$

Es ist aber $\angle gaE = \angle 90^\circ - \beta$

daher $\angle gea = \angle 90^\circ - (\beta + \alpha)$ (1)

Es ist also die Grundbedingung, wenn die Schnecke Wasser schöpfen soll, dafs der Windungswinkel + dem Standwinkel $< 90^\circ$ sei. Für $\alpha + \beta = 90^\circ$ wird $gd$ mit der Horizontalen $\ddagger$, und kein dem Punkt $g$ nachfolgender liegt niedriger als er, es wird also keine Kammer gebildet; ist $\alpha + \beta > 90^\circ$, so liegt der dem Punkt $g$ nachfolgende Punkt höher und das anstofsende Wasser wird zurückgeworfen.

Je geringer $\beta$ genommen wird, desto länger wird die Schneckentrommel im Verhältnifs zur Hubhöhe, desto gröfser also die Nebenlast; je gröfser $\beta$ bei einerlei $\alpha$, desto flacher wird die Kammer, wie Fig. 74 nachweis't, wenn man sich die Trommel um $c$ nach rechts aufwärts sich langsam drehen denkt, wo dann die waagerechten Linien $gh$ immer kürzer werden und endlich am linken Spindel-Umfang die Punkte $d$ und $g$ sich zu Null vereinigen, so dafs also mit dem Wachsthum von $\beta$ bei einerlei $\alpha$ die Nutzlast $M$ immer geringer wird.

Je geringer $\alpha$ wird, desto näher rücken die Schneckengänge an einander, desto schmaler, aber auch desto tiefer werden die Kammern; je gröfser man $\alpha$ nimmt, desto länger, aber auch desto flacher werden die Kammern.

7. Ist $g$ der höchste Punkt der Kammer, liegt derselbe also höher als jeder der ihm zu beiden Seiten beliebig nahe gedachten Punkte, so tangirt die horizontale, durch $g$ gelegte Ebene $mm'$ den Schnecken-Umfang in $g$. Desgleichen tangirt die

Fig. 76.



durch $d$ gelegte Horizontal-Ebene $dd'$ den Schnecken-Umfang in $d$, wenn $d$ der niedrigste Punkt der Kammer ist.

Um nun allgemein die Tiefe $md$ der Kammer bei gegebenen $\alpha$ und $\beta$ zu finden, sind die Punkte $g$ und $d$ ihrer Lage nach zu bestimmen.

Es sei für den Halbmesser $ac = r$, $ak = rx$ der Bogen des Grundkreises, zu welchem ein in $a$ beginnender aufsteigender Theil $ag$ der Schneckenlinie gehört, so ist die im Umfang der Schnecke $\ddagger$ der Spindel gezogene gerade Linie

$$kg = ak \cdot tg \, \alpha = rx \, tg \, \alpha$$

und da $\angle m'gk = \angle lbe = \beta$, so ist der senkrechte Abstand zwischen $k$ und $g$

$$k'm' = rx \, tg \, \alpha \sin \beta$$

Ist $kp$ normal $ab$, so ist $kp$ horizontal, also $p'm' = k'm'$,

$$\angle qaf = \beta, \text{ folglich } \angle paq = 90^\circ - \beta$$

und der senkrechte Abstand zwischen $a$ und $p$

$$p'a = ap \sin paq = ap \cos \beta = r(1 - \cos x) \cos \beta$$

mithin der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten Punkt $a$ der Grundfläche und einem höher liegenden Punkt $g$ der Schneckenlinie

$$a'm' = rx \, tg \, \alpha \sin \beta - r(1 - \cos x) \cos \beta \quad (2)$$

der Punkt $g$ ist nun offenbar der höchste Punkt für denjenigen Werth von $x$, für welchen $a'm'$ ein Maximum wird, wenn also

$$\frac{\partial (a'm')}{\partial x} = r \, tg \, \alpha \sin \beta - r \cos \beta \sin x = 0$$

woraus $\sin x = tg \, \alpha \, tg \, \beta$

Nimmt man ferner einen Bogen $ako = rx'$ für einen von $g$ aus herabsteigenden Theil $gd$ der Schneckenlinie,
so hat man $a'd' = rx' \, tg\,\alpha \sin\beta$

und $a'o' = r[1 + \cos(180 - x')] \cos\beta$
$= r(1 - \cos x) \cos\beta$

mithin der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten Punkt $a$ der Grundfläche und einem tiefer liegenden Punkt $d$ der Schneckenlinie

$$n d' = r(1 - \cos x') \cos\beta - rx' \, tg\,\alpha \sin\beta \quad (3)$$

und es wird der Punkt $d$ offenbar der niedrigste Punkt für denjenigen Werth von $x'$, für welchen $a'd'$ ein Maximum wird, wenn also

$$\frac{\partial(a'd')}{\partial x} = r \sin x' \cos\beta - r \, tg\,\alpha \sin\beta = 0$$

woraus $\sin x' = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$

Mithin ist $\sin x = \sin x'$, $x$ liegt im ersten, $x'$ im zweiten Quadrant,

$$x' = 180^\circ - x = \pi - x \quad (4)$$

$$\text{und } \sin x = \sin x' = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \quad (5)$$

Die Tiefe der Kammer ist $a'm' + n'd' =$
$md = -r \, tg\,\alpha \sin\beta (x' - x)$
$+ r \cos\beta (\cos x - \cos x')$ oder

$$md = -r \, tg\,\alpha \sin\beta (\pi - 2x) + 2r \cos\beta \cos x \quad (6)$$

Für gegebene $\alpha$ und $\beta$ haben also $x$, $x'$ und $md$ ganz bestimmte Werthe. Man kann aus $\alpha$ und $\beta$ auch $x$ geometrisch construiren:

Es sei $lb$ die unterste Kante des Schnecken-Umfangs, $\angle ebl = \beta$, $ba$ der Durchmesser des Grundkreises, zeichne

Fig. 77.

den Halbkreis, errichte den senkrechten Halbmesser $CA$, schneide $ba$ durch $AB$ unter dem $\angle CAB = \beta$, errichte in $B$ ein Loth $BD$ auf $bB$, schneide dieses durch $CD$ unter dem $\angle DCB = \alpha$, ziehe $Dk \mp ba$, so ist $\angle kca = x$.

Denn $CB = r \, tg\,\beta$, $BD = CB \, tg\,\alpha = r \, tg\,\beta \cdot tg\,\alpha = kp = r \sin kca$; folglich ist $\angle kca = x$.

8. Es sei $z$ der Punkt in der Peripherie des Grundkreises $ab$, welcher dem zweiten höchsten Punkt, also dem Endpunkt $h$ der Kammer entspricht, Bogen $aov = rx''$, so ist, wie $gk = rx \, tg\,\alpha$, auch $hv = rx'' \, tg\,\alpha$
wie $k'm' = rx \, tg\,\alpha \sin\beta$,
auch $v'm' = rx'' \, tg\,\alpha \sin\beta$,
und wie $k'b' = r(1 + \cos x) \cos\beta$,
auch $z'b' = r(1 + \cos x'') \cos\beta$.

Da nun $h$ und $g$ von der Horizontalen $eb'$ einerlei Abstand $m'b'$ haben,
so ist $k'm' + k'b' = v'm' + z'b'$
oder $rx \, tg\,\alpha \sin\beta + r(1 + \cos x) \cos\beta$
$= rx'' \, tg\,\alpha \sin\beta + r(1 + \cos x'') \cos\beta$
oder $x \, tg\,\alpha \, tg\,\beta + \cos x = x'' \, tg\,\alpha \, tg\,\beta + \cos x''$
schreibt man $180^\circ \pm y$, oder $\pi \pm y$ für $x''$, so erhält man

$$\cos y \mp tg\,\alpha \, tg\,\beta \, y = tg\,\alpha \, tg\,\beta (\pi - x) - \cos x \quad (7)$$

Da nun für die gegebenen $\alpha$ und $\beta$ $x = arc \sin tg\,\alpha \, tg\,\beta$, also ein bestimmter Werth ist, so ist auch $y$ ein ganz bestimmter Werth, und zwar gilt $x'' > \pi$,
also $\cos y + tg\,\alpha \, tg\,\beta \cdot y$
wenn sich $tg\,\alpha \, tg\,\beta (\pi - x) - \cos x > 1$ ergiebt
und $x'' < \pi$
wenn $tg\,\alpha \, tg\,\beta (\pi - x) - \cos x < 1$ ist.

Die Länge $L$ der Kammer, im Umfang gemessen, ist die Linie $gdb''h$, und diese ist offenbar = Bogen $kobv \cdot \sec\alpha$, also

$$L = r(x'' - x) \sec\alpha \quad (8)$$

9. Bis hierher ist bei der Wasserschnecke nur der Querschnitt $gdh$ der von einer Windung geschöpften Wassermenge $M$, deren Tiefe $md$ und deren Länge $gdh = L$ im Umfang betrachtet worden, nicht aber $M$ selbst.

Fig. 78 zeigt den Durchschnitt einer Schnecke, wie Fig. 74, aber von größerem $\beta$ und kleinerem $\alpha$. Gleiche Buchstaben mit denen in Fig. 74 bezeichnen dieselben Gegenstände, nur daſs hier nicht der höchste Punkt des Schnecken-Umfangs, sondern der der Spindel mit $g$ bezeichnet ist, weil über diesen das geschöpfte Wasser bei der Drehung doch wieder ausflieſst.

Hinter der Kante $ac'$ beginnt die Einström-Oeffnung von der Höhe $ac'$; hat die Schnecke nur einen Gang, so ist deren Breite $af$, und diese zugleich die Breite der wasserhaltenden Windung. Erhebt sich $ac'$ von unten nach oben, so tritt das Wasser, soweit die Höhe des Wasserspiegels es gestattet, bis gegen die Fläche $fkl$, allein das geschöpfte Wasser flieſst oberhalb der Kante $g$ wieder zurück, und es bleibt nur das Wasser bis zur Oberfläche $gh$ darin.

Es ist also eine breite Windung unvortheilhaft, und man schränkt diese ein, theils durch ein kleineres $\alpha$, theils durch 2 oder mehrere Gänge statt eines einzigen.

So z. B. ist hier noch ein zweiter, von $a'$ ausgehender Gang $a'd'f'l'n'$ gezeichnet, die erste Wasserkammer wird also durch die beiden Flächen $abde$ und $d'ef'k$ begrenzt; durch die eingeschobene Fläche ist die Wassermenge der ersten Kammer nicht vermindert, denn bei nur einer Windung würde die Fläche $lm$ deren

Fig. 78.



und gleichwohl wird die Wassermenge $M$ von dem Querschnitt $ghd$ geschöpft und gehoben. Die nach Eytelwein theoretisch ermittelte $M$ kommt also der wirklich geförderten am nächsten, je schmaler die Windungen sind, und es ist daher zu erklären, dafs die Theorie mit den, pag. 370—372 seiner Hydraulik angegebenen Resultaten aus Versuchen so nahe übereinstimmt, indem die Schnecke bei 5,94" Durchmesser eine Windungsweite $ad'$ von nur 1,15" und die Höhe $ac' = 1,62$" hatte.

Nach Eytelwein hat man, unter der Bedingung, dafs der Wasserspiegel bis zum Normalpunkt ($g°$ Fig. 74) reicht,

$$M = fR(\lambda - \sigma - \delta) \sec \alpha$$

hier ist $f = a \cdot b$ (Fig. 74 $ad' \times ac$)

Grenze sein, bis wohin aber der Wasserspiegel $gh$ nicht reicht.

10. Eytelwein giebt in seiner Hydraulik, pag. 361 (§. 262) u. f., die Theorie des Effects der Wasserschnecke, aber er sagt selbst, pag. 368, es sei zu beklagen, dafs man nicht in's Grofse gehende Versuche habe. Diese Theorie ist kurz folgende:

Die Einström-Oeffnung $agg'd'$ hat die Breite $ad' = a$, die Höhe $ag = b$, also den Querschnitt $ab$. Der Schwerpunkt sei $o$, so ist von der in der ersten Kammer befindlichen Wassermenge vom Querschnitt $ab$ die centrische Linie $oprq$; in $p$ trifft sie die Horizontale $pg$, mithin ist der wasserhaltende Bogen die Linie $prq$, weil von $p$ das Wasser über $q$ abströmt und folglich die Wassermenge $M = prq \times ab$.

Hierbei ist Folgendes zu bemerken: Denkt man sich durch $p$ eine Normale zwischen die Flächen $abd$ und $def$, so liegt über $hp$ ein Wasserdreieck, welches noch ausfliefst, welches also zu viel gerechnet ist, dafür aber unter $pg$ ein ihm ziemlich gleiches, welches zu wenig gerechnet worden, und deshalb ist die Annahme für die Länge des wasserhaltenden Bogens annäherungsweise ganz richtig. Stellt man sich aber vor, dafs nur ein Schneckengang vorhanden sei, so ist $af = a$, $ac'$ bleibt $b$, der Schwerpunkt rückt in die Linie $d'g'$, der tiefste Punkt der centrischen Linie liegt in der Mitte zwischen $f$ und $h$, der wasserhaltende Bogen wird also äufserst kurz; rückt $f$ weiter hinauf, wird $a$ gröfser, so wird der wasserhaltende Bogen zu Null, also auch $M$ = Null,

$R$ = dem Halbmesser bis zur centrischen Linie

$\lambda$ = Bogen $akov = x''$ für den Halbmesser = 1 (Fig. 76)

$\sigma$ = Bogen $ko (= x' - x)$ desgl.

$\delta$ = Bogen $ak$ ($= x = arc \sin tg\, \alpha \cdot tg\, \beta$) desgl.

Es ist $\lambda = 3{,}1416 - \sin \delta + \sqrt{(2 + 2B + \sin^2 \delta - 6{,}283 \sin \delta)}$

hierin

$$B = \cos \delta - \frac{b \cos \delta}{2R} - \frac{a\, tg\, \beta}{2R} + \delta \sin \delta$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega - \delta$$

$\omega$ findet man aus $\sin \omega = \dfrac{\frac{1}{2}\pi \sin \delta - B}{1 - \sin \delta}$

11. Es ist schon ad 4 bemerkt, dafs der Wasserspiegel bis zu dem Normalpunkt $g°$ Fig. 74 reichen mufs, wenn die gröfstmögliche $M$ gefördert werden soll. Die Einflufsöffnung befindet sich ganz unter Wasser, so wie sie aber hervortaucht, dringt die Luft darüber in die Kammer, und es wird bei jeder Umdrehung auch das aërostatische Gleichgewicht hergestellt.

Bringt man die Schnecke so tief unter Wasser, dafs die Einflufsöffnung auch bei ihrer höchsten Lage aus dem Wasser nicht reicht, schöpft sie also nicht auch Luft, so ist die erste Windung ganz voll Wasser, dies rückt bei abermaliger Umdrehung zum Theil in die zweite Windung und folglich entsteht ein luftleerer Raum. Vermöge des Drucks der äufseren Atmosphäre wird also das Wasser gewaltsam durch die Einflufsöffnung in die

unterste Windung getrieben. Aber auch von den obersten Windungen aus äufsert sich derselbe Luftdruck, die oberen Windungen erfahren oberhalb des Wasserspiegels Luftverdünnungen, das Wasser wird also am Aufsteigen gehindert, und es geschehen wiederholt gewaltsame Luft-Ausgleichungen mit Geräusch und Unterbrechung im Betrieb.

12. Die Wasserschnecke ist eine vorzügliche Wasserhebemaschine für mittlere Förderungshöhen; bei grofsen Höhen wird die Spindel besonders wegen der nothwendigen schrägen Lage verhältnifsmäfsig zu lang und mufs der Länge angemessen stark sein, wiewohl die Schneckengänge nebst Mantel sehr bedeutend zur Stabilität gegen Einbiegung beitragen, desgleichen wird die zu drehende Last: Schneckenkörper plus Wasser-Inhalt, besonders bei mehreren Gängen zu grofs. Bei mittlerer Förderungshöhe mufs aber nur reines Wasser gehoben werden dürfen; Kraut, Schlick u. dergl. verstopfen die Gänge und diese können nur gereinigt werden, indem man den Mantel theilweise losbricht. Für krautiges Wasser und bei Versandungen ist die Wasserschraube vorzuziehn, weil deren Schneckengänge zu Tage liegen und leicht zu reinigen sind.

Die Schraube ohne Mantel liegt mit möglichst geringem Spielraum in einem

Fig. 79.



festen, gemauerten oder gezimmerten Mantel, Trog genannt, der von der Höhe der Schneckenaxe ab eine senkrechte Fortsetzung der Wandungen erhält.

Die Schnecke fördert Wasser, sie mag noch so langsam umgedreht werden, die Schraube dagegen nicht. Es giebt eine Geschwindigkeit derselben, bei welcher das geschöpfte Wasser durch den Spielraum zwischen Umfang und Mantel gänzlich zurückfliefst. Diese effectlose Geschwindigkeit vermindert sich mit der Höhe des Spielraums, der Glätte der Schneckengänge nebst Spindel und der Rauhigkeit der Manteloberfläche. Die Geschwindigkeit der Schraube mufs also gröfser sein, als das eben gedachte Minimum, dagegen kann sie auch so gesteigert werden, dafs die Centrifugalkraft des Wassers plus der Reibung der Wassertheilchen gegen den Mantel dem Bestreben zum Abflufs durch den Spielraum das Gleichgewicht hält, so dafs der darin befindliche Wasserring unbeweglich bleibt und das geschöpfte Wasser wirklich gehoben und ausgegossen wird. Steigert man diese **Normalgeschwindigkeit**, so kommt auch ein Theil des äufseren Wasserringes mit zum Ausgufs.

**Arcus, Bogen, Kreisbogen.** Ein Theil des Umfangs eines Kreises. Die Hälfte des Kreisumfangs heifst **Halbkreis**, der vierte Theil **Viertelkreis** oder **Quadrant**; der sechste Theil **Sextant**, der achte Theil **Octant**.

Gleiche Bogen eines Kreises gehören zu gleichen Centriwinkeln, ungleiche Bogen desselben Kreises verhalten sich wie deren zugehörige Centriwinkel.

Beschreibt man 2 reguläre Vielecke von gleich viel Seiten, das eine in einem Kreis, das andere um denselben, so wird der **Kreisumfang (die Peripherie)** von den Umfängen beider Vielecke eingeschlossen, und mit wiederholter Verdoppelung der Seiten beider Vielecke kommen deren Umfänge dem des Kreises an Länge immer näher, so dafs die Peripherie den Grenzwerth der Umfänge beider Vielecke bildet (vergl. Analysis, pag. 66.)

2. Die Elementar-Geometrie lehrt, die Umfänge beider Vielecke von bestimmter Seitenzahl durch den Halbmesser des zugehörigen Kreises auszudrücken. So steht im Art. **Achtundvierzigeck** (pag. 27) die Seite des in einem Kreise vom Halbmesser $r$ beschriebenen 48ecks

$$s = 0{,}1308062 \times r$$

dessen Umfang ist also

$$48 \cdot 0{,}1308062 \times r = 6{,}2786976 \cdot r$$

Die Seite des um den Kreis vom Halbmesser $r$ beschriebenen 48ecks

$$S = 0{,}1310870 \times r$$

dessen Umfang ist also

$$48 \cdot 0{,}1310870 \cdot r = 6{,}2921760 \cdot r$$

Es ist also die Länge der Peripherie offenbar zwischen $6{,}278\ldots r$ und $6{,}292\ldots r$ begriffen.

Da alle regulären Vielecke von gleich viel Seiten und alle Kreise einander ähnlich sind, so verhalten sich deren Umfänge wie die dazu gehörigen Kreishalbmesser oder Kreisdurchmesser, mithin haben jene Umfänge mit den Kreisdurchmessern ein constantes Verhältnifs; und die abstracte Zahl, welche den Kreisumfang als Vielfaches vom Durchmesser ($d$) angiebt, wird in der Mathematik mit dem griechischen Buchstab $\pi$ bezeichnet.

Es ist nun

$$s = 3{,}1393488 \cdot d$$
$$S = 3{,}1460880 \cdot d$$

Dis Zahl $\pi$ liegt also zwischen 3,139... nnd 3,146...

Die Elementar-Geometrie lehrt ferner, aus dem Umfang eines zum Durchmesser $d$ gehörenden $n$ seitigen reg. Vielecks (reg. $N$ecks) den Umfang des zu demselben Durchm. $d$ gehörenden $2N$ecks zu finden. Der Umfang des $2N$ecks im Kreise wird gröfser, der des $2N$ecks um den Kreis kleiner; durch wiederholte Verdoppelnng, also von dem 48eck zum 96eck, von diesem zum 192eck n. s. f. erhält man die Grenzen von $\pi$ immer enger, nnd ergiebt sich so auf elementarem synthetischen Wege die Zahl $\pi$ bis zu beliebiger Annäherung.

3. Die Zahl $\pi$ ist irrational, es ist ein commensnrables Verhältnifs zwischen dem Durchmesser nnd der Peripherie eines Kreises nicht vorhanden. In Vega's Sammlnng mathematischer Tafeln (1849) pag. 839 ist $\pi$ auf 140 Decimalstellen angegeben; in solcher Ausdehnung wird $\pi$ nirgend gebrancht. Auf 15 Decimalstellen ist

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793 \quad (1)$$
$$\log br\, \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94134 \quad (2)$$
$$\log n\, \pi = 1{,}14472\ 98858\ 49400 \quad (3)$$
$$\log br\, (\log n\, \pi) = 0{,}05870\ 30212$$

4. Der Umfang des Kreises wird in 360 Grade (360°) getheilt, jeder Grad hat 60 Minuten (60′), jede Minute hat 60 Secunden (60″).

Der Kreisumfang hat demnach 360°
$= 21600'$
$= 1296000''$

Diese Bogenmaafse sind zugleich die Maafse der den Bogen angehörigen Centriwinkel.

In der Trigonometrie und der Analysis wird jede Kreisfunction auf den Radius = der Einheit ($r = 1$) bezogen.

Demnach hat der Kreisumfang
im Winkelmaafs 360°
im Bogen(längen)maafs

$$2\pi = 6{,}28318\ 53072 \quad (4)$$
$$\log br = 0{,}79817\ 98734$$

der Halbkreis
im Winkelmaafs 180°
im Bogenmaafs $= \pi = 3{,}14159\ 26536$

$$\log br = 0{,}49714\ 98727$$

der Quadrant
im Winkelmaafs 90°
im Bogenmaafs $= \frac{1}{2}\pi = 1{,}57079\ 63268$

$$\log br = 0{,}19611\ 98719$$

5. Die trigonometrischen Tafeln geben die Bogen in Winkelmaafs an, die trigonometrischen Functionen aber als Längen für den Halbmesser = 1. Vega, pag. 315, hat z. B.: $\sin 9°20' = 0{,}1621779$

D. h. Wenn man in einem Kreise vom Halbmesser = 1 den Sinus eines Centriwinkels von 9°20′ zeichnet, so hat dieser Sinus eine Länge von 0,1621779

Hat der Radius 1000 Fufs Länge, so hat der Sinus die Länge = 162,1779 Fufs.

Im Vega, pag. 268, steht:

$$\log \sin 9°20' = 9{,}2099917$$

d. h. $\log 0{,}1621779 = 9{,}2099917 - 10$
$= 0{,}2099917 - 1$

Ist nun die Länge eines Bogens gegeben, soll z. B. $tg\, \frac{3}{2} x$ gefunden werden, wo $x$ eine Länge ist, und findet man $x = 1{,}7325$ so hat man $tg\, \frac{3}{2} \cdot 1{,}7325 = tg\, 2{,}59875$

Um diese Tangente in den Tafeln zu finden, mufs erst der Centri∠ ($y$) ermittelt werden, welcher der Bogenlänge 2,59875 entspricht.

Nun ist $\pi : 2{,}59875 = 180° : y$

$$\text{daher } y = \frac{2{,}59875}{3{,}141952\ldots} \times 180°$$

| | |
|---|---|
| $\log 180$ | $= 2{,}2552725$ |
| $\log\ 2{,}59875$ | $= 0{,}4147645$ |
| Summa | $= 2{,}6700370$ |
| $\log \pi$ | $= 0{,}4971499$ |
| $\log y$ | $= 2{,}1728871$ |

In den Tafeln findet man hieraus

$$y = 148{,}8974°$$
$$= 148°53'\,50\tfrac{2}{3}''$$

Nun ist $tg\ 148°\ 53'\ 50\frac{2}{3}''$
$= -tg\,(180° - 148°\ 53'\ 50\frac{2}{3}'')$
$= -tg\ 31°\ 6'\ 9\frac{1}{3}''$

welche in den Tafeln angegeben ist.

6. Es kommt häufig vor, dafs trigonometrische Linien in Bogen statt in Winkeln angegeben werden, und um den Berechnungen für Verwandlung von Bogenmaafs in Winkelmaafs zu entgehen, hat man Hülfstafeln wie in Vega, pag. 304.

Folgende Tafel ist gegen die Vega'sche dahin abgekürzt, dafs die Grade, Minuten und Secunden nur von 1 bis 10 vollständig, von 10 ab aber nur von 10 zu 10 angegeben sind.

**Tafel der Bogenlängen für den Halbmesser = 1 mit den zugehörigen Centriwinkeln.**

| Centriwinkel | für Grade | für Minnten | für Secnnden |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,0174532925 | 0,0002908882 | 0,0000048481 |
| 2 | 0,0349065850 | 0,0005817764 | 0,0000096963 |
| 3 | 0,0523598776 | 0,0008726646 | 0,0000145444 |
| 4 | 0,0698131701 | 0,0011635528 | 0,0000193926 |
| 5 | 0,0872664626 | 0,0014544410 | 0,0000242407 |
| 6 | 0,1047197551 | 0,0017453293 | 0,0000290888 |
| 7 | 0,1221730476 | 0,0020362175 | 0,0000339370 |
| 8 | 0,1396263402 | 0,0023271057 | 0,0000387851 |
| 9 | 0,1570796327 | 0,0026179939 | 0,0000436332 |
| 10 | 0,1745329252 | 0,0029088821 | 0,0000484814 |
| 20 | 0,3490658504 | 0,0058177642 | 0,0000969627 |
| 30 | 0,5235987756 | 0,0087266463 | 0,0001454441 |
| 40 | 0,6981317008 | 0,0116355284 | 0,0001939255 |
| 50 | 0,8726646260 | 0,0145444104 | 0,0002424068 |
| 60 | 1,0471975512 | 0,0174532925 | 0,0002908882 |

| Centriwinkel | für Grade | Centriwinkel | für Grade | Centriwinkel | für Grade |
|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 1,2217304764 | 170 | 2,9670597284 | 270 | 4,7123889804 |
| 80 | 1,3962634016 | 180 | 3,1415926536 | 280 | 4,8869219056 |
| 90 | 1,5707963268 | 190 | 3,3161255788 | 290 | 5,0614548308 |
| 100 | 1,7453292520 | 200 | 3,4906585040 | 300 | 5,2359877560 |
| 110 | 1,9198621772 | 210 | 3,6651914292 | 310 | 5,4105206812 |
| 120 | 2,0943951024 | 220 | 3,8397243544 | 320 | 5,5850536064 |
| 130 | 2,2689280276 | 230 | 4,0142572796 | 330 | 5,7595865316 |
| 140 | 2,4434609528 | 240 | 4,1887902048 | 340 | 5,9341194568 |
| 150 | 2,6179938780 | 250 | 4,3633231300 | 350 | 6,1086523820 |
| 160 | 2,7925268032 | 260 | 4,5378560552 | 360 | 6,2831853072 |

Man findet in der vorstehenden Hülfstafel, dafs die gegebene Bogenlänge 2,59875 zwischen 140° und 150° liegt.

140° entspricht dem Bog. = 2,44346 09528
der gegebene Bog. = 2,59875
Rest = 0,15528 90472
8° entspricht dem Bog. = 0,13962 63402
Rest = 0,01566 27070
50′ entspricht dem Bog. = 0,01454 44104
Rest = 0,00111 82966
3′ entspricht dem Bog. = 0,00087 26646
Rest = 0,00024 56320
50″ entspricht dem Bog. = 0,00024 24068
Rest = 0,00000 32252
1″ entspricht dem Bog. = 0,00000 48481

mithin $y = 148° 53' 50\frac{2}{3}''$

7. Ist für den Halbmesser = 1 die Länge einer trigonometrischen Linie = $x$, und bezeichnet $\alpha$ den dazu gehörigen Bogen oder Centriwinkel, so drückt man den Bogen durch die trig. Linie folgender Art aus:

$(\alpha =)\, arc\, sin\, x$ oder $arc(sin = x)$
wenn $x = sin\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, cos\, x$ oder $arc(cos = x)$
wenn $x = cos\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, tg\, x$ oder $arc(tg = x)$
wenn $x = tg\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, cot\, x$ oder $arc(cot = x)$
wenn $x = cot\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, sec\, x$ oder $arc(sec = x)$
wenn $x = sec\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, cosec\, x$ oder $arc(cosec = x)$
wenn $x = cosec\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, sinvers\, x$ oder $arc(sinv = x)$
wenn $x = sinv\, \alpha$
$(\alpha =)\, arc\, cosvers\, x$ oder $arc(cosv = x)$
wenn $x = cosv\, \alpha$

8. So wichtig es für die Berechnung der trig. Linien ist, diese als Function des Bogens in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des Bogens zu berechnen, eben so wichtig ist die Entwickelung des Bogens als Function einer trig. Linie in eine Reihe nach den fortlaufenden Potenzen dieser Linie.

Diese Reihen-Entwickelnngen sollen hier geschehen, nnd zwar dnrch Entwickelung der Differenziale des Bogens in Reihen nach fortlaufenden Potenzen der Urveränderlichen nnd darauf folgender Anwendnng der Maklaurin'schen Reihe znr Entwickelung der Fnnction selbst in eine Reihe.

9. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,sin\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des $sin = x$.

Die Differenzialrechnnng lehrt, dafs

$$\partial(arc\,sin\,x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\partial x$$

Um nnn die übrigen Differenziale der Fnnction leichter und für die Maklaurinsche Reihe leicht brauchbar aufznfinden, ist dies Differenzial in eine Reihe zu entwickeln.

Man setze demnach

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + Fx^{10} + Gx^{12} + \ldots..$$

wo $A$, $B$, $C$ u. s. w. constante, aber noch nnbekannte Coefficienten sind.

Diese Gleichung quadrirt und auf Null redncirt (s. pag. 48, No. 4), giebt

$$\begin{aligned}0 = A^2 - 1 &+ (2AB - A^2)x^2 \\ &+ (B^2 + 2AC - 2AB)x^4 + \\ (2BC + 2AD - 2AC - B^2)x^6 &+ \\ (C^2 + 2BD + 2AE - 2BC - 2AD)x^8 &+ \\ (2CD + 2BE + 2AF - C^2 - 2BD - 2AE)x^{10} &+ \\ (D^2 + 2CE + 2BF + 2AG - 2CD - 2BE &\\ - 2AF)x^{12} \ldots..&\end{aligned}$$

Da $x$ jeden beliebigen reellen Werth haben kann, so ist die Gleichung nur möglich, wenn $A^2 - 1 = 0$ ist, und daher ist

$$1)\ A = 1$$

Es ist mithin die Gleichnng nun

$$0 = (2AB - A^2)x^2 + (B^2 + 2AC - 2AB)x^4 + \ldots$$

Diese Gleichung dnrch $x^2$ dividirt, giebt

$$0 = 2AB - A^2 + (B^2 + 2AC - 2AB)x^2 + \ldots$$

und aus dem eben angeführten Grunde kann diese Gl. nur bestehen, wenn

$$2AB + A^2 = 0$$

Hierin $A = 1$ gesetzt, giebt

$$2)\ B = \tfrac{1}{2}$$

Die Gleichung ist nun

$$0 = (B^2 + 2AC - 2AB)x^2 + \ldots.$$

Diese durch $x^2$ dividirt, giebt

$$0 = B^2 + 2AC - 2AB + (2BD + 2AD - 2AC - B^2)x^2 + \ldots.$$

folglich $B^2 + 2AC - 2AB = 0$

Es ist hiernach klar, dafs die obige auf 0 reducirte Gleichnng nur nnter der Bedingung möglich ist, dafs jeder der einzelnen Coefficienten $= 0$ ist. Wie nnn $A$ nnd $B$ gefunden sind, erhält man ferner

$$C = \tfrac{3}{8}$$
$$D = \tfrac{5}{16}$$
$$E = \tfrac{35}{128}$$
$$F = \tfrac{63}{256}$$
$$G = \tfrac{231}{1024}$$

und es ist demnach

$$\partial(arc\,sin\,x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \tfrac{35}{128}x^8 + \tfrac{63}{256}x^{10} + \tfrac{231}{1024}x^{12} + \ldots.$$

Nnn ist es leicht, die folgenden Differenziale von $arc\,sin\,x$ zn finden. Man erhält sogleich:

$$\partial^2(arc\,sin\,x) = +x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3\cdot5}{8}x^5 + \frac{35}{16}x^7 + \frac{5\cdot63}{128}x^9 + \frac{3\cdot231}{256}x^{11}$$

$$\partial^3(arc\,sin\,x) = +1 + \frac{3\cdot3}{2}x^2 + \frac{5\cdot15}{8}x^4 + \frac{7\cdot35}{16}x^6 + \frac{9\cdot315}{128}x^8 + \frac{11\cdot693}{256}x^{10}$$

$$\partial^4(arc\,sin\,x) = +9x + \frac{75}{2}x^3 + \frac{3\cdot245}{8}x^5 + \frac{2835}{16}x^7 + \frac{5\cdot7623}{128}x^9$$

$$\partial^5(arc\,sin\,x) = +9 + \frac{3\cdot75}{2}x^2 + \frac{5\cdot735}{8}x^4 + \frac{7\cdot2835}{16}x^6 + \frac{9\cdot38115}{128}x^8$$

$$\partial^6(arc\,sin\,x) = +225x + \frac{3675}{2}x^3 + \frac{3\cdot19845}{8}x^5 + \frac{343035}{16}x^7$$

$$\partial^7(arc\,sin\,x) = +225 + \frac{3\cdot3675}{2}x^2 + \frac{5\cdot59535}{8}x^4 + \frac{7\cdot343035}{16}x^6$$

$$\partial^8(arc\,sin\,x) = +11025x + \frac{297675}{2}x^3 + \frac{3\cdot2401245}{8}x^5$$

$$\partial^9(arc\,sin\,x) = +11025 + \frac{3\cdot297675}{2}x^2 + \frac{5\cdot7203735}{8}x^4$$

$$\partial^{10}(arc\,sin\,x) = +893025x + \frac{36018675}{2}x^3$$

$$\partial^{11}(arc\,sin\,x) = +893025 + \frac{3\cdot36018675}{2}x^2$$

$$\partial^{12}(arc\,sin\,x) = +108056025x$$

$$\partial^{13}(arc\,sin\,x) = +108056025$$

Bedeutet $f$ den Werth einer Function $fx$ von $x$, welcher entsteht, wenn man $x=0$ setzt; desgl. $\partial^1 f$; $\partial^2 f$; $\partial^3 f \ldots \partial^n f$ die Werthe des ersten, zweiten .... nten Differenzials der Function $fx$, in jedem $x=0$ gesetzt, dann hat man die (Maklaurin'sche) Reihe

$$fx = f + \frac{x}{1}\partial^1 f + \frac{x^2}{1\cdot 2}\partial^2 f + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\partial^3 f + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\partial^4 f + \ldots \frac{x^n}{(1\ldots n)}\partial^n f$$

Hier ist

$$fx = arc\,sin\,x$$

wird der *Sinus* $= 0$, so wird auch der Bogen $=0$, mithin $f=0$

Aus den obigen Reihen ersieht man, dafs, wenn überall $x=0$ gesetzt wird

$\partial^1 f = +1$ $\quad \partial^7 f = +225$
$\partial^2 f = \ \ 0$ $\quad \partial^8 f = \ \ 0$
$\partial^3 f = +1$ $\quad \partial^9 f = +11025$
$\partial^4 f = \ \ 0$ $\quad \partial^{10} f = \ \ 0$
$\partial^5 f = +9$ $\quad \partial^{11} f = +893025$
$\partial^6 f = \ \ 0$ $\quad \partial^{12} f = \ \ 0$
$\quad \partial^{13} f = +108056025$

Die Maklaurin'sche Reihe ergiebt also

$$arc\,sin\,x = 0 + 1\cdot\frac{x}{1} \pm 0\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + 1\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} \pm 0\cdot\frac{x^4}{1\ldots 4} + 9\cdot\frac{x^5}{1\ldots 5} \pm 0\cdot\frac{x^6}{1\ldots 6} + 225\cdot\frac{x^7}{1\ldots 7} \pm 0\cdot\frac{x^8}{1\ldots 8} + 11025\cdot\frac{x^9}{1\ldots 9} \pm 0\cdot\frac{x^{10}}{1\ldots 10} + 893025\cdot\frac{x^{11}}{1\ldots 11} \pm 0\cdot\frac{x^{12}}{1\ldots 12} + 108056025\cdot\frac{x^{13}}{1\ldots 13} \pm \ldots$$

oder

$$arc\,sin\,x = x + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{9x^5}{1\cdot 2\ldots 5} + \frac{225x^7}{1\cdot 2\ldots 7} + \frac{11025\,x^9}{1\cdot 2\ldots 9} + \frac{893025\,x^{11}}{1\cdot 2\ldots 11} + \frac{108056025\,x^{13}}{1\cdot 2\ldots 13} + \ldots$$

Betrachtet man die Entstehung der Zähler-Coefficienten aus den auf einander vorgenommenen Differenzirungen, so läfst sich leicht ein Gesetz ableiten, nach welchem die Reihe fortschreitet:

Es ist sodann

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3}$$
$$\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}$$
$$\frac{225}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$$
$$\frac{11025}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$$
$$\frac{893025}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11}$$
$$\frac{108056025}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\cdot 12\cdot 13} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 13}$$

mithin

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot x^{11}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 13} + \ldots$$

Das allgemeine (nte) Glied ist:

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Bezeichnet man den Bogen mit $\alpha$, so ist $x = sin\,\alpha$, und man kann die Reihe auch schreiben

$$\alpha = sin\,\alpha + \frac{1\cdot sin^3\alpha}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot sin^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\,sin^7\cdot}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

10. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cos\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des $cos = x$.

Es ist

$$\frac{\partial\, arc\,cos\,x}{\Delta x} = -\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

also = dem negativen Differenzial von $arc\,sin\,x$. Nun ist nach No. 9

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \tfrac{35}{128}x^8 + \ldots$$

folglich

$$-\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = -1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{8}x^4 - \tfrac{5}{16}x^6 - \tfrac{35}{128}x^8$$

und es wird die Rechnung wie in No. 9 durchgeführt:

$\partial^1 f = -1 \qquad \partial^6 f = 0$
$\partial^2 f = 0 \qquad \partial^7 f = -225$
$\partial^3 f = -1 \qquad \partial^8 f = 0$
$\partial^4 f = 0 \qquad \partial^9 f = -11025$
$\partial^5 f = -9 \qquad \partial^{10} f = 0$

u. s. w.

Um $f$, d. h. $arc\cos x$, wenn $x=0$ gesetzt wird, zu bestimmen, weifs man, dafs zu dem $\cos = 0$ der Quadrant, also $\frac{\pi}{2}$ gehört. Es ist nun nach der Maklaurin'schen Reihe

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - \left(1 \cdot \frac{x}{1} + 0 + 1 \cdot \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + 0 + 9 \cdot \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + 0 + 225 \cdot \frac{x^7}{1 \ldots 7} + \ldots\right)$$

Also

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\sin x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1\cdot x^3}{2\ 3} + \frac{3\cdot x^5}{2\ 4\ 5} + \frac{3\cdot5\ x^7}{2\cdot4\ 6\cdot7} + \ldots\right]$$

Bezeichnet man den Bogen mit $\alpha$, so kann man die Reihe auch schreiben:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\cos\alpha + \frac{1\cdot\cos^3\alpha}{2\ 3} + \frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\ 4\ 5} + \ldots\right]$$

wo das allgemeine Glied der Klammergröfse ist

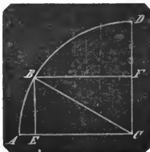
$$\frac{3\cdot5\ 7\ldots(2n-3)}{2\cdot4\ 6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{\cos^{2n-1}\alpha}{2n-1}$$

Dies Resultat für $arc\cos x$ ist auch aus rein geometrischen Betrachtungen zu entnehmen.

Denn ist $ABD$ ein Quadrant, $AB = \alpha$, $BD = \beta$, so ist

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Fig. 80.




Es sei nun

$$\beta = f(\sin\beta) = f(BF) \text{ so ist}$$
$$\beta = f(CE) = f(\cos\alpha)$$

hieraus folgt

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = f(\cos\alpha)$$

mithin

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - f(\cos\alpha)$$

Ein Kreisbogen ist also $= \frac{\pi}{2}$ minus derjenigen Function von seinem *cosinus*, welche allein den Bogen ausdrückt, wenn statt des *cos* der *sinus* des Bogens als urvariabel angesehen wird.

11. **Entwickelung des Bogens ($y = arc\,tg\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $tg = x$.**

Es ist

$$\frac{\partial\, arc\,tg\,x}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck durch wirkliche Division von $(1+x^2)$ in 1 in eine Reihe, so erhält man

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\partial^1\ arc\,tg\,x =$ | $1$ | $-x^2$ | $+x^4$ | $-x^6$ | $+x^8$ | $-x^{10}$ | $+x^{12}$ |
| $\partial^2\ arc\,tg\,x =$ | | $-2x$ | $+4x^3$ | $-6x^5$ | $+8x^7$ | $-10x^9$ | $+12x^{11}$ |
| $\partial^3\ arc\,tg\,x =$ | | $-2$ | $+3\ 4x^2$ | $-5\cdot6x^4$ | $+7\cdot8x^6$ | $-9\cdot10x^8$ | $+11\cdot12x^{10}$ |
| $\partial^4\ arc\,tg\,x =$ | | | $+24x$ | $-4\cdot30x^3$ | $+6\cdot56x^5$ | $-8\cdot90x^7$ | $+10\cdot132x^9$ |
| $\partial^5\ arc\,tg\,x =$ | | | $+24$ | $-3\cdot120x^2$ | $+5\cdot336x^4$ | $-7\cdot720x^6$ | $+9\cdot1320x^8$ |
| $\partial^6\ arc\,tg\,x =$ | | | | $-2\cdot360x$ | $+4\cdot1680x^3$ | $-6\cdot5040x^5$ | $+8\cdot11880x^7$ |
| $\partial^7\ arc\,tg\,x =$ | | | | $-720$ | $+3\cdot6720x^2$ | $-5\cdot30240x^4$ | $+7\cdot95040x^6$ |
| $\partial^8\ arc\,tg\,x =$ | | | | | $+2\cdot20160x$ | $-4\cdot151200x^3$ | $+6\cdot665280x^5$ |
| $\partial^9\ arc\,tg\,x =$ | | | | | $+40320$ | $-3\cdot604800x^2$ | $+5\cdot3991680x^4$ |
| $\partial^{10}\ arc\,tg\,x =$ | | | | | | $-2\cdot1814400x$ | $+4\cdot19958400x^3$ |
| $\partial^{11}\ arc\,tg\,x =$ | | | | | | $-3628800$ | $+3\cdot79833600x^2$ |
| $\partial^{12}\ arc\,tg\,x =$ | | | | | | | $+2\cdot239500800x$ |
| $\partial^{13}\ arc\,tg\,x =$ | | | | | | | $+479001600$ |

Bezeichnet wie in No. 9, $f = arc\,tg\,x$ für $x=0$ so ist $f=0$, weil mit der Tangente auch der zugehörige Bogen = Null wird.

Nach der vorstehenden Reihe ist

$$\begin{array}{ll} \partial^1 f = +1 & \partial^7 f = -720 \\ \partial^2 f = 0 & \partial^8 f = 0 \\ \partial^3 f = -2 & \partial^9 f = +40320 \\ \partial^4 f = 0 & \partial^{10} f = 0 \\ \partial^5 f = +24 & \partial^{11} f = -3628800 \\ \partial^6 f = 0 & \partial^{12} f = 0 \\ & \partial^{13} f = +479001600 \end{array}$$

Daher nach der Maklaurin'schen Reihe

$$arc\,(tg = x) = \frac{x}{1}\cdot(+1) + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot(-2) + \frac{x^5}{1\ldots5}\cdot(+24) + \frac{x^7}{1\ldots7}\cdot(-720) + \frac{x^9}{1\ldots9}\cdot(+40320) + \frac{x^{11}}{1\ldots11}\cdot(-3628800) + \frac{x^{12}}{1\ldots13}\cdot(+479001600)$$

und geordnet

$$arc\,(tg\,x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{13}x^{12}$$

Um einen möglichst nahen Werth für $arc\,tg\,x$ zu erhalten, müssen eine grofse Menge von Gliedern der Reihe berechnet werden, weil die Vorzeichen abwechseln.

Hat man aber eine Gröfse $S$ in einer Reihe von der Form

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots$$

setzt darin $x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots$

so erhält man

$$S = ay + (a-b)y^2 + (a-2b+c)y^3 + (a-3b+3c-d)y^4 + (a-4b+6c-4d+e)y^5 \ldots$$

wo, wie man sieht, die Coefficienten die des Binoms sind. Drückt man $y$ durch $x$ wieder aus, so hat man

$$S = a\cdot\frac{x}{1+x} + (a-b)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + (a-2b+c)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots$$

also lauter positive und schnell convergirende Glieder.

Man kann die Reihe für $arc\,tg\,x$ in die eben aufgeführte Form bringen, wenn man schreibt

$$arc\,tg\,x = \frac{1}{x}\left[x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{5}x^6 - \tfrac{1}{7}x^8 + \tfrac{1}{9}x^{10} - \ldots\right]$$

Setzt man nun $x^2 = \frac{y}{1-y}$ und bemerkt,

dafs hier $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = \frac{1}{7}$, $e = \frac{1}{9}$, $f = \frac{1}{11}$

so erhält man

$$arc\,tg\,x = \frac{1}{x}\left[y + \tfrac{2}{3}y^2 + \tfrac{8}{15}y^3 + \tfrac{16}{35}y^4 + \tfrac{128}{315}y^5 + \tfrac{256}{693}y^6\right]$$

Setzt man für $y$ seinen Werth $\frac{x^2}{1+x^2}$ so hat man, wenn man zugleich für ein gesetzliches Fortschreiten der Reihe die Entstehung der Coefficienten berücksichtigt:

$$arc\,tg\,x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 + \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^5 + \ldots\right]$$

eine sehr schnell convergirende Reihe.

Das allgemeine Glied der Klammergröfse ist

$$\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2(n-1)}{3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n-1}$$

Bezeichnet man den Bogen mit $\alpha$, $x$ mit $tg\,\alpha$, so wird die obige Formel

$$\alpha = \frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$$

12. **Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cot\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $cot = x$.**

Es ist

$$\frac{\partial\,arc\,cot\,x}{\Delta x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

also nach No. 11

$$= -\frac{\partial\,arc\,tg\,x}{\Delta x}$$

Die höheren Differenziale von $arc\,cot\,x$ sind daher ebenfalls gleich den negativen von $arc\,tg\,x$, und dieselben für $x = 0$ liefern die gleichen, aber entgegengesetzten Coefficienten. Statt $f = 0$ wird hier $f = \frac{\pi}{2}$, weil zu der $cot = 0$ der Quadrant als Bogen gehört. Man hat also

$$arc\,cot\,x = \frac{\pi}{2} - x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} - (x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

oder den Bogen mit $\alpha$, $x$ mit $cot\,\alpha$ bezeichnet

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{cot\,\alpha}{1+cot^2\alpha}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$$

Dies Resultat erhält man anch durch folgende einfache Betrachtung:

Ist $x = tg\,\alpha$ die Urveränderliche, so sei

$$\alpha = f\,cot\,\alpha$$

dann ist auch $\frac{\pi}{2} - \alpha = f\left(cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$

$$= f(tg\,\alpha)$$

oder $\alpha = \frac{\pi}{2} - f(tg\,\alpha)$

da nun $\alpha = f(cot\,\alpha)$

so ist $\alpha = f(cot\,\alpha) = \frac{\pi}{2} - f(tg\,\alpha)$

Ein Kreisbogen ist also = dem Quadrant weniger derjenigen Function seiner Cotangente, welche allein denselben Bogen ausdrückt, wenn statt der Cotangente die Tangente als urveränderlich genommen wird.

13. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,sec\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $sec = x$.

Schreibt man in die Formel No. 10 für $arc\,cos\,\alpha$ statt $cos\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $\frac{1}{sec\,\alpha}$, so erhält man

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{sec\,\alpha} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{sec^3\alpha} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{sec^5\alpha} + \ldots\right]$$

oder

$$arc(sec = x) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3\,x^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5\,x^5} + \ldots\right]$$

14. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cosec\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der *Cosecante* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 9 für $arc\,sin\,\alpha$ statt $sin\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $\frac{1}{cosec\,\alpha}$, so erhält man:

$$\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} + \frac{1}{2 \cdot 3\,cosec^3\alpha} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5\,cosec^5\alpha} + \ldots$$

oder

$$arc\,cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3\,x^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5\,x^5} + \ldots$$

15. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,sinv\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des *sinus versus* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 10 für $arc\,cos\,\alpha$ statt $cos\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $1 - sinv\,\alpha$, so erhält man:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[(1 - sinv\,\alpha) + \frac{(1 - sinv\,\alpha)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,(1 - sinv\,\alpha)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\right]$$

oder

$$arc(sinv = x) = \frac{\pi}{2} - \left[(1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,(1 - x)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\right]$$

16. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cosv\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des *cosinus versus* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 9 für $arc\,sin\,\alpha$ statt $sin\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $1 - cosv\,\alpha$, so erhält man:

$$\alpha = (1 - cosv\,\alpha) + \frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

oder

$$arc\,(cosv\,x) = (1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,(1 - x)^3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

17. Es ist No. 2 der elementaren Weise gedacht worden, auf welche man zu dem Werthe von $\pi$ kommen kann. Die vorstehend entwickelten Reihen liefern $\pi$ auf analytischem und schnellerem Wege.

*A.* Legt man die Formel No. 9 zu Grunde

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

so hat man nach Lehren der Geometrie

$arc\,30°$ für $sin = \frac{1}{2}$; es ist aber

$arc\,30° = \frac{1}{6}\,\pi$,

daher

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot (\frac{1}{2})^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5\,(\frac{1}{2})^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$\begin{aligned} \pi = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \quad &= 3{,}0 \\ + 6 \cdot \tfrac{1}{48} \quad &= 0{,}125 \\ + 6 \cdot \tfrac{3}{1280} \quad &= 0{,}0140625 \\ + 6 \cdot \tfrac{5}{14336} \quad &= 0{,}0020926339 \ldots \\ + 6 \cdot \tfrac{35}{589824} &= 0{,}0003560384 \ldots \\ &\quad 3{,}1415111723 \ldots \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dafs jeder Summand eine Decimalstelle richtig giebt, jedoch ist auf diese Weise die Berechnung auf eine gröfsere Anzahl Decimalen immer noch langwierig. Man verschafft sich aber einige Erleichterung, wenn man die Reihe für $\pi$ folgend schreibt:

$$\pi = 6\left[\tfrac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4^2} + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 8^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 16^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 32^2} + \ldots\right]$$

und nun bemerkt, dafs das berechnete $n$te Glied der Klammergröfse nur mit $\frac{(2n-1)^2}{8n(2n+1)}$ zu mnltipliciren ist, um das $(n+1)$te Glied zu geben.

Demnach ist

das 2te Glied $= \frac{1}{24}$ × dem 1sten Gl.
" 3te " $= \frac{9}{80}$ × dem 2ten "
" 4te " $= \frac{25}{168}$ × dem 3ten "
" 5te " $= \frac{49}{288}$ × dem 4ten "
n. s. w.

*B.* Legt man die Formel No. 11 zu Grunde

$$arc\,tg\,x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

so hat man für den Bogen $= 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ die $tg = x = 1$; daher

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{1}{4} + \ldots\right]$$

oder transformirt

$$\pi = 2\left[1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right]$$

Diese Reihe ist nicht so convergent als die vorige, allein sie ist leichter zu berechnen; denn man hat nnr nöthig, das gefundene $n$te Glied mit $\frac{n}{2n+1}$ zu multipliciren, um das $n+1$ste au erhalten.

Das 1ste Glied ist $2 \times 1$ $= 2,0$
das 2te Glied $= \frac{1}{3}$ × dem 1sten $= 0,6666666$
" 3te " $= \frac{2}{5}$ × dem 2ten $= 0,2666666$
" 4te " $= \frac{3}{7}$ × dem 3ten $= 0,1142857$
" 5te " $= \frac{4}{9}$ × dem 4ten $= 0,0507936$
" 6te " $= \frac{5}{11}$ × dem 5ten $= 0,0230880$
" 7te " $= \frac{6}{13}$ × dem 6ten $= 0,0106560$
" 8te " $= \frac{7}{15}$ × dem 7ten $= 0,0049730$
$= 3,1371295$
n. s. w.

18. Folgende 4 Formeln, dnrch welche der Bogen als Function einer trigonometrischen Linie in eine logarithmische Function derselben Linie ausgedrückt wird, setze ich deshalb her, weil solche unter diesem Artikel gesucht werden könnte; deren Begründnng und Anwendnng wird vorbehalten.

$$\text{I. } Arc\,tg(fx) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, logn\, \frac{1+fx\sqrt{-1}}{1-fx\sqrt{-1}} + \text{Const.}$$

$$\text{II. } Arc\,tg\,\frac{fx}{\sqrt{-1}} = Arc\,tg\left(-fx\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1+fx}{1-fx} + \text{Const.}$$

$$\text{III. } Arc\,tg\,\frac{2fx}{1-(fx)^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1+fx\sqrt{-1}}{1-fx\sqrt{-1}} + \text{Const.}$$

$$\text{IV. } Arc\,tg\,\frac{2fx}{[1+(fx)^2]\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1+fx}{1-fx} + \text{Const.}$$

**Argument.** Gleichbedentend mit nnveränderliche Gröfse in Beziehung auf eine von ihr abhängige Function.

Daher heifst anch in den mathematischen Tafeln die Zahl, deren Werthe der Reihenfolge nach aufgeführt sind nnd für welche die zngehörigen Werthe einer bestimmten Function gefunden werden, das A. der Tafel.

In einer Logarithmentafel: $log\,x, log\,(x+1)$ ist $x$ das A.

In der Astronomie heifst A. der Bogen, von dessen Werth ein anderer Bogen oder eine Zeitperiode abhängt. So sind das A. der Aberration des Lichts bei einem Planeten die Abstände der Erde von demselben in der Opposition, der Conjnnction und in den beiden Quadraturen. Das A. der Breite eines Planeten ist die Länge der von ihm beschriebenen Bahn, vom aufsteigenden Knoten ab gemessen, beide Bögen für einen angenblicklichen Standort desselben.

**Arithmetik.** Die Disciplin der Mathematik, welche sich mit den Vielfachen von Gröfsen jeglicher Art beschäftigt, ohne auf das Wesen dieser Gröfsen als Einheiten Rücksicht zn nehmen. Sie beschäftigt sich also ausschliefslich mit den Zahlen, nnd lehrt, wie unter gegebenen Bedingungen die Vielfachen aus den Einfachen nnd anderen Vielfachen und diese aus jenen entstehen; beides geschieht dnrch Vermehrnng, Verminderung, Vereinigung, Absonderung, überhaupt durch Aenderung von Zahlen; die Regeln und Gesetze dafür lehrt die theoretische A., die Ausübnng derselben ist die Rechenkunst.

Die Zahlen sind entweder bestimmt (zählbar, die mit Ziffern geschriebenen Zahlen, welche im bürgerlichen Leben

ausschliefslich Zahlen genannt werden) oder unbestimmt, in Buchstaben ausgedrückt. Die Rechnung mit den ersteren heifst Zahlenrechnung, die bürgerliche Rechenkunst oder schlechtweg die Rechenkunst; die Rechnung mit Buchstaben die Buchstabenrechnung. Diese entwickelt die Gesetze für richtige und geschickte Ausübung der Rechenkunst, sie lehrt und begründet das Verfahren beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, die Anwendung der Proportionen für die einfache und zusammengesetzte Regel de tri, die Gesellschaftsrechnung, die Kettenrechnung u. s. w., sie lehrt den Gebrauch der Logarithmen und bildet somit die Theorie der bürgerlichen Rechenkunst.

Die Buchstabenrechnung ist aber zugleich der elementare Theil der Analysis. Der Artikel „Analysis" zeigt, dafs die Analysis Alles, was an allgemeinen Rechnungs-Aufgaben nur gegeben werden kann, umfafst und die Buchstabenrechnung und die Algebra mit einschliefst. Demnach wäre Arithmetik gleichbedeutend mit Analysis und deren Anwendungen auf das bürgerliche Leben.

Unter Analysis versteht man ziemlich allgemein das Umformen von allgemeinen Zahlen-Ausdrücken, und da auch die Buchstabenrechnung dies thut und die Algebra (s. d.), um aus den Bekannten die unbekannten Gröfsen zu finden, Umformungen vornehmen mufs, so wird die Buchstabenrechnung, sowie die Algebra in die Analysis mit inbegriffen. Für diesen Fall aber ist die Definition von Analysis als Wissenschaft von den Umformungen allgemeiner Zahlengröfsen sowohl für die Abtheilung der Buchstabenrechnung, als Theorie der bürgerlichen Rechenkunst, wie auch ganz besonders für die Algebra in Betreff ihres Zwecks, der Auffindung von Unbekannten aus Bekannten, ungenügend, sie mufs umfassender, allgemeiner gegeben werden, und es ist dies in dem Art.: Analysis geschehen.

Aus den Artikeln: „Algebraische und analytische Formel, Gleichung, Geometrie" etc. geht schon ein wesentlicher Unterschied zwischen je zweien gleichnamigen Gegenständen hervor und so ist auch ein wesentlicher Unterschied zwischen Algebra und Analysis.

In folgenden beiden Aufgaben

$$x^2+ax+b=0$$

und

$$x=1+2+3+4\ldots.+n$$

sollen die Unbekannten $x$ aus Bekannten gefunden werden. Die Auflösung der ersten Aufgabe lehrt die Algebra, die der zweiten die Analysis.

Der Artikel: „Algebraische Gleichung" zeigt die Umformungen, welche geschehen müssen, damit die $x$ von den $a$ und $b$ getrennt und durch diese ausgedrückt werde. Die Analysis zeigt, dafs die Summe des ersten und $n$ten gleich der des 2ten und $(n-1)$ten, gleich der des 3ten und $(n-2)$ten Gliedes u. s. w. ist, oder sie schreibt die Reihe in umgekehrter Ordnung unter die erste und addirt

nämlich $x=1+2+3+\ldots.(n-1)+n$

$$x=n+n-1+n-3+\ldots.2+1$$

$$\overline{2x=(n+1)+(n+1)+\ldots.+(n+1)}$$

Die doppelte $x$ ist also gleich der Summe von $n$ Gliedern, von denen jedes $=n+1$ ist,

mithin ist $2x=n(n+1)$

und $x=\frac{1}{2}n(n+1)$

Man mufs hier erkennen, dafs beide Auflösungen durch Umformungen geschehen, allein auch den wesentlichen Unterschied, dafs bei der ersten Aufgabe die Unbekannte $x$ eine ganz selbstständige Zahl ist, die mit den eben so selbstständigen Zahlen $a$ und $b$ in der hier eigenthümlichen Verbindung steht, während bei der zweiten Aufgabe die Unbekannte $x$, die Summe der gegebenen Reihe in den Bekannten selbst liegt, oder während sie an den Bekannten selbst haftet, und dies ist aufser dem Charakter der Veränderlichkeit der gegebenen Gröfsen (hier der Werth von $n$) der Grundcharakter von Function, mit welcher sich ausschliefslich die Analysis beschäftigt.

Es gehört somit die Algebra nicht zur Analysis, sie ist eine von der Analysis wesentlich verschiedene Abtheilung der Arithmetik.

Aber auch die Buchstabenrechnung ist in ihren 4 Species, im Potenziren und Radiciren nicht Analysis: Auch die Entwickelung eines Bruchs in eine unendliche Reihe durch Division ist nicht Analysis, sondern nur eine consequent durchgeführte Division, als

$$\frac{a}{a+b}=1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots.$$

indem ich $a$ als Divisor genommen habe. Ist dagegen die unendliche Reihe gegeben, und es soll deren endlicher Werth bestimmt werden, so müssen Umformungen geschehen, die aufserhalb der vier Species liegen. Art. Analysis, pag. 65, ist ein Beispiel gegeben, ein zweites sei diese Reihe; man setze

$$1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\ldots.=S$$

so ist

$$-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\ldots.=S-1$$

in der zweiten Reihe den gemeinschaftlichen Factor $-\frac{b}{a}$ vorangestellt, giebt

$$-\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots.\right)=S-1$$

Die Klammergröfse ist die gegebene Reihe $= S$, folglich hat man

$$-\frac{b}{a}S=S-1$$

woraus $S+\frac{b}{a}S=\left(1+\frac{b}{a}\right)S$

und $S=\frac{1}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a}{a+b}$

Auch die Entwickelung einer unendlichen Reihe durch consequentes Radiciren gehört nicht zur Analysis, sondern nur zur Buchstabenrechnung.

Demnach ist die Arithmetik, unter Festhaltung des vorn an aufgestellten Begriffs, einzutheilen:

1) In die Buchstabenrechnung mit deren Anwendung auf die bürgerliche Rechenkunst.
2) In die Algebra.
3) In die Analysis, welche in 2 Theile, in die niedere und die höhere, oder in die A. des Endlichen und in die A. des Unendlichen zerfällt.

**Arithmetisches Complement** eines Logarithmus ist seine Ergänzung zur Einheit. Z. B. *log* 2 ist $= 0,3010300$; sein a. C. also $1-0,3010300=0,6989700$

$$\log 2000=3,3010300;$$

sein a. C. $=0,6989700-3$.

Auch nennt man a. C. die Ergänzung des Log. zu 10. So z. B. das a. C. von $3,3010300=6,6989700$

$$\log \tfrac{17}{25}=0,8325089-1$$

$$\log \tfrac{25}{17}=\log \frac{1}{\frac{17}{25}}=0-\log \tfrac{17}{25}=0,1674911$$

Die Mantissen beider Logarithmen haben sich gegenseitig zu ihrem a. C.; beide addirt, geben $=1$; beide Log. addirt, geben $=0$.

Denn da $\frac{17}{25}\times\frac{25}{17}=1$, so muſs auch

$$\log\left(\tfrac{17}{25}\times\tfrac{25}{17}\right)=\log 1=0 \text{ sein.}$$

Die Logarithmen der trigonometrischen Linien sind für einen Radius von 10000 Millionen genommen, und man hat bei jedem die Charakteristik $-10$ hinzuzufügen, um diesen für den Halbmesser $=1$ zu erhalten.

Es ist $\cot\alpha=\frac{1}{tg\,\alpha}$ mithin findet man in den Tafeln die Log. der Tangenten und Cotangenten als ihre a. C. zu 20. Die Log. von Secante und Cosecante sind im Vega nicht aufgeführt. Da aber

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \text{ und } \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

so hat man z. B. $\sec 22^\circ 30'$ aus

$$\log\cos 22^\circ 30'=9,9656153-10$$
$$\log\sec 22^\circ 30'=10,0343847-10$$

nämlich $\log\sec\alpha=$ dem a. C. von $\log\cos\alpha$ und eben so ist $\log\operatorname{cosec}\alpha=$ dem a. C. von $\log\sin\alpha$

**Arithmetisches Dreieck.** Die Zusammenstellung der Binomial-Coefficienten in Figur eines Dreiecks von $(a+b)^0$ bis $(a+b)^n$, wo $n$ eine beliebige Zahl ist.

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b$$
$$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\,ab+1\cdot b^2$$
$$(a+b)^3=1\cdot a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+1\cdot b^3$$

u. s. w.

Ein arithmetisches Dreieck ist demnach

1
1·1
1·2·1
1·3·3·1
1·4·6·4·1
1·5·10·10·5·1
u. s. w.

**Arithmetische Gröſse.** Eine bestimmte oder unbestimmte Anzahl von Einheiten, auch die Einheit selbst; ist also mit Zahl gleichbedeutend.

**Arithmetisches Mittel** von Gröſsen ist deren Summe dividirt durch die Anzahl der Gröſsen.

Das a. M. von $a$ und $b$ ist $\frac{1}{2}(a+b)$, von $a, b, c, d=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

Die Gröſsen mögen gleichnamig oder ungleichnamig sein. Z. B. das a. M. von $+a, -b, +c$ ist $\frac{1}{3}(a-b+c)$.

Das a. M. zweier Gröſsen bildet mit denselben eine stetige arithmetische Proportion.

Denn es ist $a-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}-b$

nämlich $a+b=2\cdot\frac{a+b}{2}$

Das a. M. von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist

$$=\frac{55}{10}=5\tfrac{1}{2}$$

Das a. M. zwischen zwei Zahlen ist immer gröſser als deren geometrisches Mittel, d. h.

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

oder $a+b > 2\sqrt{ab}$

denn für $a=b$ ist $\frac{a+b}{2} = a$ und $\sqrt{ab}=a$

Es kann also nur von ungleichen Zahlen die Rede sein.

Ist nun $a>b$
so ist $a-b>0$
also auch $(a-b)^2>0$
oder $a^2-2ab+b^2>0$
$4ab=4ab$
daher $a^2+2ab+b^2>4ab$
oder $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$
oder $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ (Vergl. Arithmetische Proportion).

**Arithmetische Progression** s. v. w. Arithmetische Reihe.

**Arithmetische Proportion.** Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse, also a. P. die zweier arithmetischen Verhältnisse.

2 verhält sich arithmetisch zu 3 wie 5 zu 6, denn es sind die arithmetischen Unterschiede zwischen 2, 3 und zwischen 5, 6 einander gleich, = 1.

Man schreibt dies in a. P.

$$2-3=5-6$$

und man hat $2+6=3+5$
überhaupt in jeder a. P.

$$A-B=a-b$$

ist $A+b=B+a$

d. h. die Summe der beiden äufseren Glieder ($A$, $b$) ist gleich der Summe der beiden inneren Glieder ($B$, $a$).

Hieraus geht unmittelbar hervor, dafs man die Glieder einer jeden a. P. beliebig verstellen kann, ohne dafs die Gleichheit der Verhältnisse gestört, also ohne dafs die Richtigkeit der P. aufgehoben wird, wenn nur die zusammengehörigen Glieder gleichnamig bleiben.

Also wenn $A-B=a-b$
so ist auch
$A-a=B-b$
$B-A=b-a$
$B-b=A-a$
$a-A=b-B$
$a-b=A-B$
$b-B=a-A$
$b-a=B-A$

Sind die beiden inneren Glieder oder die beiden äufseren einander gleich,

wie $A-C=C-D$
oder $D-E=E-D$

so heifst die P. eine stetige a. P. und das gleiche Glied die mittlere arithmetische Proportionale oder das arithmetische Mittel der beiden ungleichen Gröfsen.

Es ist aus $A-C=C-D$
sogleich $2C=A+D$
und $C=\frac{1}{2}(A+D)$

und die P. ist zu verstellen wie

$D-C=C-A$
$C-A=D-C$
$C-D=A-C$

**Arithmetische Reihe** (arithmetische Progression).

1) Unter Reihe (Progression) versteht man eine Zusammenstellung, eine Folge von Zahlen, von denen jede folgende aus der ihr unmittelbar voranstehenden nach einerlei Gesetz hervorgeht. Wird zu einer jeden voranstehenden Zahl eine bestimmte Zahl addirt (eine negative Zahl als positiv subtrahirt), um die ihr zunächst folgende zu geben, so ist die R. eine arithmetische R.; wird jede voranstehende Zahl mit einer bestimmten Zahl multiplicirt, um die ihr zunächst folgende zu geben, so ist die R. eine geometrische R.

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$$

ist eine a. R., denn es wird zu jeder Zahl die Zahl 1 addirt, um die nachfolgende zu erhalten.

$$1\cdot2\cdot4\cdot8\cdot16\ldots.n$$

ist eine geometrische R., weil man jede Zahl erhält, wenn man die ihr vorangehende mit 2 multiplicirt.

Die Zahlen heifsen Glieder der Reihe, links fängt die R. an mit dem ersten Gliede, das folgende ist das zweite Glied u. s. f.; 6 und $n$ sind die Endglieder.

Das erste Glied hat die Stellenzahl 1, das zweite die Stellenzahl 2, das $m$te die Stellenzahl $m$.

2. Sind die Unterschiede je zweier benachbarten Glieder einer a. R. gleich, wie in dem obigen Beispiel, so ist die R. eine a. R. der ersten Ordnung, oder schlechtweg eine a. R.

Sind die Unterschiede ungleich und bilden dieselben wiederum eine a. R., in welcher die Unterschiede gleich sind, so ist die R. eine a. R. der zweiten Ordnung,

wie die Reihe $1\cdot4\cdot9\cdot16\cdot25\ldots$
denn sie giebt die Unterschiede $3\cdot5\cdot7\cdot9$
und diese die gleichen Unterschiede $2\cdot2\cdot2$

Eine a. R. der dritten Ordnung ist eine R., wenn die dritte Reihe der Unterschiede gleiche Zahlen liefert, überhaupt eine R. der $m$ten Ordnung, deren $m$te Differenzen-Reihe aus gleichen Zahlen besteht. Sämmtliche a. R. von der

zweiten Ordnnng an heifsen a. R. **höherer Ordnnng.**

3. **Arithmetische Reihen erster Ordnnng.**

Es sei das erste Glied einer Reihe $=a$, dessen Unterschied von dem zweiten Gliede $=d$, so ist das zweite Glied $=a+d$, und da dieses von dem folgenden dritten ebenfalls nm $d$ nnterschieden ist, das dritte Glied $=a+2d$, also allgemein das $n$te Glied, das **allgemeine Glied**

$$=a+(n-1)d$$

nnd die Reihe ist

$$a \cdot a+d \cdot a+2d \cdot a+3d \ldots\ldots a+(n-1)d$$

Ist $d$ additiv, so ist die R. **wachsend, steigend, znnehmend**; ist $d$ snbtractiv, so ist die R. **fallend, abnehmend.** Die zunehmende R.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ 3 \cdot & 7 \cdot & 11 \cdot & 15 \cdot & 19 & \ldots\ldots & 3+(n-1)4 \end{matrix}$$

von dem Unterschied $=4$ hat das allgemeine Glied

$$3+(n-1)4=4n-1$$

also das fünfte Glied ist $=4 \cdot 5-1=19$; das zehnte $=4 \cdot 10-1=39$

Die abnehmende R.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ 20 \cdot & 17 \cdot & 14 \cdot & 11 & \ldots\ldots & 20-(n-1)3 \end{matrix}$$

von dem Unterschied $-3$ hat das allgemeine Glied $20-(n-1)3=23-3n$; das vierte Glied ist $23-3 \cdot 4=11$, das zehnte Glied $=23-3 \cdot 10=-7$

4. Setzt man bei dem ersten Gliede $a$ der R. die Differenz $=\pm d$, so kann die R. von $a$ aus nach beiden Richtungen bis in's Unendliche gehend gedacht werden, nach der einen Richtung wird die R. znnehmend, nach der anderen abnehmend. Das beiden R. gemeinschaftliche erste Glied wird besonders: **Anfangsglied** (0 als Stellenzahl) genannt.

$$a \mp (n-1)d \ldots\ldots a \mp 2d \cdot a \mp d \cdot a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \ldots\ldots a \pm (n-1)d$$

Ist eine nnmerische R. zu schreiben, z. B. von dem Anfangsgliede 4 nnd der Differenz 3, so hat man

$$\begin{matrix} -n & \ldots\ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n \\ 4-n \cdot 3 & \ldots & -5 \cdot & -2 \cdot & 1 \cdot & 4 \cdot & 7 \cdot & 10 \cdot & 13 & \ldots & 4+n \cdot 3 \end{matrix}$$

nnd es ist zu bemerken, dafs jedes beliebige Glied als Anfangsglied angesehen werden kann.

5. Nimmt man von einer R.

$$a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d$$

u. s. w. die Glieder der geraden Stellenzahlen, also das 2te, 4te, .... $n \cdot 2$te Glied heraus, so behält man eine R., deren Differenz $=\pm 2d$ ist.

Z. B. von der R.:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & 2n & 2n+1 \\ 2 \cdot & 4 \cdot & 6 \cdot & 8 \cdot & 10 & \ldots\ldots & 4n \cdot & 4n+2 \end{matrix}$$

Die Glieder der geraden Stellenzahlen fortgenommen, läfst die R.:

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \ldots\ldots 4n+2$$

deren Differenz $=4$ ist; bei der nrsprünglichen R. ist $d=2$.

Desgleichen kann man immer 2 auf einander folgende Glieder fortnehmen nnd das 3te stehen lassen oder allgemein $n$ Glieder fortnehmen und das $n+1$te stehen lassen; man behält sodann eine R. von den Stellenzahlen der nrsprünglichen: $1 \cdot n+1 \cdot 2n+1 \cdot 3n+1 \ldots mn+1$; nnd diese R. hat die Differenz $nd$.

Eben so lassen sich in eine R. beliebig viele Glieder einschalten. Schaltet man in die R.

$1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \ldots\ldots$ von der Differenz $=6$ nnr 1 Glied ein, so erhält man die R.: $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \ldots\ldots$ von der Differenz $=3$ nnd in diese 2 Glieder eingeschaltet, die R. der natürlich anf einander folgenden Zahlen.

Jede 3 auf einander folgende Glieder einer a. R. bilden eine stetige arithmetische Proportion; hat man also zwischen $a$ nnd $a+d$ ein Glied einzuschalten, so ist dies

$$\frac{2a+d}{2}=a+\tfrac{1}{2}d$$

hat man 2 Glieder einznschalten, so hat man das erste $a+\frac{1}{3}d$, das zweite $a+\frac{2}{3}d$; für $n$ einznschaltende Glieder ist die Differenz $d$ in $n+1$ Theile zu theilen nnd die R. zn schreiben:

$$a \cdot a+1\frac{d}{n+1} \cdot a+2\frac{d}{n+1} \cdot a+3\frac{d}{n+1}$$

Das $n+1$ste Glied wird

$$a+(n+1)\frac{d}{n+1}=a+d$$

6. Schreibt man nnter eine R. dieselbe R. in nmgekehrter Ordnung nnd summirt die Glieder, so erhält man eine Snmme von $n$ Gliedern, die alle gleich sind, als

$$\begin{array}{c} a \cdot a+d \cdot a+2d \ldots\ldots a+(n-3)d \cdot a+(n-2)d \cdot a+(n-1)d \\ a+(n-1)d \cdot a+(n-2)d \cdot a+(n-3)d \ldots\ldots a+2d \cdot a+d \cdot a \\ \hline \end{array}$$

nnd zwar hat man jedes Glied $=2a+(n-1)d$

Da nnn $n$ Glieder vorhanden sind, so ist deren Snmme $n \cdot [2a+(n-1)d]$, und da diese Snmme die doppelte Snmme der Glieder der einfachen R. ist, so hat man die einfache Summe der ersten $n$ Glieder einer a. R. oder

$$s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$$

Z. B. in der Snmme der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis 100 ist $a=1$; $d=1$; $n=100$; man erhält:

$$S=\tfrac{1}{2}100[2+99 \cdot 1]=50 \cdot 101=5050$$

Bezeichnet man das $n$te Glied einer R. mit $u$, so ist $u=a+(n-1)d$

$$s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$$
$$s=\tfrac{1}{2}n(a+u)$$

7. Von den 5 Zahlen $a$, $d$, $n$, $u$, $s$ können immer 2 gefunden werden, wenn 3 gegeben sind, und es ist nicht schwer, aus den obigen dreien die übrigen 17 Gleichungen für die Auffindung zweier beliebiger Unbekannten zu entwickeln, weshalb ich nur die Resultate hier her setze:

1) $u=a+(n-1)d$

2) $u=-\frac{d}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+a(a-d)+2ds}$

3) $u=2\cdot\frac{s}{n}-a$

4) $u=\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}d$

5) $s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

6) $s=\frac{(u+a)(u+d-a)}{2d}$

7) $s=\tfrac{1}{2}n(a+u)$

8) $s=\frac{n}{2}[2u-(n-1)d]$

9) $a=u-(n-1)d$

10) $a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+u(u+d)-2ds}$

11) $a=\frac{s}{n}-\tfrac{1}{2}(n-1)d$

12) $a=\frac{2s}{n}-u$

13) $n=\frac{u-a}{d}+1$

14) $n=\frac{1}{2d}\left[-2a+d\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}\right]$

15) $n=\frac{2s}{a+u}$

16) $n=\frac{1}{2d}\left[2u+d\pm\sqrt{(2u+d)^2-8ds}\right]$

17) $d=\frac{u-a}{n-1}$

18) $d=\frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$

19) $d=\frac{2(nu-s)}{n(n-1)}$

20) $d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$

In Betreff der doppelten Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ in den 4 Ausdrücken No. 2, 10, 14 und 16 ist Folgendes durch Beispiele zu erläutern. Man denke sich die R.:

$\ldots. -15\cdot-10\cdot-5\cdot0\cdot+5+10+15\ldots.$

Hier ist $d=5$

Wenn $a=-50$
$n=+16$

genommen wird, so ist die R. gegeben in:

$$\begin{matrix}1 & 2\ldots\ldots10 & 11 & 12\ldots\ldots16 & \\ -50-45 & -5 & \pm0 & +5\quad\quad+25 & \text{(A)}\end{matrix}$$

Aus No. 1 erhält man $u=+25$
aus No. 5 „ „ $s=-200$

Für gegeben: $d=+5$; $a=-50$ und $s=-200$ erhält man aus No. 2: $u=-\frac{5}{2}\pm\frac{55}{2}=+25$ und $-30$

$u=+25$ entspricht der oblgen R. (A)

Für $u=-30$, hierzu $a=-50$ und $d=+5$ giebt aus No. 13: $n=5$ also die R.:

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ -50 & -45 & -40 & -35 & -30 & \text{(B)}\end{matrix}$$

welche ebenfalls $s=-200$ liefert.

Für gegeben: $d=5$; $u=25$; $s=-200$ erhält man aus No. 10: $a=+\frac{5}{2}\pm\frac{105}{2}$ $=+55$ und $-50$

$a=-50$ entspricht der R. (A)

Für $a=+55$, hierzu $d=+5$, $u=25$ erhält man aus No. 13: $n=-5$

Die R. ist also

$$\begin{matrix}-5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & \\ 25\cdot & 30\cdot & 35\cdot & 40\cdot & 45\cdot & 50\cdot & 55 & \text{(C)}\end{matrix}$$

Die Summe ist freilich eine andere als $-200$, und es ist von vorn herein zu ersehen, dafs bei den gegebenen Gröfsen: $a=-50$, $d=+5$ und $s=-200$ das positive Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ nur aus der Form entspringt, für das Beispiel aber nicht pafst. Die Summe beträgt 280. Setzt man diese für $s$ in No. 10, so mufs zugleich $a$ mit $u$ vertauscht werden, und man erhält

$$u=+\frac{5}{2}\pm\frac{45}{2}=+25 \text{ und } -20$$

$u=+25$ entspricht wieder der R. (C);
$u=-20$ erfordert $n=16$ Glieder; $n$ als Stellenzahl $=-14$.

Die Summe dieser R., wenn man $a=-20$; $u=55$ und $n=+16$ setzt, erhält man aus No. 7:

$s=+280$, wie sie in (C) wirklich ist.

Setzt man für die R. (A) $d=5$; $a=-50$; $s=-200$, so erhält man aus No. 14: $n=+16$ und $+5$

Der erste Werth $+16$ entspricht der R. (A), der zweite $+5$ der R. (B).

Setzt man für die R. (A) $d=+5$; $u=+25$; $s=-200$ und sucht $n$, so erhält man aus No. 16:

$$n=\frac{55\pm105}{10}=+16 \text{ und } -5$$

Der Werth $+16$ entspricht der R. (A), der zweite Werth liefert die R.:

$$\begin{matrix}-5 & -4 & -3 & -2 & -1 & \pm0 & +1\\ -80 & -75 & -70 & -65 & -60 & -55 & -50\end{matrix}$$

deren Summe ist $=-455$ anstatt der gegebenen $-200$.

8. Die Anwendung der beiden Gleichungen No. 10 und No. 16 mufs also mit einiger Vorsicht geschehen. Diese Gleichungen sind unvermeidlich, wenn

aus der gegebenen Differenz $=d$, dem $n$ten Gliede $=u$ und der Summe $s$ sämmtlicher Glieder das erste Glied $a$ und die Anzahl $n$ der Glieder gefunden werden sollen.

Es sei gegeben $d=2$; $u=100$; $s=2550$

Man findet aus No. 10:

$$a=1\pm 1=+2 \text{ und } 0$$

aus No. 16:

$$n=\tfrac{1}{4}(202\pm 2)=+51 \text{ und } +50$$

Sämmtliche 4 Resultate sind richtig:

$a=+2$ und $n=+50$ entspricht der R.:

$$2\cdot 4\cdot 6 \ldots . 100$$

$a=0$ und $n=+51$ entspricht der R.:

$$0, 2\cdot 4\cdot 6 \ldots . 100$$

Auch in den Beispielen für die R. (A) bis (C) hat man $\pm\sqrt{}$ in No. 10 correspondirend mit $\mp\sqrt{}$ in No. 16, und dies ist allgemein der Fall:

Denn aus Gleichung 1

$$u=a+(n-1)d \qquad \text{(D)}$$

$$\text{folgt } n=\frac{u}{d}+1-\frac{a}{d} \qquad \text{(E)}$$

$$\text{und } a=\frac{d}{2}+u+\frac{d}{2}-nd \qquad \text{(F)}$$

Ist nun $a>\frac{d}{2}$ also (No. 10) $a=\frac{d}{2}+\sqrt{}$

so ist nach F: $u+\frac{d}{2}-nd>0$

$$\text{oder } u+\frac{d}{2}>nd$$

$$\text{oder } \frac{u}{d}+\tfrac{1}{2}>n, \text{ d. h. (No. 16)}$$

$$n=\left(\frac{u}{d}+\tfrac{1}{2}\right)-\sqrt{}$$

Ist $a<\frac{d}{2}$ mithin (No. 10) $a=+\frac{d}{2}-\sqrt{}$

so ist gegenseitig (No. 16) $n=\frac{u}{d}+\tfrac{1}{2}+\sqrt{}$

9. **Arithmetische Reihen höherer Ordnung.**

Bei einer R. der $n$ten Ordnung besteht nach No. 2 die $n$te Differenzenreihe aus lauter gleichen Zahlen. Es sei diese Differenz $=d$.

Für eine R. der ersten Ordnung sei:

das erste Glied $=A$
so ist das zweite „ $=A+d$
dritte „ $=A+2d$
. . . . . . .
$n$te „ $=A+(n-1)d$

Jede R. der ersten Ordnung muſs von dieser allgemeinen Form sein. Für eine allgemeine R. der 2ten Ordnung muſs die vorstehende allgemeine R. der ersten Ordnung als die erste Differenzenreihe betrachtet werden. Es sei das 1te Glied dieser R. $=B$, so ist dieses 1te Glied $B+$ jenem 1ten Gliede $=A$, das 2te Glied dieser R. $=B+A$; überhaupt das $n$te Glied der R. zweiter Ordnung $+$ dem $n$ten Gliede der R. 1ter Ordnung $=$ dem $(n+1)$ten Gliede der 2ten Ordnung. Und im Allgemeinen hat man (nach No. 2) jedes $n$te Glied einer R. der $m$ten Ordnung $+$ dem $n$ten Gliede der R. $(m+1)$ter Ordnung $=$ dem $(n+1)$ten Gliede der R. $(m+1)$ter Ordnung.

Demnach hat man in der R. der 2ten Ordnung

deren 1. Glied $=B$
also das 2. „ $=B+A$
„ 3. „ $=B+2A+d$
„ 4. „ $=B+3A+3d$
„ 5. „ $=B+4A+6d$
. . . . . . . . .
„ $n$. „ $=B+(n-1)A+[1+2+3\ldots+(n-2)]d$

$$=B+(n-1)A+\frac{(n-1)\;(n-2)}{1.\quad 2}d$$

Jede R. der 2ten Ordnung muſs von dieser allgemeinen Form sein.

Für eine allgemeine R. der 3ten Ordnung muſs die vorstehende allgemeine R. der 2ten Ordnung als die erste Differenzenreihe betrachtet werden.

Es sei deren

1. Glied $=C$
so ist deren 2. „ $=C+B$
3. „ $=C+2B+A$
4. „ $=C+3B+3A+d$
5. „ $=C+4B+6A+4d$
6. „ $=C+5B+10A+10d$
. . . . . . . . . .
$n$. „ $=C+(n-1)B+\frac{(n-1)\;(n-2)}{1.\quad 2}A+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3}d$

Für eine allgemeine R. der $m$ten Ordnung

sei deren 1. Glied $=M$
so ist „ 2. „ $=M+L$
„ 3. „ $=M+2L+K$
u. s. w.

deren $n$. Glied $=M+(n-1)L+\frac{(n-1)\;(n-2)}{1.\quad 2}K+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3}J$

u. s. w.

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots .(n+1-m)}{1.\quad 2.\quad \ldots .\quad m-1}A+\frac{(n-1)(n-2)\ldots .(n-m)}{1.\quad 2.\quad \ldots .\quad m}d$$

10. Geordnete Zusammenstellung der Reihen höherer Ordnnng.

| Ordnnng | 1. Glied | 2. Glied | 3. Glied | 4. Glied | 5. Glied | u. s. w. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | |
| 1 | $A$ | $A+d$ | $A+2d$ | $A+3d$ | $A+4d$ | |
| 2 | $B$ | $B+A$ | $B+2A+d$ | $B+3A+3d$ | $B+4A+6d$ | |
| 3 | $C$ | $C+B$ | $C+2B+A$ | $C+3B+3A+d$ | $C+4B+6A+4d$ | |
| 4 | $D$ | $D+C$ | $D+2C+B$ | $D+3C+3B+A$ | $D+4C+6B+A+d$ | |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | |
| $m$ | $M$ | $M+L$ | $M+2L+K$ | $M+3L+3K+J$ | $M+4L+6K+4J+H$ | |

| Ordnung | $n$tes Glied |
|---|---|
| 0 | $d$ |
| 1 | $A+\frac{n-1}{1}d$ |
| 2 | $B+\frac{n-1}{1}A+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}d$ |
| 3 | $C+\frac{n-1}{1}B+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}A+\frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}d$ |
| 4 | $D+\frac{n-1}{1}C+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2}B+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}A+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}d$ |
| . . . | . . . |
| $m$ | $M+\frac{n-1}{1}L+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}K+\ldots\frac{(n-1)\ldots(n+1-m)}{1\ldots\ldots(m-1)}A+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.\ \ 2\ldots\ldots m}d$ |

Hiermit ist die Bildnng von Reihen höherer Ordnnng allgemein angegeben.

Als Beispiel soll das einfachste folgen, nämlich wenn $d=1$ nnd $A=B=C=\ldots.1$ ist.

| Ordnnng | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 | 29 | 37 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 8 | 15 | 26 | 42 | 64 | 93 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 31 | 57 | 99 | 163 |
| 5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 63 | 120 | 219 |
| 6 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 127 | 247 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 255 |

**11. Aus der Betrachtung dieser einzelnen R.** scheint hervorzugehen, daſs jede geometrische R. von $n$ Gliedern zugleich eine a. R. der $(n-1)$ten Ordnung sei, und dies ist wirklich so. Nämlich in der allgemeinen geometrischen R.:

$$a \quad ae \quad ae^2 \quad ae^3 \quad ae^4 \ldots\ldots ae^n$$

ist die erste Differenzenreihe

$$a(e-1) \quad ae(e-1) \quad ae^2(e-1) \quad ae^3(e-1) \ldots\ldots ae^{n-1}(e-1)$$

die zweite

$$a(e-1)^2 \quad ae(e-1)^2 \quad ae^2(e-1)^2 \quad ae^3(e-1)^2 \ldots\ldots ae^{n-2}(e-1)^2$$

die dritte

$$a(e-1)^3 \quad ae(e-1)^3 \quad ae^2(e-1)^3 \quad ae^3(e-1)^3 \ldots\ldots ae^{n-3}(e-1)^3$$

die $m$te

$$a(e-1)^m \quad ae(e-1)^m \quad ae^2(e-1)^m + \ldots\ldots ae^{n-m}(e-1)^m$$

Nimmt man nun in einer beliebigen Differenzenreihe das erste Glied constant, also gleich jedem der übrigen Glieder, so erhält man aus den ersten beiden Gliedern der geometrischen R. bei constantem $a(e-1)$ die a. R. erster Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & ae & & a(2e-1) & & a(3e-2)\ldots\ldots \\ & a(e-1) & & a(e-1) & & a(e-1) & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^2$ aus den 3 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. zweiter Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & ae & & ae^2 & & a[3e^2-3e+1]\ldots \\ & a(e-1) & & ae(e-1) & & a(e-1)(2e-1) & \\ & & a(e-1)^2 & & a(e-1)^2 & & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^3$ aus den 4 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. dritter Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & ae & & ae^2 & & ae^3 & & a[4e^3-6e^2+4e-1]\ldots\ldots \\ & a(e-1) & & ae(e-1) & & ae^2(e-1) & & a(e-1)(3e^2-3e+1) & \\ & & a(e-1)^2 & & ae(e-1)^2 & & a(e-1)^2(2e-1) & & \\ & & & a(e-1)^3 & & a(e-1)^3 & & & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^4$ aus den 5 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. der vierten Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a & & ae & & ae^2 & & ae^3 & & ae^4 & & a(5e^4-10e^3+10e^2-5e+1) \\ & a(e-1) & & ae(e-1) & & ae^2(e-1) & & ae^3(e-1) & & a(e-1)(4e^3-6e^2+4e-1) & \\ & & a(e-1)^2 & & ae(e-1)^2 & & ae^2(e-1)^2 & & a(e-1)^2(3e^2-3e+1) & & \\ & & & a(e-1)^3 & & ae(e-1)^3 & & a(e-1)^3(2e-1) & & & \\ & & & & a(e-1)^4 & & a(e-1)^4 & & & & \end{array}$$

u. s. w.

12. Aus der geordneten Zusammenstellung No. 10 gehen folgende Gesetze hervor:

*A.* Eine Reihe der $n$ten Ordnung ist vollständig gegeben, wenn die ersten $n+1$ Glieder der R. gegeben sind; sind weniger gegeben, so ist die R. unbestimmt, weil erst das $(n+1)$te Glied die Differenz $d$ der $n$ten Differenzenreihe enthält. Aus dem 2ten Gliede minus dem ersten erhält man das erste Glied der ersten Differenzenreihe, aus dem dritten minus dem zweiten das erste Glied der zweiten Differenzenreihe, aus dem $n$ten minus dem $(n-1)$ten das erste Glied der $(n-1)$ten Differenzenreihe und endlich aus dem $(n+1)$ten Gliede minus dem $n$ten das gleich bleibende Glied der $n$ten Differenzenreihe.

Z. B. die Reihe der 5ten Ordnung

1 2 5 13 33 81....

ist durch diese 6 ersten Glieder gegeben, denn es ist:

$$\begin{array}{rcl} E = 1 & \text{woraus} & E=1 \\ D+E = 2 & „ & D=1 \\ C+2D+E = 5 & „ & C=2 \\ B+3C+3D+E = 13 & „ & B=3 \\ A+4B+6C+4D+E = 33 & „ & A=4 \\ d+5A+10B+10C+5D+E = 81 & „ & d=5 \end{array}$$

Man entwickelt am einfachsten die Fortsetzung der Reihe durch wirkliche Bildung der Differenzenreihen und spätere Addition, indem man neben die unterste Differenz $d$ ein zweites $d$ setzt, und sagt: $5+9=14$, $14+16=30$ u. s. w., wo man dann das folgende Glied 187 der Reihe erhält. Also:

1 2 5 13 33 81 | 187....

1 3 8 20 48 | 106

2 5 12 28 | 58

3 7 16 | 30

4 9 | 14

5 | 5

Vergl. No. 13 und No. 18.

*B.* Ist eine R. der $n$ten Ordnung gegeben, so läſst sich aus derselben eine R. der $(n+1)$ten Ordnung bilden; man hat nur nöthig, das erste Glied derselben zu wählen.

*C.* Die $m$te Differenzenreihe einer R. der $n$ten Ordnung ist eine R. der $(n-m)$ten Ordnung; und jede R. der $m$ten Ordnung ist zu betrachten als die $(n-m)$te Differenzenreihe einer R. der $n$ten Ordnung. Z. B. die R. der 3. Ordnung (No. 10) ist von der R. der 4. Ordnung die $(4-3=1)$te Differenzenreihe.

13. Jedes Glied einer a. R. der $m$ten

Ordnung hat die Form des in eine R. entwickelten Binoms der $(n-1)$ten Potenz, wo in jedem Gliede der R. $n$ die Stellenzahl dieses Gliedes bedeutet.

Es ist nämlich

$$(x+y)^{n-1} = 1 \cdot x^{n-1} + \frac{n-1}{1} x^{n-2} y + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} x^{n-3} y^2$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-4} y^3 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.\ 2.\ \ldots\ m} x^{n-m-1} y^m$$

Ist nun

$M$ das erste Glied der R. $m$ter Ordnung
$L$ „ „ „ deren ersten Differenzenreihe
$K$ „ „ „ „ zweiten „
. . . . . . . . . . . . . . . . .
$B$ „ „ „ „ $(m-2)$ten „
$A$ „ „ „ „ $(m-1)$ten „
$d$ „ gleichbleibende Glied deren $m$ten Differenzenreihe

so schreibe man

$M$ für $x^{n-1}$ mit dem Coefficient $=1$

$L$ „ $x^{n-2}y$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$

$K$ „ $x^{n-3}y^2$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$B$ „ $x^{n+1-m}y^{m-2}$ mit dem Coefficient $\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n+2-m)}{1.\ 2.\ \ldots.\ (m-2)}$

$A$ „ $x^{n-m}y^{m-1}$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n+1-m)}{1.\ 2.\ \ldots.\ (m-1)}$

$d$ „ $x^{n-m-1}y^m$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n-m)}{1.\ 2.\ \ldots.(m-1)\cdot m}$

Ferner hat in einer Reihe der $m$ten Ordnung:

das 1. Glied 1 Summand $M$
„ 2. „ 2 Summanden $M, L$
„ 3. „ 3 „ $M, L, K$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . .
„ $(m-1)$. „ $(m-1)$ „ $M, L, K \ldots. C, B$
„ $m$. „ $m$ „ $M, L, K \ldots. C, B, A$
„ $(m+1)$. „ $(m+1)$ „ $M, L, K \ldots. C, B, A, d$

und alle folgenden Glieder bestehen aus $m+1$ Summanden, wenn die R. eine R. der $m$ten Ordnung ist.

Man hat also für jedes Glied einer R.

der 1. Ordnung die Summe $A + \frac{n-1}{1} d$

„ 2. „ „ „ $B + (n-1)A + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} d$

„ 3. „ „ „ $C + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} A + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} d$

u. s. w., wo für jedes Glied $n$ dessen Stellenzahl bedeutet.

**Beispiele.**

1. Für eine R. der 1. Ordnung sei $A=2$; $d=3$; so ist

das 1. Glied $= A + \frac{1-1}{1} d = A + 0 \cdot d = A = 2$

„ 2. „ $= A + \frac{2-1}{1} d = A + 1 \cdot d = 2+3 = 5$

„ 3. „ $= A + \frac{3-1}{1} d = A + 2 \cdot d = 2+6 = 8$

. . . . . . . . . . . . . . . .

„ 24. „ $= A + \frac{24-1}{1} d = A + 23 \cdot d = 2 + 23 \cdot 3 = 71$

2. Für eine R. der 2. Ordnung sei $B=1$; $A=3$; $d=2$; so ist

das 1. Glied $= B+0\cdot A+\frac{0\cdot(-1)}{1.\ 2}d=B=1$

„ 2. „ $= B+\frac{2-1}{1}A+\frac{(2-1)0}{1.\ 2}d=B+A=1+3=4$

„ 3. „ $= B+\frac{3-1}{1}A+\frac{(3-1)(2-1)}{1.\ \ 2}d=B+2A+d=9$

„ 4. „ $= B+3\cdot A+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}d=B+3A+3d=16$

„ 5. „ $= B+4\cdot A+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}d=B+4A+6d=25$

3. Für eine R. der 3. Ordnung sei $C=1$; $B=7$; $A=12$; $d=6$; so ist

das 1. Glied $= C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=C=1$

„ 2. „ $= C+1\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=C+B=8$

„ 3. „ $= C+2\cdot B+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}A+0\cdot d=C+2B+A=27$

„ 4. „ $= C+3\cdot B+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}A+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}d=C+3B+3A+d=64$

4. Für eine R. der 5. Ordnung sei (die R. ad 12, $A$) $E=1$; $D=1$; $C=2$; $B=3$; $A=4$; $d=5$; so hat man

das 1. Glied $= E+0\cdot D+0\cdot C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E=1$

„ 2. „ $= E+1\cdot D+0\cdot C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E+D=2$

„ 3. „ $= E+2\cdot D+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E+2D+C=5$

„ 4. „ $= E+3\cdot D+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}C+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}B+0\cdot A+0\cdot d=E+3D+3C+B=13$

„ 5. „ $= E+4\cdot D+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}C+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}B+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A+0\cdot d=E+4D+6C$
$+4B+A=33$

„ 6. „ $= E+5\cdot D+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}C+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}B+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}d=E$
$+5D+10C+10B+5A+d=81$

um das 7. Glied zu finden, hat man nicht, wie ad 12, $A$ geschehen, die Differenzen reihen zu bilden:

es ist $= E+6D+15C+20B+15A+6d=187$
(Vergl. No. 18).

14. Wenn die ersten Glieder $X, W, V\ldots A, d$ einer R. von der $x$ten Ordnung und deren $x$ Differenzenreihen gegeben sind, so kann man jedes Glied jeder beliebigen Differenzenreihe ausdrücken.

Allgemein ist das $n$te Glied der $(x-p)$ten Differenzenreihe

$$= P+\frac{n-1}{1}O+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2}N+\ldots.$$
$$\frac{(n+1)\ldots(n+1-p)}{1\ \ldots\ (p-1)}A+\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1\ \ldots\ p}\cdot d$$

Beispiel. Bei der ad 12, $A$ gegebenen R. der 5. Ordnung ist
$d=5$; $A=4$; $B=3$; $C=2$; $D=1$; $E=1$

Man findet das 4te Glied der 3ten Differenzenreihe, wenn man
$x-p=5-p=3$, also $p=2$, $P=B$ u. s. w. setzt.

$$B+\frac{4-1}{1}A+\frac{(4-1)(4-2)}{1.\ \ 2}\cdot d$$
$$=3+3\cdot 4+3\cdot 5=30$$

15. Nach dem Vorstehenden sind die Glieder einer a. R. höherer Ordnung zu finden, wenn deren erstes Glied und die ersten Glieder deren Differenzenreihen gegeben sind; jetzt sollen die Glieder der R. gegeben werden.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Glieder einer a. R. der $m$ten Ordnung mit $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ldots.$ so erhält man die erste Differenzenreihe

$-a+b,\ -b+c,\ -c+d,\ -d+e$ u. s. w.

die 2te Differenzenreihe

$a-2b+c,\ b-2c+d,\ c-2d+e\ldots.$

die 3te Differenzenreihe

$-a+3b-3c+d,\ -b+3c-3d+e\ldots.$

die 4te Differenzenreihe

$+a-4b+6c-4d+e\ldots.$

die 5te Differenzenreihe

$-a+5b-10c+10d-5e+f\ldots.$

die 6te Differenzenreihe

$+a-6b+15c-20d+15e-6f+g\ldots.$

Es sind diese Differenzen die Formen der entwickelten Binomen,

nämlich die 1. Differenzenreihe von $(-x+y)^1=-x+y$

2. „ „ $(-x+y)^2=+x^2-2xy+y^2$

3. „ „ $(-x+y)^3=-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$

u. s. w.

Setzt man für die $n$te Differenzenreihe analog:

$$\text{das 1. Glied } \mp a \pm nb \mp \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}c \pm \ldots. + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}t - nu + v$$

$$\text{„ 2. „ } \mp b \pm nc \mp \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}d \pm \ldots. + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}u - nv + w$$

und zieht das erste Glied vom zweiten ab, so erhält man das erste Glied der $(n+1)$ten Differenzenreihe mit

$$\pm a \mp (n+1)b \pm \frac{(n+1)n}{1.\ 2}c \mp \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}d \pm \ldots. + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}u - (n+1)v + w$$

Die Coefficienten sind aber offenbar die des Binoms zur $(n+1)$ten Potenz und zwar, wenn $n$ ungerade ist, für ein gerades $n+1$, und wenn $n$ gerade ist, für ein ungerades $n+1$; woher das Gesetz allgemein erwiesen ist.

16. Es sei $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ldots.$ eine R. der 1. Ordnung,

und ist $b-a=D$

so ist auch $c-b=D$

also $a-2b+c=D-D=0$

eben so $b-2c+d=0$

u. s. w.

$a\cdot b\cdot c\cdot d\ldots.$ sei eine R. 2. Ordnung

$a'\,b'\,c'\,d'$ deren 1ste Differenzenreihe

$d''\,d''\,d''$ „ 2te „

so ist $a'-2b'+c'=0$

also $(b-a)-2(c-b)+d-c=0$

woraus $a-3b+3c-d=0$

und eben so $b-3c+3d-e=0$ u. s. w.

Fährt man mit diesen Operationen fort, so findet man für eine R. der 3. Ordnung

$$a-4b+6c-4d+e=0$$

so dafs das Gesetz wieder nach den Binomial-Coefficienten sich feststellt, wie sich nachweisen läfst. Denn es sei eine R. der $(m-1)$ten Ordnung:

$$a'\cdot b'\cdot c'\cdot d'\ldots.u'\cdot v'\cdot w'$$

und es ist

$$a'-mb'+\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}c'-\ldots.$$
$$\pm\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}u'\mp m\cdot v'\pm w'=0$$

so sei die zugehörige R. der $m$ten Ordnung

$$a\cdot b\cdot c\ldots.v\cdot w\cdot x$$

und man hat

$$a'=b-a;\ b'=c-b;\ c'=d-c\ldots.$$
$$w'=x-w$$

$$\text{Daher } (b-a)-m(c-b)+\frac{m\cdot(m-1)}{1.\ 2}(d-c)-\ldots.\mp m(w-v)\pm(x-w)=0$$

$$\text{woraus } -a+(m+1)b-\left(m+\frac{m\cdot(m-1)}{1.\ 2}\right)c+\ldots.\pm\left(m+\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}\right)v\mp(m+1)\,w\pm x=0$$

und zusammengezogen und die Zeichen vertauscht:

$$a-(m+1)b+\frac{(m+1)\,m}{1.\ 2}c-\ldots.\mp\frac{(m+1)\,m}{1.\ 2}v\pm(m+1)w\mp x=0$$

eine R. offenbar mit den Binomial-Coefficienten der $(m+1)$ten Potenz, womit das Gesetz allgemein erwiesen ist.

Man hat demnach für eine R.

der 1. Ordnung $a-2b+c=0$

„ 2. „ $a-3b+3c-d=0$

„ 3. „ $a-4b+6c-4d+e=0$

„ $n$. „ $a-(n+1)b+\frac{(n+1)n}{1.\ 2}c$

$-\frac{(n-1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}d+\ldots.$

17. Ist $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\ldots.$ eine a. R. der 1. Ordnung,

so ist $a-2b+c=0$

und auch $b-2c+d=0$

hieraus durch Subtraction $a-3b+3c-d=0$

In der R. 1. Ordnung liegt also zugleich das Gesetz für eine R. der 2. Ordnung.

Da nun auch $b-3c+3d-e=0$

so hat man ebenfalls $a-4b+6c-4d+d=0$

mithin auch das Gesetz der R. 3. Ordnung.

Ueberhaupt liegt in einer R. der $m$ten Ordnung zugleich das Gesetz einer Reihe der $(m+1)$ten Ordnung.

18. Aus No. 16 erhält man für eine R. der

1. Ordnung $c=2b-a$
2. „ $d=3c-3b+a$
3. „ $e=4d-6c+4b-a$

$m$. „ $x=(m+1)w-\frac{(m+1)m}{1.\ 2}v+\frac{(m-1)m(n-1)}{1.\ 2.\ 3}u-\ldots\pm a$

Man kann demnach eine R. der $m$ten Ordnung bei den gegebenen ersten $m+1$ Gliedern erweitern:

Beisp. 1 (s. Tabelle No. 10). Betrachtet man die Glieder

1·2·4 als die ersten 3 Glieder einer R. der 2. Ordnung, so erhält man das 4te

$$d=3\cdot 4-3\cdot 2+1=7$$

1·2·4·8 als die ersten 4 Glieder einer R. der 3. Ordnung

$$e=4\cdot 8-6\cdot 4+4\cdot 2-1=15$$

1·2·4·8·16 als die ersten 5 Glieder einer R. der 4. Ordnung

$$f=5\cdot 16-10\cdot 8+10\cdot 4-5\cdot 2+1=31$$

1·2·4·8·16·32 als die ersten 6 Glieder einer R. der 5. Ordnung

$$g=6\cdot 32-15\cdot 16+20\cdot 8-15\cdot 4+6\cdot 2-1=63$$

1·2·4·8·16·32·64 als die ersten 7 Glieder einer R. der 6. Ordnung

$$h=7\cdot 64-21\cdot 32+35\cdot 16-35\cdot 8+21\cdot 4-7\cdot 2+1=127$$

1·2·4·8·16·32·64·128 als die ersten 8 Glieder einer R. der 7. Ordnung

$$k=8\cdot 128-28\cdot 64+56\cdot 32-70\cdot 16+56\cdot 8-28\cdot 4+8\cdot 2-1=255$$

Beispiel 2 (No. 12, *A*) Die ersten 6 Glieder der R. der 5. Ordnung sind

1·2·5·13·33·81

Man findet das 7. Glied

$$x=6\cdot 81-15\cdot 33+20\cdot 13-15\cdot 5+6\cdot 2-1=187$$

19. Bezeichnet man die Glieder einer a. R. mit

| | |
|---|---|
| | $a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ldots.z$ |
| die 1. Differenzenreihe | $a_1\ \ b_1\ \ c_1\ \ d_1\ldots.y_1$ |
| „ 2. „ | $a_2\ \ b_2\ \ c_2\ \ d_2\ldots.x_2$ |
| „ 3. „ | $a_3\ \ b_3\ \ c_3\ \ d_3\ldots.w_3$ |
| . . . . . . . | . . . . . . . |
| „ $m$. „ | $a_m\ a_m\ a_m\ a_m\ldots.$ |

so hat man

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a=a$ | $a_1=a_1$ | $a_2=a_2$ | $a_{m-1}=a_{m-1}$ |
| $b=a+a_1$ | $b_1=a_1+a_2$ | $b_2=a_2+a_3$ | $b_{m-1}=a_{m-1}+a_m$ |
| $c=b+b_1$ | $c_1=b_1+b_2$ | $c_2=b_2+b_3$ | $c_{m-1}=b_{m-1}+a_m$ |
| $d=c+c_1$ | $d_1=c_1+c_2$ | $d_2=c_2+c_3$ | $d_{m-1}=c_{m-1}+a_m$ |
| . . . . | . . . . | . . . . | . . . . . . . |
| $z=y+y_1$ | $y_1=x_1+x_2$ | $x_2=w_2+w_3$ | $n_{m-1}=m_{m-1}+a_m$ |

Hieraus folgt durch allmähliche Substitution:

1. Glied $a=a$
2. „ $b=a+a_1$
3. „ $c=a+2a_1+a_2$
4. „ $d=a+3a_1+3a_2+a_3$
5. „ $e=a+4a_1+6a_2+4a_3+a_4$

. . . . . . . . . . . . . . .

$n$. „ $z=a+\frac{n-1}{1}a_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}a_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}a_3+\ldots.$

Es ist hiermit jedes Glied einer höheren a. R. in eine R. entwickelt, die aus den ersten Gliedern der R. und deren Differenzenreihen der Reihenfolge nach fortschreitet, und deren Coefficienten wieder die Binomial-Coefficienten sind, wie schon aus No. 10 hervorgeht.

20. Die Formel No. 19 für jedes Glied einer R. höherer Ordnung führt zu dem Verfahren, Reihen höherer Ord. zu summiren: Bildet man nämlich aus einer zu summirenden R. der $m$ten Ordnung von $n$ Gliedern eine R. der $(m+1)$ten Ordnung, als:

| | |
|---|---|
| Stellenzahl | $1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ldots.n\ \ n+1$ |
| $m$te Ordn. | $a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ldots.x$ |
| $(m+1)$te Ordn. | $a'\ \ b'\ \ c'\ \ d'\ \ldots.w'\ x'$ |

wo das erste Glied $a'$ beliebig ist, so sind die ersten und bekannten Glieder der auf einander folgenden Differenzenreihen hier $a;\ a_1\ a_2\ a_3\ldots.a_m$

so ist $a=b'-a'$, also $b'=a'+a$

$b=c'-b'$, „ $c'=b'+b=a'+a+b$

$c=d'-c'$, „ $d'=a'+a+b+c$

. . . . . . . . . . . . . .

$x=x'-w'$, „ $x'=a'+a+b+c+\ldots+w+x$

Man hat demnach das $(n+1)$te Glied $x'$ der Reihe $(m+1)$ter Ordnung = dem willkürlich gewählten ersten Gliede $a'$ + der verlangten Summe der ersten $n$ Glieder einer gegebenen R. $m$ter Ordnung.

Nun ist nach obiger Formel, $n+1$ für $n$ gesetzt,

$$x' = a' + \frac{n}{1}a + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}a_1 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \ldots$$

und wenn man für $a'$ Null setzt,

$$x' = S = \frac{n}{1}a + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}a_1 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \ldots$$

Beispiele. Die No. 10 tabellarisch geordneten 9 ersten Glieder der Reihen der 1. bis 7. Ordnung summirt, geben

der 1. Ordnung: $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 = 45$

„ 2. „ $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 = 129$

„ 3. „ $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1 = 255$

„ 4. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 381$

„ 5. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 1 = 565$

„ 6. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 1 = 601$

„ 7. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 610$

Die ad 12 geschriebene Reihe der 5. Ordnung hat die Summe der ersten 7 Glieder:

$$S = 7\cdot 1 + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 5 = 322$$

**Arithmetische Scala.** In jedem Zahlensystem die mit 1 beginnende geometrische Reihe, nach welcher jede Ziffer einer Zahl von der Einerstelle ab in den auf einander folgenden Stellen ihrem Werth nach fortschreitet. Beim dekadischen System ist es die Reihe 1·10 100·1000...., beim dyadischen System die Reihe 1·2·4·8...., beim triadischen System d. R. 1·3·9·27.... u. s. w. In jedem Zahlensystem kann die gröfste Ziffer nur so viele Einheiten enthalten, als das 2te Glied der ihm zugehörigen Scala weniger Eins. Bei dem dyadischen System ist dies = 1; hier ist 10 = zwei; 11 ist = drei; 100 ist = vier. In dem triadischen System ist die gröfste Ziffer = 2; 10 ist = drei; 11 ist = vier; 12 ist = fünf; 20 ist = sechs; 21 ist = sieben; 22 ist = acht; 100 ist = neun u. s. w.

**Arithmetisches Verhältnifs** zweier Zahlen ist gleichbedeutend mit deren Unterschied. Das a. V. zwischen 10 und 7 ist = 3; man schreibt 10 − 7; früher 10 ÷ 7. Vergl. arithmetische Proportion.

**Arithmetische Zeichen** sind die Zeichen für arithmetische Operationen. Sie sind das Zeichen für die Addition, die Subtraction, die Multiplication, die Division, das Potenziren und das Radiciren. S. d. unter algebraische Zeichen.

**Arktisch** s. v. w. nördlich. Der Name kommt von ἀρκτος, der Bär, indem zugleich zwei nahe dem Nordpol befindliche Sternbilder diesen Namen führen. Die arktische Zone ist daher gleichbedeutend mit nördlicher Polarzone, arktischer Pol mit Nordpol.

**Armillarsphäre, Ringkugel.** Ein Instrument, dessen sich die alten Astronomen zu Beobachtungen bedienten, und das auch noch bis zu der Zeit, in welcher die Fernröhre verbessert worden, in Gebrauch war. Die A. stellt die Himmelskugel vor, jedoch nicht mit den Sternen, sondern nur mit den von den Astronomen

Fig. 81.



eingeführten ideellen Eintheilungs-Kreisen, welche hier durch Metallringe versinnlicht werden, und die man in eine Lage bringt, dafs sie mit denen an der wirklichen Himmelshohlkugel ∓ laufen. Der in Grade eingetheilte Kreis *abd* ist bis zu dem inneren Endkreis der Theilung ein starker Ring, in welchem die A. drehbar befestigt ist, und zwar in den Punkten *P*, *p* mittelst einer durchgehenden Axe *Pp*, welche die Welt-Axe mit dem Nordpol *P* und dem Südpol *p* vorstellt. Der unterhalb der an *abd* befindlichen Theilung sichtbare Kreisring *kk* gehört schon zu der drehbaren Kugel, wie der normal mit ihm verbundene Ring *k'k'*. Da beide durch die Pole gehen, so repräsentiren sie die beiden Kolnren der Nachtgleichen und der Sonnenwendepunkte, und der mittlere, normal auf die Axe *Pp* und die Kolnren befestigte Ring *qq* bedeutet den Aequator. Der breitere Ring *e*, die Ekliptik, unter $23\frac{1}{2}°$ gegen *qq* geneigt, trifft mit *qq* und *k'k'* in den Punkten *f* und *h* zusammen; es ist demnach *f* der Frühlingspunkt, *h* der Herbstpunkt, *k'k'* der Kolur der Nachtgleichen und *kk* der Kolur der Solstitialpunkte. Von den mit *qq* parallelen Ringen sind die beiden näheren die Wendekreise, die entfernteren die Polarkreise, erstere tangiren *ee* in den Solstitien, die zugleich in den Ring *kk* fallen, letztere tangiren die ebenfalls in *kk* liegenden Pole der Ekliptik *ee*. Nach Entdeckung des Copernicanischen Systems wurde auf die Mitte der Axe noch eine Erdkugel mit darauf gezeichneten Meridianen und Parallelkreisen angebracht.

Der Ring *AB* hat mit dem Fufs *D* Zusammenhang zu einem festen Gestell, die 3 Einschnitte bei *A*, *B*, *D* liegen genau in der auf dem Kranz *AB* normalen Ebene, und der äufsere feste Ring *abd* der A. pafst genau in dieselben und kann darin gedreht werden.

Das Gestell zum Gebrauch der A. wird so befestigt, dafs der Kranz *AB* genau horizontal liegt, und der Ring *abd* genau in den Meridian des Aufstellungspunktes fällt.

Aus der bekannten geographischen Breite oder der Polhöhe des Orts ist mit Hülfe der Gradtheilung der Ring *abd* so zu drehen, dafs das Zenith *z* mit dem des Orts übereinstimmt. Bei dieser Lage der A. sind die Welt-Axe *Pp*, Aequator *qq*, die Parallelkreise und die Ekliptik *e* mit den gleichnamigen wirklich ∓.

Denkt man sich nun noch einen Kreisring um die Axe *Pp* drehbar befestigt, versieht diesen mit Diopteru zum Visiren und dreht den Ring bis in die Richtung eines Gestirns, so giebt die Durchschnittslinie des Kreises mit der A. den Abstand des Sterns vom Meridian (das Azimuth), die Aufsteigung gegen den Aequator und die entsprechenden Bogen des Kreises die Höhe und die Abweichung desselben.

Ist der Kreis um die Pole der Ekliptik drehbar, so erhält man Länge und Breite des Gestirns. Mit diesem letzteren Kreis nach der Sonne visirt, und die A. so weit um *Pp* gedreht, bis der Ring *ee* mit seiner Ebene in die Visirlinie fällt, gab die augenblickliche Lage der Sonne in der Ekliptik und dieser gegen das Zenith. Stand die Sonne zugleich im Aequator, in *f* oder in *h*, so fiel der Schatten der einen Hälfte von *e* genau auf die andere Hälfte. In diesem Augenblick die A. um *Pp* gedreht, so dafs *f* oder *h* in die Visirlinie kam, ergab die Lage des Frühlingspunkts und des Herbstpunkts gegen den Meridian des Orts zu einer bestimmten Stunde, so dafs dieselben mit Hülfe des bei *P* angebrachten Stundenkreises zu jeder anderen Zeit auf der A. wieder aufgefunden werden konnte.

Auf der Ekliptik *ee* wurden die Planeten und der Thierkreis verzeichnet, woher auch die gröfsere Breite desselben erforderlich war; auch Sonne und Mond wurden durch kleine Kugeln an Bügeln befestigt, welche drehbar befestigt waren; der für die Sonne um die Pole der Ekliptik *ee*, der für den Mond um etwa 5° von denselben entfernt.

**Ascension, Aufsteigung**, bestimmt mit der gegebenen Abweichung (s. d.) den Ort eines Gestirns. Es sei *S* ein Gestirn,

Fig. 82.



welches in dem Parallelkreise *Kk* um die Erde sich zu bewegen scheint, *Qq* der Aequator, *Pp* die Weltaxe, also *pSAP* der

an $S$ gehörende Abweichungskreis (s. d.) und $SA$ die Abweichung von $S$. Diese Abweichung, der Bogen $AS$, giebt die Höhe des Parallelkreises $Kk$ über dem Aequator an; wird nun noch der Bogen $FA$ vom Frühlingspunkt $F$ bis zum Abweichungskreise von $S$ gegeben, so ist die Lage des Sterns vollkommen bestimmt, und dieser Bogen $FA$, von $F$ aus nach $A$ in der Richtung von Abend nach Morgen gemessen, und der bis zu 360° angegeben wird, heifst die Rectascension, gerade Aufsteigung von $S$.

Der Name kommt daher, dafs für die Bewohner des Aequators alle Gestirne in vollen Halbkreisen sich sichtbar am Himmel bewegen, dafs sie also beim Aufgange senkrecht oder gerade aufsteigen. Bedeutet der Abweichungskreis $pSAP$ zugleich den Horizont für einen Ort des Aequators vom Zenith $q$, so geht der Stern $S$ auf, wenn er von $K$ aus in den Punkt $S$ des Horizonts tritt; mit diesem Stern tritt aber auch der ganze Abweichungsbogen $SA$ in den Horizont, der Punkt $A$ des Aequators steigt also mit $S$ zugleich auf und zwar gerade auf.

Für irgend einen anderen aufserhalb des Aequators belegenen Ort $o$ der Erdoberfläche, dessen Zenith $s$ ist, sei $Hh$ der Horizont, so geht der Stern $S$ ebenfalls in dem Punkt $S$ für diesen Ort $o$ auf; der Punkt $A$ des Aequators ist aber für denselben Ort schon längst aufgegangen. Befände sich dagegen in dem Punkt $A'$, dem Durchschnittspunkt des Horizonts $Hh$ mit dem Aequator $Qq$, ein Gestirn, so würde dieses mit dem Gestirn $S$ zugleich sichtbar werden; daher ist für den Ort $o$ die Aufsteigung $FA'$, und zwar eine schiefe Aufsteigung des Sterns $S$. **Der Unterschied $FA' - FA$ der schiefen und geraden Aufsteigung heifst der Aufsteigungs-Unterschied, die Ascensional-Differenz. (S. den folgenden A.)**

**Gehört das Zenith $s$ der nördl. Halbkugel an, so steht das Gestirn $S$ in der südlichen. Ist $s$ ein Gestirn der nördl. Halbkugel, $sa$ seine Abweichung, so ist $FA'$ seine schiefe, $Fa$ seine gerade Aufsteigung, und $Fa - FA'$ seine Ascensional-Differenz. Bei Gestirnen von nördl. Abweichung ist für uns die gerade Aufsteigung gröfser, bei Gestirnen südl. Abweichung kleiner als die schiefe Aufsteigung. Oder, wie man es auch ausdrückt: Schiefe Aufsteigung = gerade Aufsteigung ± Ascensional-Differenz, wo + der südlichen, − der nördl. Abweichung von Gestirnen angehört.**

**Man findet den Punkt des Aequators, dessen Entfernung von $F$ die Rect-**ascension eines Gestirns giebt, an irgend einem Ort der Erde durch unmittelbare Beobachtung in dem Augenblick der Culmination des Gestirns, indem sodann dieser Punkt in dem Meridian des Ortes liegt.

**Ascensional-Differenz.** (Erkl. s. Ascension). In Fig. 82 ist Bogen $sa$ die Abweichung des Gestirns $s$, Bog. $aA'$ die A. D. von $s$, $\angle sA'a$ die Aequatorhöhe (s. d.) des Beobachtungsortes, $\angle saA' = 90°$. In dem bei $a$ rechtwinkligen sphär. △ ist aber der $sin$ jeder Kathete = der $tg$ der anderen Kathete mal der $Cotg$ des der letzteren gegenüber liegenden schiefen Winkels; mithin

$$\sin aA' = tg \cdot as \times \cot \cdot sA'a = \frac{tg \cdot as}{tg \cdot sA'a}$$

d. h. der $sin$ der A. D. ist = der $tg$ der Abweichung dividirt durch die $tg$ der Aequatorhöhe.

Beispiel 1. Es sei $s$ die Sonne, die Schiefe der Ekliptik beträgt etwa $23\frac{1}{2}$, am längsten Tage also ist deren Abweichung $as = 23°30'$; die Aequatorhöhe von Berlin ist 37°28′47″; mithin

$$\log \sin \text{A. D.} = \log \frac{tg\, 23°30'}{tg\, 37°28'47''} = 9{,}7536397 - 10$$

woraus A. D. = 34°32′48″

Aus dieser A. D. ist es nun leicht, die Länge des längsten Tages für Berlin zu finden. Jeder Punkt des Aequators nämlich ist für jeden Ort der Erdoberfläche 12 Stunden lang sichtbar und 12 Stunden lang unsichtbar; und wenn die Sonne im Aequator steht (in den beiden Nachtgleichen des Jahres), so ist an jedem Ort der Erde 12 Stunden Tag und 12 Stunden Nacht; die Sonne beschreibt sichtbar einen Bogen von 180° am Himmel. Der Punkt des Aequators also, in welchem die Sonne in den Nachtgleichen für Berlin aufgeht, ist von dem Meridian von Berlin 90° entfernt, und er ist, wenn die Sonne am längsten Tage aufgeht, schon früher aufgegangen, nämlich um die A. D. = 34°32′48″; die Sonne beschreibt also am längsten Tage vom Aufgang bis Mittag einen Bogen von $90° + 34°32'48'' = 124°32'48''$ und der längste Tag in Berlin dauert $\frac{2 \times 124°32'48''}{360°} \cdot 24$ Stunden = 16 St. 36′22,4″

2) Für den kürzesten Tag steht die Sonne 23° 30′ jenseits des Aequators; man hat also $\sin \text{A. D.} = \frac{tg\,(-23°30')}{tg\, 37°28'47''}$ Nun ist $tg(-23°30') = -tg\, 23°30'$, mithin A. D. = −34°32′48″. **Der Sonnen-Aufgangspunkt in den Nachtgleichen liegt**

also beim Aufgang der Sonne am kürzesten Tage noch um 34°32'48" unter dem Horizont von Berlin; der halbe Tag hat 90° − 34°32'48" = 55°27'12" und der kürzeste Tag dauert $\frac{2 \cdot 55°27'12''}{360°} \cdot 24$ Stunden = 7 St. 23'37,6".

3) Bei Eintritt des Sommers ist die Sonne vom Frühlingspunkt *F* 90° entfernt, d. h. da die Erde in dem Winterpunkt sich befindet (s. Aequator der Erde), so scheint die Sonne in dem Sommerpunkt zu stehen und die Entfernung von *F* = 90° zu sein, oder die Länge oder die Rectascension = 90° zu haben. Die schiefe Aufsteigung der Sonne beträgt also an unserem längsten Tage 90° − der A. D. = 90° − 34°32'48" = 55°27'12". Am kürzesten Tage steht die Erde in dem Sommerpunkt, die Sonne scheint in dem Winterpunkt zu stehen, deren Rectascension ist also = 270° und deren schiefe Aufsteigung = 270° + 34°32'48" = 304°32'48".

Die Formel $\sin$ A. D. = $\frac{tg \text{ Abweichung}}{tg \text{ Aequatorhöhe}}$ zeigt eine Grenze für die A. D. Nämlich für Abweichung = Aequatorhöhe wird $\sin$ A. D. = 1 und A. D. = 90°; d. h. das Gestirn befindet sich in einem durch *H* oder *h* gehenden Parallelkreise, indem dann der Bogen $HQ = hq$ nicht nur die Abweichung ist, sondern zugleich die Aequatorhöhe = $\angle HA'Q = \angle hA'q$ mifst. Die Gestirne beider Kreise berühren alle 24 Stunden den Horizont, das Gestirn des *H* Kreises im tiefsten Stande, das des *h* Kreises im höchsten. Ersteres geht nicht mehr unter und ist der nächste Circumpolarstern, letzteres geht nicht mehr auf. In dem ersten Falle befindet sich die Sonne für die Bewohner der Polarkreise bei der gröfsten gleichnamigen Abweichung der Sonne, in dem letzten Fall bei der gröfsten ungleichnamigen Abweichung derselben. In unserem Sommer ist also auf dem nördl. Polarkreise der längste Tag 24 Stunden lang, anstatt des Untergangs streift die Sonne den Horizont und geht sogleich wieder aufwärts; in unserem Winter ist dort der kürzeste Tag = 0, die Sonne streift von unten den Horizont, anstatt dafs sie aufgeht. Auf dem südl. Polarkreise findet dies in den für uns entgegengesetzten Jahreszeiten statt.

Gestirne, die eine noch gröfsere Abweichung haben, bewegen sich in Kreisen, die zwischen *H*, *P* und *h*, *p* liegen; erstere gehen uns nicht unter, letztere gehen uns nicht auf.

**Ascii** (Unschattige, eigentlich askii, von ἀσκιος). Die Bewohner der heifsen Zone, weil die Sonne zu Mittage ihnen bisweilen senkrecht über dem Kopf steht, wo sie dann keinen Schatten werfen. Vergl. Amphiscii, Antiscii.

**Aspecten** (von adspectus, der Anblick). Configurationen, auch Constellationen, letzterer Name besonders in der Astrologie, sind die verschiedenen gegenseitigen Standpunkte oder Stellungen zweier Gestirne zu verschiedenen Zeiten, dieselben von einem dritten Gestirn aus betrachtet. Die hauptsächlichsten A. sind:

1) Der Zusammenschein, Zusammenkunft, Conjunction (Zeichen ☌), wenn zwei Gestirne einerlei Länge haben, wenn also dieselben in einerlei Breitenhalbkreise liegen, in welchem nämlich die Axe der Ekliptik der Durchmesser ist.

2) Der Gegenschein, Opposition (Zeichen ☍), wenn zwei Gestirne eine um 180° verschiedene Länge haben, wenn sie also in einerlei Breitenkreise, aber in entgegengesetzten Halbkreisen desselben liegen.

3) Der Geviertschein, die Quadratur (Zeichen □), wenn zwei Gestirne eine um 90° verschiedene Länge haben.

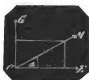
Steht, von der Erde aus gesehen, der Mond mit der Sonne in Conjunction, so ist Neumond, und befindet sich dieser nahe der Ekliptik, so entsteht eine Sonnenfinsternifs, indem die Sonne zum Theil von dem Monde bedeckt wird. Steht der Mond mit der Sonne in Opposition, so ist Vollmond, und befindet sich dieser nahe der Ekliptikebene, so entsteht eine Mondfinsternifs, indem dieser von dem Schatten der Erde ganz oder zum Theil bedeckt wird. Steht der Mond mit der Sonne in den Quadraturen, so ist erstes oder letztes Viertel des Mondes.

**Astatische Magnetnadel** (ἀστατος, unstät), eine Nadel zur Wahrnehmung und Untersuchung sehr schwacher magnetischer Wirkungen, indem die Nadel von der Einwirkung des Erdmagnetismus unabhängig, für andere magnetische Einwirkungen also um so empfindlicher gemacht wird.

Es ist nämlich erfahrungsmäfsig, dafs eine Magnetnadel aus der Richtung des magnetischen Meridians abgelenkt wird, wenn man neben oder um die Nadel einen galvanischen Strom führt. Ist *CE* die Richtung der Nadel nach dem magnetischen Pol der Erde, also deren natürliche Richtung in Folge der Kraft (*P*) des Erdmagnetismus, *CM* deren Richtung unter dem $\angle \alpha$ mit *CE* in Folge einer neben der Nadel befindlichen elektrischen

Strömung, so äufsert diese auf die Nadel offenbar eine Kraft ($p$) nach der Richtung $CG$, und würde ohne Gegenwirkung durch $P$ die Nadel in die Richtung $CG$ drehen.

Fig. 83.



Indem nun die Nadel nach $CM$ gerichtet bleibt, sind die Kräfte $P$ und $p$ im Gleichgewicht, und es ist $p = P \cdot tg\,\alpha$

Eigentlich $p = P \cdot tg\,\alpha + w$, wo $w$ die innerhalb des Systems noch einwirkenden Reibungswiderstände bedeutet.

Ist $p$ so gering, dafs $w$ nicht überwunden wird, so geschieht keine Wahrnehmung des Stroms; man hängt daher die Nadel an einen Coconfaden um $w$ bis auf das Beharrungsvermögen oder die Trägheit der Nadelmasse zu beseitigen.

Bei Weitem wichtiger ist nun, die Nadel von dem Erdmagnetismus unabhängig zu machen, damit bei schon geringen Strömungen gröfsere Ablenkungen geschehen, und man erreicht dies, wenn man zwei Magnetnadeln von möglichst gleich grofser magnetischer Stärke so mit einander verbindet, dafs der Südpol der einen über

Fig. 84.



den Nordpol der anderen Nadel fällt. Den Draht $ABD$, durch welchen ein zu beobachtender Strom geleitet wird, führt man um nur eine Nadel und beide Nadeln erhalten hierdurch die Neigung zur Ablenkung nach einerlei Richtung. Denn wenn die Strömung gegen die obere Nadel unterhalb derselben rechts geschieht, so geschieht sie gegen die untere Nadel unterhalb derselben links, mithin geschehen die Ablenkungen beider Nadeln in den gleichnamigen Polen nach entgegengesetzten Richtungen, und da diese gleichnamigen Pole entgegengesetzte Lage mit einander haben, so geschieht die Ablenkung beider Nadeln übereinstimmend.

Die Quantität der magnetischen Wirkung einer Strömung ist nur zu messen und als aliquoter Theil der Kraft des Erdmagnetismus anzugeben, wenn jede einzelne a. N. ajustirt wird. Man untersuche demnach mit einer nicht astatischen Nadel eine Strömung, durch welche dieselbe um einen kleinen $\angle\,\alpha$ noch afficirt wird; dieselbe Strömung zugleich durch die zu ajustirende a. N.; gesetzt, deren Ablenkung betrage $A°$, so hat man die Quantität des Magnetismus der Strömung $p = P\,tg\,\alpha = x\,tg \cdot A$, wenn $x$ die Kraft-Einheit der a. N. bedeutet, und man hat diese Kraft-Einheit $x = \frac{tg\,\alpha}{tg\,A}\,P$, mithin in $\frac{tg\,\alpha}{tg\,A}$ einen Coefficienten von $P$.

Für jede andere Strömung, die nun die Nadel um den $\angle\,B$ ablenkt, ist

$$p = \frac{tg\,\alpha}{tg\,A} \cdot P \cdot tg\,B$$

**Asteroiden, Planetoiden.** Die kleineren Planeten unseres Sonnensystems, früher nur die vier: Vesta, Juno, Ceres, Pallas. Später sind noch viele andere kleine Planeten entdeckt worden, die den asteroïdischen Planeten zugezählt werden; die Reihenfolge derselben von dem nächsten bis zu dem der Sonne entferntesten, und alle zwischen Mars und Jupiter befindlich, sind folgende, 23 an der Zahl:

Flora, Melpomene, Victoria, Vesta, Iris, Metis, Hebe, Parthenope, Fortuna, Massilia, Lutetia, Thetis, Egeris, Asträa, Irene Thalia, Eunomia, June, Ceres, Pallas, Kalliope, Psyche, Hygiea.

**Asträa,** asteroïdischer Planet, von der Sonne ab der 18te Planet, der 15te der oberen Planeten. Neigung gegen die Ekliptik 5° 20′ 7,2″; Excentricität 0,195520; Länge des aufsteigenden Knotens 141° 10′ 6,7″; Länge des Perihels 135° 45′ 17″; siderische Umlaufszeit 1501,47 mittlere Sonnentage.

**Astrognosie.** Die Kenntnifs des gestirnten Himmels, der Fixsterne, deren Stellung zu einander, der zu Sternbildern vereinigten Sterngruppen, der die Himmelskugel eintheilenden Kreise mit den darin festgesetzten Punkten zur Ortsbestimmung der Sterne, und aller deren Namen. Die A. bildet den beschreibenden Theil der Astronomie.

**Astrolabium** (ἀστήρ, Gestirn, λαβίς, jedes Werkzeug zum Festhalten). 1) Ein von Hipparch erfundenes, der Ringkugel ähnlich gestaltetes, bei den alten Astronomen, wie noch in späteren Zeiten gebräuchliches Winkelmefs-Instrument, wel-

ches aber jetzt durch andere bessere Instrumente ersetzt wird.

2) Ein Winkelmefs-Instrument für Feldmesser. Es besteht aus einem in Grade, auch halbe und viertel Grade eingetheilten messingenen horizontalen Kreisring, um dessen Mittelpunkt eine Alhidade (s. d.) mit Diooptern *A*, *A* zum Visiren gedreht werden kann und wo dann die von den Visirlinien gebildeten Winkel auf dem Ring abgelesen werden. Gewöhnlich sind beide Dioptern, wie hier

Fig. 85.




gezeichnet, zum vor- und rückwärts Visiren eingerichtet, indem jede Diopter zum Theil (in dem schmalen Schlitz) O c u l a r d i o p t e r und zum Theil (in dem breiten Schlitz) O b j e c t i v d i o p t e r ist. Statt der Dioptern wird auch ein Fernrohr angewendet, oder es befinden sich auch 2 Fernröhre mit ihren Axen unter einander und mit der Absehekante der Alhidade in einerlei verticalen Ebene, um vor- und rückwärts visiren zu können.

Die älteren A. haben oft nur einen halben Kreis eingetheilt oder wohl nur einen eingetheilten Quadrant, was für Vermessungen unbequem ist, wenn Winkel abgenommen werden sollen, die im ersten Fall gröfser als 180° und im zweiten Fall gröfser als 90° sind.

Die gerade Linie durch 0° und 180° des eingetheilten Kreisringes wird mit 2 an den Rand befestigten Dioptern *B*, *B* bezeichnet, welche zum vorwärts und rückwärts Visiren eingerichtet sind. Soll nun auf dem Felde ein $\angle xyz$ gemessen werden, so stellt man das Instrument mit dem Mittelpunkt des Kreisringes senkrecht über den Scheitelpunkt *y* des Winkels, dreht den Kreisring so lange herum, bis die Dioptern *B*, *B* in den einen Schenkel, z. B. *yx*, gerichtet sind, stellt den Ring mittelst einer Schraube an das Stativ unbeweglich fest und dreht die Alhidade herum, bis die Dioptern *A*, *A* in den zweiten Schenkel *yz* gerichtet sind, wonach man den Winkel *xyz* auf dem Ring in Graden unmittelbar ablies't. Ist eine Alhidaden-Diopter mit einem Nonius versehen, oder, was für die Controlle der Ablesung und zur Prüfung der Richtigkeit des Instruments zweckmäfsiger ist, haben beide Alhidaden-Dioptern Nonien, wie hier gezeichnet, so kann man Winkel bis auf eine oder zwei Minuten genau ablesen. Das Instrument o h n e N o n i u s gewährt keine gröfsere Genauigkeit als die Boussole, und es ist diese dem A. schon deshalb vorzuziehen, weil die Richtung der Magnetnadel, welche hier die Normal-Visirlinie *B*, *B* vertritt, überall sich $\neq$ bleibt, nicht jedes Mal besonders eingestellt werden darf, und einen einmal begangenen Fehler nicht auf die ganze Vermessung fortpflanzt.

**Astrologie** (*αστηρ*, Gestirne, *λογιος*, kundig, gelehrt). Dem Wortbegriff nach die Lehre von den Gestirnen, die Sternkunde, die Himmelskunde; bei den Alten und auch hier und dort heut noch die an göttliche Weisheit grenzende oder vielmehr die in dieselbe hineinragende Wissenschaft von dem Einflufs der Gestirne auf die unserer Erde widerfahrenden weltlichen Begebenheiten, und zwar in Betreff ganzer Völker und einzelner Menschen, besonders derjenigen, welche regieren oder regieren wollen oder regieren sollen. Ein Astrologe kennt die Figur, zu welcher die verschiedenen Planeten und welche von ihnen unter sich mit der Sonne und gewissen Fixsternen sich gruppiren, wenn unserer Erde Krieg bedroht, die Figur für Pest, für Hungersnoth, für Friede und Freude. Er lehrt die Constellation, unter welcher zwei Liebende sich ehelichen müssen, um ein glückliches Leben mit einander zu führen; unter welcher ein Kind zu taufen ist, damit es ein frommer gottgefälliger Mensch werde, und so die Constellationen für alle einem Menschen wichtigen Unternehmungen.

Diese hohe Weisheit schreibt sich aus dem tiefsten Alterthum her, und man darf sich nicht wundern, dafs sie gewesen, dafs sie cultivirt worden ist, dafs man ihr vertraute und dafs sie in höchsten Ehren stand.

Denn wufste man es anders, als man es sah? Wufste man nicht, dafs die Erde still steht, und dafs nicht nur die Sonne, sondern der ganze gestirnte Himmel alle 24 Stunden um sie herum sich bewegt? War die Erde nicht die Hauptperson der

ganzen Schöpfung? Hatten Monarchen und deren Völker nicht kosmische Bedeutung und stand nicht eben darum jeder einzelne Mensch weltlich höher? Lehrt nicht selbst die Bibel, dafs Gott Sonne, Mond und Sterne nur der Erde wegen geschaffen habe? — Mose 1, 15: „Und seien Lichter an der Veste des Himmels, dafs sie scheinen auf Erden. Und es geschah also." 16: „Und Gott machte zwei grofse Lichter, ein grofs Licht, das den Tag regiere, und ein klein Licht, das die Nacht regiere. Dazu auch Sterne." 17: „Und Gott setzte sie an die Veste des Himmels, dafs sie schienen auf die Erde." —

Und welche Macht hatten grofse Männer über Sonne, Mond und Sterne? — Josua, der Nachfolger Mosis, nachdem er mit dem lieben Gott persönlich Rücksprache genommen, sprach (Josua 10, 12) Angesichts seines Heeres: Sonne, stehe stille zu Gibeon und Mond im Thale Ajalon; (10, 13): Da stand die Sonne und der Mond stille, bis dafs sich das Volk an seinen Feinden rächete. Also stand die Sonne mitten am Himmel und verzog unterzugehen beinahe einen ganzen Tag!

Wenn alle gebildeten Völker der Erde und aller Religionen solche und ähnliche historischen Thatsachen aufzuweisen hatten, wenn Könige der Erde unmittelbar von Göttern mit Königstöchtern erzeugt oder dem Schoofse von Göttinnen ihr Dasein verdankten, so war nichts natürlicher, als dafs die Sterne nur deshalb die Erde umkreis'ten, damit sie sich um die daselbst befindlichen hohen Personen um so specieller bekümmern könnten, dafs sie zu ihnen ermunternde, beistimmende, warnende, zürnende Worte sagten, in einer klaren, unverhohlenen Sprache, in der Sprache der Constellationen, welche die schriftgelehrten Priester verstanden und die Güte hatten zu übersetzen.

In um so höherem Ansehn mufsten diese Wahrsagungen mit den Wahrsagern selbst bei dem Volke stehen, dies Ansehn sich von Generation zu Generation forterben, auch Personen niederen Ranges Constellationen für sich in Anspruch nehmen, und diese sich von Weisen entziffern lassen, weil sich immer solche fanden, die mit einem dem Vermögen des Fragestellers angemessenen Honorar zufrieden waren.

Mit Galilei's Bestätigung des copernicanischen Systems, dafs der gestirnte Himmel und die Sonne an ihrem Kreislauf um die Erde ganz unschuldig seien, dafs also unsere Erde nicht nur nicht die Hauptperson der Schöpfung, sondern ein äufserst kleines und höchst untergeordnetes Gliedchen an der Kette des Weltalls ausmacht, mufste der Dünkel der Menschen tief herabsteigen! — Aber was sträubt sich mehr als menschlicher Dünkel? — Das Licht war zu grell, zu viel Licht auf einmal blendet, es wurden die mit göttlichem Geist beseelt gewesenen Bibelverfasser in ihrer Autorität angegriffen, das Licht war ein Irrlicht, Galilei erhielt für seine schnöde Lehre den wohlverdienten Lohn, das copernicanische System machte sich nur langsam spärliche Bahn. Aber wenn heut, nach 400 Jahren, nur noch Wenige es läugnen, der Dünkel der Menschen hat in demselben Maafse mit jenen Läugnern nicht abgenommen:

Wir leben in einer Zeit, welche für die in derselben sich bewegenden geistlichen Richtungen viel zu aufgeklärt ist; wir sehen Traum- und Zeichendeuter, Kartenleger, kurz: Wahrsager aller möglichen Gattungen und Systeme bei vornehmen Leuten ihr Glück machen; wir hören und lesen Bibelauslegungen und Consequenzen daraus, dafs der liebe Gott darüber sich erbarmen möchte, und dürfen uns daher nicht wundern, dafs heut noch der Mysticismus auch astrologische Richtungen hat, dafs Menschen sich herausnehmen, auch diejenige Bibel durch verquatschende Auslegungen herabzuziehen, welche der liebe Gott ohne Hülfe von sogenannten inspirirten Menschen, sondern ganz allein geschrieben hat, das Fundament einer einzigen und nicht zu verfälschenden Religion für Verehrung und Anbetung eines einzigen Gottes, in dem gestirnten Himmel das Weltgebäude, und für die es nur ein einziges Priesterthum giebt: die Wissenschaft in ihrer Wahrheit.

**Astronomie** (*αστηρ*, Gestirn, *νομος*, Anordnung, Gesetz). Himmelskunde, Sternkunde, die Lehre von den am Himmel befindlichen Gestirnen und den Gesetzen, nach welchen sie sich bewegen. Sie wird eingetheilt in die theoretische und in die praktische A. Erstere zerfällt in die sphärische, in die theoretische und in die physische A.; letztere in die beobachtende und in die rechnende A.

Die sphärische A., so genannt, weil der Himmel als eine hohle Halbkugel erscheint, heifst auch empirische A., weil hier erfahrungsmäfsig die bei den Astronomen üblichen Namen und Eintheilungen gelehrt werden; auch Astrognosie, weil sie eigentlich die der höheren Himmelskunde vorangehende Himmelsbeschreibung ist.

Sie lehrt die Punkte und Kreise kennen, welche auf der Himmelskugel verzeichnet werden, mit Hülfe deren man die Gestirne in ihrer Stellung und Bewegung angiebt. Als: Pol, Zenith, Frühlingspunkt; Aequator, Ekliptik, Parallelkreis, Horizont, Meridian; die Bezeichnung von Länge, Breite, Abweichung, Aufsteigung u. s. w., ferner Namen und Ort der Fixsterne und deren Gruppirungen zu Sternbildern, mit Rücksicht auf obige Punkte und Kreise.

Die theoretische A., welche besser die mathematische A. genannt werden möchte, weil sie ganz besonders die mathematischen Erkenntnisse beansprucht, und weil dann der folgende Theil, die physische A., welche ebenfalls eine theoretische A. ist, diesem Theil recht eigentlich als nothwendig angereiht erscheint. Aus demselben Grunde ist der Name theoretische A. (wie theoretisch von Theorie abgeleitet) nicht angemessen, und scientifische A. desgleichen nicht, weil beide Namen dem folgenden Theil mit gleichem Recht zukommen.

Sie lehrt, aus den Beobachtungen der Gestirne, besonders der Planeten deren wahre Bahnen bestimmen, Sein von Schein unterscheiden; sie ist dasjenige Gebiet, in welchem Copernicus und Galilei mit Hülfe ihrer bewundernswürdigen Vernunftschlüsse sich unsterblich gemacht haben, weshalb denn auch der ihr gegebene Name rationelle A. eben so richtig als schön ist.

Die physische A. (die in der Natur begründete). Diese lehrt die Naturgesetze kennen, zufolge welcher die Himmelskörper sich so bewegen, wie es geschieht, und lehrt folglich auch die Regeln, nach welchen deren Bewegungen im Voraus zu berechnen sind. In diesem Gebiet haben sich Galilei, Kepler und Newton hervorragend ausgezeichnet.

**Astronomische Breite** oder Breite eines Gestirns ist dessen Abstand von der Ekliptik. Die Ekliptik, die Ellipse, in welcher die Erde um die Sonne sich bewegt, hat etwa 40 Millionen Meilen im Durchmesser. Da nun die B. auch von Sternen angegeben werden sollen, deren Entfernungen vom Sonnensystem unermeſslich sind, so ist die Ebene der Ekl. nach allen Richtungen vom Mittelpunkt aus bis in's Unendliche erweitert zu denken; es ist demnach gleichgültig, wo man sich deren Mittelpunkt denkt, ob z. B. in dem Mittelpunkt der Sonne oder in dem der Erde, welche beide in der Ebene der Ekl. liegen.

Die Ekl. theilt also die Himmelskugel in zwei Halbkugeln, in die nördliche, in welcher der Nordpol liegt, und in die südliche, in welcher der Südpol liegt. Die in der ersteren befindlichen Sterne haben nördliche B., die in der letzteren belegenen südliche B.; Gestirne, die in der Ekliptik-Ebene selbst liegen, haben keine Breite oder die Breite = 0, wie Sonne und Erde.

Um die Breiten der Gestirne in ihrem Abstand von der Ekl. messen zu können, denke man sich irgend wo, z. B. in dem Mittelpunkt der Erde, den Mittelpunkt der Ekl., errichte hier auf der Ebene der Ekliptik nach beiden Seiten hin ein Loth, die Axe der Ekl., so sind die beiden unendlich fernen Endpunkte dieser Axe die Pole der Ekl., jeder durch beide Pole gelegte Kreis ist auf der Ekl. normal, der von einem Pol durch ein Gestirn gelegte, auf der Ekliptik normale Kreis heiſst der Breitenkreis des Gestirns und dessen Bogen zwischen dem Gestirn und der Ekliptik die Breite des Gestirns.

Die B. eines Gestirns kann nie mehr als 90° betragen, und diese hat dasselbe, wenn es in einem der Pole der Ekl. sich befindet. Planeten, Monde und Kometen haben in jedem Punkt ihrer Bahn eine B., mit Ausnahme, wenn sie sich in ihren Knoten (s. absteigender Knoten) befinden, nämlich in den Punkten, wo sie die Ekl. durchschneiden, also bald nördliche, bald südliche B. Die Länge der Bahn eines Planeten vom aufsteigenden Knoten ab bis zu einem Punkt der Bahn gemessen, heiſst das Argument der zu diesem Punkt der Bahn gehörigen B.

Durch die Breite und die Bezeichnung des Punktes, wo der sie bestimmende Breitenkreis die Peripherie der Ekl. schneidet (die Länge des Sterns), ist die Lage des Sterns am Himmel vollkommen bestimmt.

Die Fixsterne haben unmeſsbare Entfernungen sowohl von der Erde, wie von der Sonne, und daher sind die beiden Winkel gleich groſs, welche ein Fixstern, von der Erde und von der Sonne aus gesehen, mit der Ebene der Ekliptik bildet.

Die zu unserem Sonnensystem gehörenden Körper dagegen, die Planeten, Monde und Kometen haben meſsbare Entfernungen von Sonne und Erde; von jedem dieser beiden Weltkörper sind die Entfernungen verschieden, folglich auch die Winkel, die von der Erde und von der Sonne aus beobachtet ein Planet, Mond oder Komet in einem bestimmten Augenblick mit der Ekliptik bildet, d. h.

dessen Breite, je nachdem diese auf den Erd- oder Sonnenmittelpunkt bezogen wird. Die von der Erde aus beobachtete Breite heifst die geocentrische Breite, die auf den Mittelpunkt der Sonne bezogene die heliocentrische Breite des zu unserem Sonnensystem gehörenden Gestirns.

**Astronomischer Breitenkreis**, s. den vor. Art.

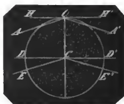
**Astronomische Dämmerung.** 1. Dämmerung ist die Erleuchtung der Erdoberfläche vor dem Aufgang und nach dem Untergang der Sonne durch Brechung und Spiegelung der Lichtstrahlen in der Erd-Atmosphäre. (Vergl. Astronom. Strahlenbrechung). Erstere heifst Morgen-Dämmerung, letztere Abend-D. Eben so wie der von der Sonne erleuchtete Mond sein erhaltenes Licht uns zusendet, wie bei nahe unter dem Horizont stehender Sonne erleuchtete Wolken, die Morgen- und die Abendröthe uns erscheinen, wie bei Tage auch diejenigen Gegenstände, welche nicht unmittelbar von der Sonne beschienen werden, hell leuchten, in schmalen, mit hohen Gebäuden eingefafsten Höfen die untersten Zimmer noch erhellt werden, indem das Sonnenlicht in den zusammenhangenden Theilchen der Atmosphäre sich hierher fortpflanzt, eben so verbreitet die erleuchtete atmosphärische Luft eine Helligkeit, welche mit der Annäherung der Sonne an den Horizont zu- und mit deren Entfernung abnimmt.

In welchem Stande gegen den Horizont eines Orts die Sonne anfängt, die obersten Luftschichten zu erleuchten, ist nicht ganz festgestellt, und kann es auch nicht, weil von den mehr oder weniger wässerigen Beimengungen derjenigen Luftschichten, welche die Sonne zuerst oder zuletzt trifft, die Erscheinung der Dämmerung mit abhängt. Sie wird im Mittel 18° angegeben, und diese Dämmerung ist die astronomische Dämmerung, während unter bürgerlicher Dämmerung diejenige D. verstanden wird, bei welcher man Gegenstände noch deutlich erkennen kann, und für diese wird der Stand der Sonne im Mittel zu 6° unter dem Horizont angenommen.

Ist nämlich $HH'$ der scheinbare Horizont für den Ort $O$, und steht die Sonne um den Winkel $HOA = H'OA' = 18°$ unter dem Horizont, hat also die Sonne die Richtung $CE = CE'$, so dafs die Bogen $DE = D'E' = 18°$ betragen, so ist der durch $EE'$ gelegte Kreis (astronomischer Dämmerungskreis) die Dämmerungsgrenze für den Ort $O$.

2. Ist $O$ ein Ort im Aequator und steht die Sonne ebenfalls daselbst, so beträgt die Zeit jeder astr. D., der Morgen- und der Abend-D.

Fig. 86.




$\frac{18°}{360°} \times 24$ Stunden = 1 Stunde 12 Minuten, die bürgerliche $\frac{1}{3}$ derselben = 24 Minuten.

3. Ist $O$ ein Ort im Pol und ist die Sonne aus dem gleichnamigen Wendekreis in den Aequator getreten, so geht sie im Horizont auf und unter. Die Sonne hat auf dem Wege vom Wendekreis in den Aequator einen Bogen von $23\frac{1}{2}°$ beschrieben und dazu 3 Monate Zeit bedurft, und bedarf nun eben so viel Zeit, um nach der entgegengesetzten Sonnenwende zu gelangen, mithin beträgt an dem Pol die Zeit der a. D. $\frac{18°}{23\frac{1}{2}°} \times 3$ Monat = 2 Monat 9 Tage, die der bürgerlichen D. 23 Tage, und die eigentliche astronomische Nacht daselbst nur 1 Monat 12 Tage.

Die hier betrachtete D. ist die Abenddämmerung, die nach dem Winter wieder beginnende D. die Morgendämmerung, so dafs an dem Pol in einem Jahr nur zwei Dämmerungen, jede von 2 Monat 9 Tagen, vorkommen.

4. Wenn die Sonne im Aequator steht, so sagt man wohl, die Pole haben 24 Stunden lang Tag, dies ist aber nicht richtig: Auf der ganzen Erde ist nur 12 Stunden lang Tag und 12 Stunden Nacht. Denn wenn die Sonne aus dem Wendekreise der dem Pol zugehörigen Halbkugel in den Aequator tritt, so können für die der 24stündigen Umdrehung zukommende Tageslänge nur die letzten 12 Stunden gerechnet werden, in welchen die Sonne noch über dem Aequator stand, die folgenden 12 Stunden, in welchen sie aus dem Aequator nach dem anderen Wendekreise sich bewegt, gehören der Nacht an, welche nun permanent bleibt. Und eben so sind beim Wieder-Eintritt der Sonne in die dem Pol zugehörige Halbkugel die

letzten 12 Stunden, in denen sie noch außerhalb des Aequators sich befand, der permanent gewesenen Nacht zukommend, und die ersten 12 Stunden, in welchen sie von dem Aequator ab in die Halbkugel aufstieg, dem Tage, der nun permanent bleibt.

Nimmt man nun, wenn die Sonne im Aequator steht, von dem Pol $P$ oder $p$ aus, auf einem beliebigen Meridian einen Bogen $= 18°$, so haben alle Orte des dem Endpunkt dieses Bogens zugehörigen Parallelkreises 12 Stunden Tag und 12 Stunden Dämmerung. Dies sind alle Orte von 72° nördlicher und südlicher Breite oder $5\frac{1}{2}°$ über dem Polarkreise nach dem Pol hin. Von diesen beiden Parallelkreisen ab bis zum Aequator hin werden die D. immer kürzer und die Nächte immer länger; im Aequator selbst ist jede der beiden D. = 1 St. 12 Min. zugleich das Minimum aller D. auf der ganzen Erde.

5. Es seien $P$, $p$ die Pole; ist $AP = BP = 23\frac{1}{2}°$, so ist, wenn die Sonne in dem mit $P$ gleichnamigen Wendekreise steht,

Fig. 87.



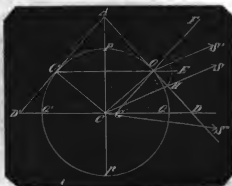
die ganze Polarzone $PAB$ erleuchtet und im Polarkreise $AB$ ist 24stündiger Tag. Nimmt man $AD = BE = 18°$, so haben die Orte im Parallelkreise $DE$ die Zeit der beiden D. plus dem dazwischen liegenden Tage = 24 Stunden, also die Orte von der gleichnamigen geogr. Breite

$$= 90° - 23\frac{1}{2}° - 18° = 48\frac{1}{2}°.$$

6. Man kann für jeden Ort der Erde sehr leicht ermitteln, ob er bei gegebenem Stande der Sonne Dämmerung erhält oder nicht, indem man die Tiefe der Sonne im Maximo, also an Mitternacht für den Ort aufsucht.

Es seien $P$, $p$ die Erdpole, $Q'$ $Q$ der

Fig. 88.



Aequator, $O$ ein Ort zu Mittage, also $O'$ derselbe zu Mitternacht, $CS$ die gleichnamige Richtung der Sonne, die Horizonte für $O$ und $O'$ schneiden sich in der verlängerten Axe $p\,P$ in $A$ und den Aequator in $D$ und $D'$. Verlängert man den Parallelkreis $O'O$, zieht $OS' \# CS$ und durch $O$, $GF \# O'A$, so ist

$\angle S'OD$ die Höhe ($Sh$) der Sonne zu Mittag

$\angle FOS$ die Tiefe ($Sf$) der Sonne zu Mitternacht.

Nun ist

$$\angle S'OD = \angle SHD = \angle ODC + \angle SCD$$

Es ist aber $\angle ODC = \angle DOE$ = der Aequatorhöhe für $O$ und $\angle SCD$ ist die mit $O$ und $P$ gleichnamige Abweichung der Sonne. Demnach ist bei gleichnamiger Abweichung der Sonne die Mittagshöhe ($Sh$) der Sonne = der Aequatorhöhe des Orts plus der Abweichung der Sonne.

Hat die Sonne ungleichnamige Abweichung, wie $\angle S''CD$, so ist $\angle S''JK$ = der Mittagshöhe der Sonne für $O$, und

$$= \angle ODC - \angle S''CD.$$

Demnach ist bei ungleichnamiger Abweichung der Sonne die Mittagshöhe ($Sh$) der Sonne = der Aequatorhöhe des Orts minus der Abweichung der Sonne.

Da $\angle ODC = 90° - \angle OCQ$, und da $\angle OCQ$ die geographische Breite von $O$ ist, so hat man, wenn diese für einen Ort $O$ gegeben ist, die Mittagshöhe der Sonne für den Ort $O$ auch = dem Complement der geogr. Br. des Orts ± der Abweichung der Sonne.

Ferner ist $\angle FOD = \angle AOG = \angle ODG + \angle OGD = 2\angle ODG$, d. h. die Summe ($Sh + Sf$) der Mittagssonnenhöhe und der Mitternachtssonnentiefe für denselben Ort ist gleich der doppelten Aequatorhöhe des Orts oder dessen doppeltem Complement

der geogr. Br. Mithin die Mitternachtssonnentiefe (*Sf*) ist gleich dieser doppelten Aequatorhöhe weniger der Sonnenhöhe, oder gleich der Aequatorhöhe des Orts + der Abweichung der Sonne.

7. Steht die Sonne im Aequator, so ist auf allen Orten der Erde *Sh* = *Sf*.

| Geogr. Br. | *Sh* + *Sf* | *Sh* = *Sf* |
|---|---|---|
| Pole 90° | 0 | 0 |
| 72° | 36° | 18° |
| Polarkreise 66½° | 47° | 23½° |
| Wendekreise 23½° | 133° | 66½° |
| Aequator 0 | 180° | 90° |

Da sämmtliche Orte Tag haben, so haben sie auch Tag + *D*. Vom Aequator ab haben alle Orte auch Nacht, bis zu 72° geogr. Br., wo die Grenze der Nacht und Tag + *D* = 24 Stunden beträgt, weil die Sonnentiefe = 18° ist, wie schon ad 4 nachgewiesen worden.

8. Steht die Sonne im nördlichen Wendekreise, Abweichung = 23½°, so ist

| Geogr. Br. | *Sh* + *Sf* | *Sh* | *Sf* |
|---|---|---|---|
| Nordpol 90° | 0 | 23½° | − 23½° |
| Nördl. Polarkreis 66½° | 47° | 47° | 0 |
| Berlin 52° 31' 13" | 74° 57' 34" | 60° 58' 47" | 13° 58' 47" |
| 48½° | 83° | 65° | 18° |
| Wendekreis 23½° | 133° | 90° | 43° |
| Aequator 0 | 180° | 66½° (113½°) | 66½° |

*Sf* = − 23½° für den Nordpol heifst, dafs die Sonne keine Tiefe hat, sondern fortdauernd die Höhe = 23½°. Alle Orte der nördlichen Halbkugel haben Tag, also auch alle Tag + D.

In Berlin steht die Sonne niedriger als 18°, mithin hat Berlin um die Zeit des längsten Tages permanente Dämmerung und keine Nacht.

Unter 48½° geogr. Br. ist vom Aequator ab der erste Parallelkreis, in welchem Tag + D. 24 Stunden dauert, wie dies schon ad 5 nachgewiesen ist, also in der Nähe von Passau, Landshut, Tübingen, Strafsburg, Luneville u. s. w.

Die Orte der südlichen Halbkugel verhalten sich hier so, wie die der nördlichen in der folgenden Tabelle.

9. Steht die Sonne im südlichen Wendekreise (Abweichung = 23½°), so ist

| Nördl. geogr. Br. | *Sh* + *Sf* | *Sh* | *Sf* |
|---|---|---|---|
| Nordpol 90° | 0° | − 23½° | 23½° |
| 84½° | 11° | − 18° | 29° |
| Polarkreis 66½° | 47° | 0 | 47° |
| Berlin 52° 31' 13" | 74° 57' 34" | 14° 58' 47" | 59° 58' 47" |
| 48½° | 83° | 18° | 65° |
| Wendekreis 23½° | 133° | 43° | 90° |
| Aequator 0 | 180° | 66½° | 113½° (66½°) |

*Sh* = − 23½° für den Nordpol heifst, dafs die Sonne keine Höhe hat, sondern fortdauernd die Tiefe 23½°.

Vom Polarkreis ab haben alle Orte der nördlichen Halbkugel Tag, also auch alle Tag + D.

Unter 84½° geogr. Br., also 5½° vom Nordpol, ist der erste Parallelkreis, von dem aus die D. beginnen, in ihm selbst nur einen Augenblick lang, weil die Tiefe der Sonne von 18°, der D.-Grenze, bis 29° zunimmt, und kein Ort hat Nacht-

dämmerung, sondern jeder vollständige Nacht.

10. Um zu erfahren, mit welcher Abweichnng der Sonne in Berlin die 24stündige Nachtdämmerung beginnt, hat man

$74^\circ 57' 34'' = Sh + Sf = Sh + 18^\circ$

worans $Sh = 56^\circ 57' 34''$

und die zugehörige nördliche Abw. der Sonne

$= Sh +$ geogr. Br. $- 90^\circ = 19^\circ 28' 47''$

Da nun vom Austritt der Sonne aus dem Aequator (20. März) bis zum Eintritt in den nördlichen Wendekreis (22. Juni) 94 Tage vergehen, so hat man die Anzahl der Tage der permanenten D. $= x$ ans der Proportion

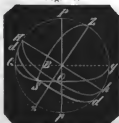
$23\frac{1}{2}^\circ : 23\frac{1}{2}^\circ - 19^\circ 28' 47'' = 94 : x$

woraus $x = 16$ Tage.

Bei der Rückkehr der Sonne aus dem Wendekreise nach dem Aequator sind abermals 16 Tage für permanente D., und somit in Berlin um den längsten Tag am 22. Juni 32 Tage nachtlos, nämlich vom 6. Juni bis zum 8. August.

11. Für einen aufserhalb des Aequators liegenden Ort $O$, wenn die Sonne im Aequator steht, erhält man mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie den Dämmerungsbogen, wenn man *Sinus* 18° durch den *Sinus* der Aequatorhöhe dividirt. Denn ist $Hh$ der Horizont für $O$, $Qq$ der Aequator, $dd$ der Dämmerungskreis, der den Aequator in $S$ schneidet, so hat man $SO$ als den Dämmerungsbogen für $O$, zieht man nun den Scheitelkreis vom Zenith Z durch $S$, so ist der Bogen $BS$ desselben $= 18^\circ$ und senkrecht in $B$, mit-

Fig. 89.



hin $\angle SBO = 90^\circ$, $\angle BOS =$ der Aequatorhöhe für $O$,

und $\sin BOS : \sin SBO = \sin BS : \sin OS$,

d. i. $\sin BOS : 1 = \sin 18^\circ : \sin OS$,

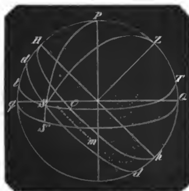
woraus $\sin OS = \frac{\sin 18^\circ}{\sin BOS}$

Die Formel hat nur Anwendung bei $\angle BOS = 18^\circ$ bis 90° oder bei Orten von 0° bis 72° geogr. B. Für 0° Breite liegt $O$ im Aequator, $\angle BOS$ ist $= 90^\circ$, $OS = 18^\circ$ giebt 72 Zeit-Minuten. Für 72° Breite, also $5\frac{1}{2}^\circ$ über dem Polarkreise, ist $\angle BOS = 18^\circ$ und $OS = 90^\circ$, giebt eine Dämmerung von 6 Stunden, so dafs hier die Morgen-Dämmerung mit dem Ende der Abend-Dämmerung anfängt, wie schon ad 4 und 7 nachgewiesen worden.

12. Für einen aufserhalb des Aequators liegenden Ort $O$, wenn die Sonne gleichnamige Abweichung hat, findet man den Dämmerungsbogen $OS$ plus dem halben Tagebogen $OT$, also $ST$ durch den $\angle SPT = \angle SPZ$, durch die Formel:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin \frac{1}{2}(ZS + PS - PZ) \times \sin \frac{1}{2}(ZS + PZ - PS)}{\sin PZ \times \sin PS}$$

Fig. 90.



Ist nämlich $Hh$ der Horizont des Orts, $dd$, darunter 18° tief, der Dämmerungskreis, $Qq$ der Aequator, $Tt$ darüber die nördliche Abweichung der Sonne, $S$ deren Stand in $dd$, so ist $OT$ der halbe Tagebogen, $SO$ der Dämmerungsbogen; ist $PSS'$ der Abweichungskreis durch $S$, so wird Bogen $SOT$ gemessen durch $S'Q$ oder durch $\angle S'PQ = SPZ$, von dem das Quadrat des Sinus der Hälfte durch obige Formel gegeben ist; denn in dem Dreieck $PSZ$ sind $PS$ und $PZ$ die einschliefsenden Seiten, und $SZ$ der durch $S$ gelegte, also in $A$ senkrechte Scheitelkreis, ist die gegenüber liegende Seite.

$PS$ ist das Complement der nördlichen Abweichung $SS'$.

$PZ$ der Zenith-Abstand vom Nordpol $SZ = SA + AZ = 18^\circ + 90^\circ = 108^\circ$

Die Formel giebt nur mögliche Werthe, wenn der Zähler kleiner als

der Nenner ist. Bei gleichem Zähler nnd Nenner wird $\sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$, mithin $ZPS = 180°$, also der ganze Tagebogen nebst den beiden Dämmerungsbogen $= 360°$.

Für $PS = 90° - 23\frac{1}{2}° = 66\frac{1}{2}°$, d. h. wenn die Sonne in dem mit dem Pol gleichnamigen Wendekreise steht, erhält man:

$$\sin^2 \frac{1}{2} ZPS = \frac{\sin \frac{1}{2}(174\frac{1}{2}° - PZ) \sin \frac{1}{2}(41\frac{1}{2}° + PZ)}{\sin PZ \cdot \sin 66\frac{1}{2}°}$$

Setzt man $PZ = 41\frac{1}{2}°$, so wird $\frac{1}{2}(174\frac{1}{2}° - PZ) = 66\frac{1}{2}°$, $\sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$, mithin $ZPS = 180°$ nnd der Tagebogen + den beiden D.-Bögen = 24 Stunden; der Zenith-Abstand $41\frac{1}{2}°$ giebt aber die geogr. Br. $= 48\frac{1}{2}°$, wie schon ad 5, 8 und 9 nachgewiesen worden.

13. Um ans der Formel ad 12 zu erfahren, mit welcher nördlichen Abweichung der Sonne die permanente D. in Berlin anfängt, hat man

$$\frac{1}{2} ZPS = 90°$$
$$ZS = 108°$$
$$PZ = \text{dem Complement der geogr. Br. des Orts} = 90° - 52° 31' 13'' = 37° 28' 47''$$

und es entsteht

$$1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(70° 31' 13'' + x) \times \sin \frac{1}{2}(145° 28' 47'' - x)}{\sin x \cdot \sin 37° 28' 47''}$$

Da nach No. 8 nnd 10 die Aufgabe möglich ist, so mufs es für $x$ einen Werth geben, für welchen Zähler und Nenner gleich werden, mithin mufs der erste Factor des Zählers $= \sin x$ sein, d. h. $x = 70° 31' 13''$

Diesen Werth in den zweiten Factor gesetzt, giebt diesen $= \sin 37° 28' 47''$

$x$ ist das Complement der nördlichen Abweichung, nnd man erhält diese

$$= 19° 28' 47''$$

wie schon ad 10 nachgewiesen worden.

14. Wenn die Sonne mit dem Ort $O$ ungleichnamige Abweichnng hat, bleibt die Formel 12 dieselbe, nnr dafs $PS = 90°$ + der Abweichnng beträgt. Hier hat man für gleichen Zähler nnd Nenner $ZPS = 180°$, für $PS = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$, d. h. wenn die Sonne in dem mit dem Pol nngleichnamigen Wendekreise steht, erhält man für gleichen Zähler nnd Nenner des Bruchs:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(221\frac{1}{2}° - PZ) \times \sin \frac{1}{2}(PZ - 5\frac{1}{2}°)}{\sin PZ \times \sin 113\frac{1}{2}°}$$

$PZ = 138\frac{1}{2}°$; d. h. der Parallelkreis, in welchem sämmtliche Orte zur Zeit der beiden Dämmerungen + dem zwischen liegenden Tage = 24 Stnnden haben, liegt $41\frac{1}{2}°$ von dem gleichnamigen Pol, oder nnter $48\frac{1}{2}°$ gleichnamiger geogr. Br., wie schon ad 5 gezeigt worden.

Setzt man $PZ = 23\frac{1}{2}°$, d. h. sncht man $\angle ZPS$ für die Orte des ungleichnamigen Polarkreises, so erhält man

$$\sin^2 \frac{1}{2} ZPS = \frac{\sin 18°}{\sin 47°}$$

$$\log \sin \frac{1}{2} ZPS = 9{,}81292745 - 10$$

nnd $\angle ZPS = 81° 5'$, mithin die Zeit des ganzen Tage- und der beiden angrenzenden Dämmerungsbogen $= \frac{81° 5'}{180°} \times 24$ Std. = 10 Stunden 49 Minnten.

Wenn die Sonne in dem nngleichnamigen Wendekreiss steht, so tangirt ihre Richtung den Polarkreis, es ist mithin Sonnen-Anfgang nnd Sonnen-Untergang in einem nnd demselben Angenblick, daher fängt mit dem Anfhören der Morgendämmerung zugleich die Abend-D. an, nnd beide znsammen währen 10 Std. 49 Min., so dafs die eigentliche Nacht nnr 13 Std. 11 Min. dauert.

15. In dem speciellen Fall (No. 14), dafs die Sonne in dem ungleichnamigen Wendekreis steht, ist der positive Grenzwerth von $PZ = 5\frac{1}{2}°$; hierfür wird $\angle ZPS = 0$, also Dämmerungen giebt es dann nnr in einer Entfernung von $5\frac{1}{2}°$ von dem Pol, nnd von der ungleichnamigen geogr. Br. $84\frac{1}{2}°$ ab bis zum Pol; also nur auf $5\frac{1}{2}°$ Breite giebt es keine Dämmerung mehr, wie dies schon ad 9 gezeigt ist.

16. Um ans der Formel No. 12 zn erfahren, unter welcher südlichen Abweichnng ($x$) am Nordpol die permanente D. eintritt nnd aufhört, hat man

$$ZPS = 180°;\ \sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$$
$$ZS = 108°$$
$$PS = 90° + x$$
$$PZ = 0$$

mithin $1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(198° + x) \times \sin \frac{1}{2}(18° - x)}{\sin 0 \times \sin (90° + x)}$

Betrachtet man $PZ$ (hier = 0 im Nenner) als den Bogen, der soeben verschwinden will, so mufs der Bogen $\frac{1}{2}(18° - x)$ des Zählers demselben entsprechen, mithin hat man die südliche Abweichnng $x = 18°$. Dann anch $\frac{1}{2}(198° + x) = 108° = 90° + 18° = 90 + x$, der Zähler also dem Nenner gleich. Die eigentliche Nacht des Nordpols dauert also so lange, als die Sonne von der südlichen Abw. 18° in den südlichen Wendekreis und von dort wieder

in denselben Abweichungskreis tritt, wie ad 3 schon nachgewiesen ist.

17. Will man für Berlin die Länge der eigentlichen Nacht am kürzesten Tage, also bei der südl. Abw. der Sonne von $23\frac{1}{2}°$ erfahren, so hat man

$$ZS = 108°$$
$$PS = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$$
$$PZ = 90° - 52°31'13'' = 37°28'47''$$

und es ist

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} ZPS = \frac{\sin 92°0'36\frac{1}{2}'' \times \sin 15°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 113\frac{1}{2}°}$$
$$= \frac{\sin 87°59'23\frac{1}{2}'' \times \sin 15°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 66\frac{1}{2}°}$$

woraus $\log \sin \frac{1}{2} ZPS = 9{,}84657906$ und $ZPS = 89°14'18''$

Dies ist der Bogen des halben Tages und einer Dämmerung, mithin ist der Bogen für den Tag + 2 angrenzenden D. $= 178°28'36''$

und der Nachtbogen dessen Ergänzung zu $360° = 181°31'24''$, daher

$$\text{die Nachtzeit} = \frac{181°31'24''}{360°} \times 24 \text{ Stunden}$$
$$= 12 \text{ Std. } 6 \text{ Min. } 5\tfrac{1}{2} \text{ Sec.}$$

18. Denkt man sich in No. 12 den Bogen $PO$ gezogen, so ist $\angle OPQ = \angle OPZ$ der $\angle$, der den halben Tagebogen $OT$ mifst, und man hat

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} OPZ = \frac{\sin \frac{1}{2}(OZ + OP - PZ) \times \sin \frac{1}{2}(OZ + PZ - OP)}{\sin PZ \cdot \sin OP}$$

hier ist wieder

$OP = 90°$ minus der nördlichen Abweichung.

$PZ$ der Zenith-Abstand vom Nordpol und $OZ$ ist hier $90°$.

Für eine südliche Abweichung der Sonne bleibt die Formel dieselbe (s. No. 14), nur dafs $OP = 90°$ + der Abweichung genommen werden mufs.

Man kann also, wenn man aus Formel No. 12 den Bogen des halben Tages + D erhält, nach dieser Formel den Bogen des halben Tages finden, diesen von dem ersten abziehen, um den D.-Bogen zu erhalten.

19. Für den kürzesten Tag in Berlin hat man

$$OZ = 90°$$
$$OP = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$$
$$PZ = 90° - 52°31'13'' = 37°28'47''$$

mithin

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} OPZ = \frac{\sin 83°0'36\frac{1}{2}'' \times \sin 6°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 66\frac{1}{2}°}$$

Man erhält

$\log \frac{1}{2} OPZ = 9{,}667691675 - 10$

und $\angle OPZ = 55°27'12''$

und der halbe Tag dauert

$$\frac{55°27'12''}{360°} \times 24 \text{ Stunden} = 3 \text{ Std. } 41'48{,}8''$$

Diese Berechnung stimmt genau mit der unter dem Art. Ascensional-Differenz, Beisp. 3, gegebenen; man bedient sich also für die Auffindung des Tagebogens für einen gegebenen Ort der Erde besser der dort aufgestellten Regel

$$\sin \text{Asc.-Diff.} = \frac{tg \text{ Abweichung der Sonne}}{tg \text{ Aequatorhöhe des Orts}}$$

wo dann $\frac{1}{2}$ Tagebogen $= 90° \pm$ Asc.-Differenz.

Nun ist (No. 17) der Bogen des halben Tages + D. $= 89°14'18''$

Aus No. 19 ist $\frac{1}{2}$ Tagebogen $55°27'12''$

daher ein Dämmerungsbogen $33°47'6''$

mithin die D.-Zeit am kürzesten Tage

$$= \frac{33°47'6''}{360°} \times 24 \text{ Std.} = 2 \text{ Std. } 15 \text{ M. } 8{,}4 \text{ Sec.}$$

der halbe Tag dauert

| | |
|---|---|
| (s. o.) | 3 „ 41 „ 48,8 „ |
| $\frac{1}{2}$ Tag + D. | = 5 Std. 56 M. 57,2 Sec. |
| Tag + 2 D. | = 11 Std. 53 M. 54,4 Sec. |
| folglich Nacht | = 12 Std. 6 M. 5,6 Sec. |

wie in No. 17 berechnet worden.

20. Unter welcher Abweichung der Sonne ein Ort der Erde von gegebener geogr. Breite oder Polhöhe die geringste Dämmerungszeit hat, ist keine sehr wichtige Frage, und doch ist sie verschiedentlich und mühsam gelöst worden.

Da im Sommer die längsten D. existiren, so kann die geringste Dämmerungszeit nur in den Winter fallen, also bei ungleichnamiger Abweichung der Sonne mit der Lage des Orts, und diese geschieht offenbar, wenn der D.-Bogen die geringste Länge hat, wenn also die Sonne diesen Bogen möglichst senkrecht durchläuft, folglich wenn die Mitte dieses Bo-

gens im Morgen- oder Abendpunkt des Ortes liegt, wenn also $\angle mZP = 90°$ ist, wo $m$ die Mitte des letaten vor Sonnenaufgang oder des ersten nach Sonnenuntergang beschriebenen Bogens von 18° Höhe unterhalb des Horizonts bedentet.

In jedem rechtwinkligen sphärischen △ ist der $cos$ der Hypothenuse = dem Product der $cos$ beider Katheten, daher $\cos Pm = \cos PZ \cdot \cos Zm$

Nun ist $Pm = 90° + \text{Abweichung} = 90° + d$
$PZ =$ der Zonithdistanz $z =$ dem Complement der Polhöhe $p$ oder dem der geogr. Breite des Orts

und $Zm = 90° + 9° = 99°$
mithin $\cos(90 + d) = \cos z \cdot \cos 99°$
oder $-\sin d = \cos z(-\sin 9°)$
woraus $\sin d = \cos z \cdot \sin 9° = \sin p \cdot \sin 9°$

21. In Geblers physikalischem Wörterbuch II, pag. 267—269 (1826), ist unter ähnlichen Betrachtungen mit Hülfe der Lehre vom Minimum aus der Differenzialrechnung gefunden $\sin d = \sin p \cdot tg\, 9°$ und für einen Ort von 50° Polhöhe die südl. Abw. $d = 6° 58'$.

Es ist $\log \sin 50° = 9{,}8842540 - 10$
$\log \sin 9° = 9{,}1943324 - 10$
$\log tg\, 9° = 9{,}1997125 - 10$

$\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$ giebt $d = 6° 52' 57\frac{1}{2}''$
$= \sin p \cdot tg\, 9°$ „ $d = 6° 58' 8''$

Um beide Formeln mit einander zu vergleichen, sei die Polhöhe eines Orts 50°, dessen Zenithdistanz also = 40°. Dann hat man nach Formel No. 12 für $d = 6° 52' 57\frac{1}{2}''$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin 82° 26' 28\frac{1}{2}'' \times \sin 25° 33' 31\frac{1}{4}''}{\sin 40° \times \sin 83° 7' 2\frac{1}{2}''}$$

| | |
|---|---|
| $\log \sin 82° 26' 28\frac{1}{2}''$ | $= 9{,}9962096$ |
| $\log \sin 25° 33' 31\frac{1}{4}''$ | $= 9{,}6349156$ |
| $\log$ Zähler | $= 9{,}6311252$ |
| $\log \sin 40°$ | $= 9{,}8080675$ |
| $\log \sin 83° 7' 2\frac{1}{2}''$ | $= 9{,}9968590$ |
| $\log$ Nenner | $= 9{,}8049265$ |
| $\log \sin^2 \frac{1}{2} SPZ$ | $= 19{,}8261987 - 20$ |
| $\log \sin \frac{1}{2} SPZ$ | $= 9{,}91309935 - 10$ |

Man findet in den Tafeln
$\frac{1}{2} SPZ = 54° 57' \frac{1}{4}''$
mithin $SPZ =$ dem Bogen des halben Tages + einer Dämmerung
$109° 54' \frac{1}{2}''$
der halbe Tagebogen ist (s. No. 19) $= 90° -$ Ascensional-Differenz

$$\sin \text{Asc.-Diff.} = \frac{tg\, 6° 52' 57\frac{1}{2}''}{tg\, 40°}$$

| | |
|---|---|
| $\log tg\, 6° 52' 57\frac{1}{2}''$ | $= 9{,}0817283$ |
| $\log tg\, 40°$ | $= 9{,}9238135$ |
| $\log \sin$ Asc.-D. | $= 9{,}1579148$ |
| worans Asc.-D. | $= 8° 16' 15''$ |

und der halbe Tagebogen $= 81° 43' 45''$
dieser + einer D. war $= 109° 54' \frac{1}{2}''$
bleibt ein D.-Bogen $= 28° 10' 15\frac{1}{2}''$

Für $d = 6° 58' 8''$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin 82° 29' 4'' \times \sin 25° 30' 56''}{\sin 40° \times \sin 83° 1' 52''}$$

| | |
|---|---|
| $\log \sin 82° 29' 4''$ | $= 9{,}9962530$ |
| $\log \sin 25° 30' 56''$ | $= 9{,}6342314$ |
| $\log$ Zähler | $= 9{,}6304844$ |
| $\log \sin 40°$ | $= 9{,}8080675$ |
| $\log \sin 83° 1' 52''$ | $= 9{,}9967796$ |
| $\log$ Nenner | $= 9{,}8048471$ |
| $\log \sin^2 \frac{1}{2} SPZ$ | $= 19{,}8256373 - 20$ |
| $\log \sin \frac{1}{2} SPZ$ | $= 9{,}91281865 - 10$ |

hieraus $\frac{1}{2} SPZ = 54° 53' 50\frac{1}{7}''$
und $SPZ = 109° 47' 41''$

$$\sin \text{Asc.-D.} = \frac{tg\, 6° 58' 8''}{tg\, 40°}$$

| | |
|---|---|
| $\log tg\, 6° 58' 8''$ | $= 9{,}0871899$ |
| $\log tg\, 40°$ | $= 9{,}9238135$ |
| $\log \sin$ Asc.-D. | $= 9{,}1633764$ |

worans Asc.-D. $= 8° 22' 34''$
also der halbe Tagebogen $= 81° 37' 26''$
dieser + D. $= 109° 47' 41''$
bleibt ein D.-Bogen $= 28° 10' 15''$

Der Unterschied beider Bögen, je nachdem man $\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$, oder $= \sin p \cdot tg\, 9°$ nimmt, beträgt mithin etwa $\frac{1}{2}$ Bogensecnnde, d. i. 2 Zeittertien, während ein Unterschied nnr in Secunden noch unbedentend sein würde.

Die Zeit, in welcher die Sonne die südliche Abweichung von circa $23\frac{1}{2}°$ durchläuft, bis sie ans dem Wendezirkel des Steinbocks in den Aequator tritt, beträgt vom 22. Dec. bis 21—22. März im Mittel 90 Tage Denkt man sich diese mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen, so hat man in 90 Tagen zu 24 Stunden die Zeit für eine Bogenminute der Abweichung

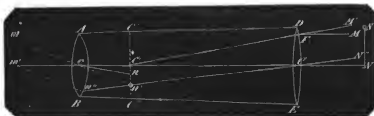
$$= \frac{90 \cdot 24}{23\frac{1}{2} \cdot 60} = 1{,}532 \text{ Stunden.}$$

Bringt man für $d$ $tg\, 9°$ in Rechnung, so erhält man $d =$ $6° 58' 8''$
für Einführung von $\sin 9°$ ist $d$ $6° 52' 57\frac{1}{2}''$
Unterschied im Bogen $5' 10\frac{1}{2}''$
also ein Zeit-Unterschied von
$5\frac{1}{6} \times 1{,}532 = 8$ Stunden,
worans wiederum erhellt, daſs beide Ausdrücke für $d$ ein übereinstimmendes Resultat geben müssen.

Dagegen ist, streng genommen, die Formel: $\sin d = \sin p \cdot tg\, 9°$ die richtige, und daſs die Formel: $\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$, streng genommen, nicht richtig ist, liegt darin, daſs, wenn der Bogen von 18° Höhe

vom Horizont ab nach unterwärts in der kürzesten Zeit zurückgelegt werden soll, der Mittelpunkt des D.-Bogens *OS* nicht ganz genau in den Morgen- oder Abendpunkt des Orts, also in das Zenith *Z* normal auf den Meridian *ZP* treffen darf, sondern dafs der $\angle PZS$, wenn *S* in *m* steht, um ein freilich sehr Geringes stumpf sein mufs.

Fig. 91.



**Astronomisches Fernrohr, Sternrohr,** auch nach seinem Erfinder Kepler'sches Fernrohr genannt, unterscheidet sich von dem ältesten Galilei'schen F. dadurch, dafs jenes ein biconvexes, dieses, das ältere F., ein biconcaves Ocularglas hat. Aus diesem Unterschied entspringt zunächst ein zweiter, nämlich, dafs das Galilei'sche F. alle Gegenstände so sehen läfst, wie sie in Wirklichkeit sind, und dafs das Sternrohr dieselben verkehrt zeigt, nämlich das Obere zu Unterst und das Rechts und Links zu Links und Rechts.

Das Objectivglas ist in beiden F. biconvex, bei dem Galilei'schen F. liegen die Brennpunkte beider Gläser in einerlei Punkt aufserhalb hinter dem Ocularglas, bei dem Kepler'schen F. liegen beide Brennpunkte innerhalb des Rohrs in einerlei Punkt, und die Brennweite des einen Glases ist die Verlängerung der Brennweite des anderen, und dieses mufs deshalb länger sein als das Rohr des älteren F. Bei diesem älteren wird von dem Gegenstand kein Bild gestaltet, dasselbe vielmehr durch das eingestellte Ocularglas unterbrochen; bei dem Kepler'schen F. dagegen wird durch das Objectivglas das Bild des Gegenstandes nach dem Brennpunkt geworfen und dieses zur Beschauung von dem Ocularglas aufgenommen.

Das Angeführte macht die wesentlichsten Unterschiede beider F. aus, die jedoch alle Folgen der verschieden gestalteten Ocularglässer sind; auch kann man noch dazu rechnen, dafs beim Gebrauch des Galilei'schen F. das Auge ganz nahe dem Ocular sein mufs, während es bei dem Kepler'schen F. in einer gewissen Entfernung von dem Glase verbleibt.

Die Theorie des Sternrohrs ist folgende: Es sei *ABDE* das Fernrohr, *DE* das Objectiv, *AB* das Ocular, *NN'* die (halbe) Höhe eines sehr entfernten Gegenstandes, z. B. eines Gestirns, so wird derselbe um so viel vergröfserter gesehen, als die Krümmung des Oculars die Krümmung des Objectivs übertrifft.

Jedes der Gläser ist biconvex, und zwar der Art, dafs beide Flächen, die Vorderfläche und die Hinterfläche jedes Glases, einerlei Krümmung haben, dafs nämlich beide Flächen als Theile gleich grofser Kugeloberflächen zu betrachten sind.

Man legt beide Gläser ‡ mit einander und so in die Röhre, dafs die Verbindungslinie *cC* auf beiden Gläsern normal steht. Diese Linie *cC* ist die Axe des F. und es wird das F. mit dieser Axe nach dem zu beobachtenden Gegenstand *NN'* gerichtet, von dem nur die obere Hälfte gezeichnet ist, so dafs *N* dessen Mitte vorstellt; *NN'* sei z. B. der obere senkrechte Halbmesser des Vollmondes, und dieser werde durch das blofse Auge, wenn es in *C* sich befindet, unter dem sehr kleinen $\angle N''CN$ gesehen. Diese letzte Voraussetzung kann der ungeübte Leser sich klar machen, wenn er den Blick auf's Fenster richtet:

Durch eine Scheibe von vielleicht 16 Zoll Höhe sieht der Leser, ohne dafs er vom Stuhl aufsteht, von dem nahen Hause nur das untere Stockwerk, ein entfernter befindliches Haus von 40 Fufs Höhe füllt schon vom Pflaster bis zum Forst dieselbe Höhe der Scheibe, in noch gröfserer Entfernung ein Thurm von 200 Fufs Höhe, und wenn es Nacht ist, so tangiren den oberen und den unteren Rand der Scheibe

zwei Fixsterne, die Milliarden von Meilen aus einander stehen. Alle diese verschiedenen Längen sieht der Leser ans einerlei Pnnkt des Zimmers, in welchem sich eben sein Auge befindet, innerhalb einerlei Höhe, welche die 16 Zoll ans einander liegenden waagerechten Ränder der Scheibe begrenzen; folglich sieht er alle diese Höhen und Längen gleich lang, nicht 16 Zoll, nicht 40 Fufs, nicht 200 Fufs, nicht Milliarden Meilen lang, sondern als das gleich lange Bild auf der inneren Netzhaut des Auges, in der sich die genannten Gegenstände abspiegeln, indem die beiden in senkrechter Ebene befindlichen Lichtstrahlen, welche als gerade Linien von dem oberen und dem unteren Rande der Scheibe in dem Augenmittelpnnkt zusammentreffen, hier nach hinterwärts bis zu der im Ange tiefer liegenden Netzhaut kreuzweise sich verlängern, auf welcher sie als Endpnnkte das Bild aller genannten Höhen und Längen begrenzen, welches also nnr einerlei Länge und zwar eine nur sehr kleine Länge haben kann.

Dafs wir die Längen der genannten Gegenstände richtig würdigen, liegt in unserer Vernunft, mit der wir die von Kindesbeinen an gemachten Erfahrungen uns unbewufst augenblicklich vergegenwärtigen. Ein Kind greift nach dem Monde, um daran zn lutsehen, und es erhält erst nach nnd nach, erst wenn es Tausende von Malen nach Dingen vergeblieb gegriffen hat, Begriff von Entfernungen.

Ausgewachsene Thiere zeigen beim Jagen nach Beute, und wenn sie ihren Feind fliehen, in richtigem Sehen einen hohen Verstand. Dafs aber die Sonne 20 Millionen Meilen entfernt ist und 194000 Meilen Durchmesser hat, glauben viele, sonst ganz geschente Leute nicht, nnd es ist nicht zu verlangen, wenn sie nicht gelernt haben, wie man es, oder auch nnr, dafs man es wissen kann. Waren doch die jüdischen Propheten als Weissager des Messias die weisesten Männer ihres Zeitalters und hielten doch den Mond für ein gröfseres Licht, als alle Sterne zusammengenommen.

Jede biconvexe Linse, wie $DE$, hat nnn die Eigenschaft, dafs jeder Lichtstrahl, der anf den Mittelpunkt $C$ der Linse trifft, ungeändert seine geradlinige Richtnng durch das Glas fortsetzt, woher denn auch diese Linien Axen der Linse genannt werden, und zwar ist die normal auf den Durchmesser durch den Mittelpnnkt $C$ gerichtete Linie $Nc$ die Hanptaxe, alle übrigen dnrch $C$ gerichtete gerade Linien, wie $N''n''$, heifsen Nebenaxen der Linse $DE$.

Ein Kreis bei $N$ von dem wirklichen Durchmesser $DE$, also der sehr weit entlegene Punkt $N$ selbst wirft nun nach dem Objectiv $DE$ ganz dicht neben einander befindliche, mit der Hauptaxe $NC$ parallele Lichtstrahlen, nnd die Linse hat die Eigenschaft, dafs sie jeden dieser unendlich vielen Strahlen nach einem einzigen Punkt hin ablenkt, der hinter der Linse liegt und der der Mittelpunkt der Kugeloberfläche ist, nach welcher die dem Punkt $N$ zugekehrte Fläche, die Vorderfläche oder Anfsenfläche, der Linse gekrümmt ist und welcher der Brennpnnkt der Linse heifst. Ist $MF$ ein solcher, aus $N$ kommender, mit $NC$ paralleler Lichtstrahl und ist $c'$ der gedachte Brennpunkt, so setzt der Strahl $MF$ seine Richtung geradlinig nach $Fc'$ fort, und dies geschieht mit allen übrigen, aus $N$ kommenden, mit $Nc'$ parallelen Strahlen, so dafs der innere Raum $DEc'$ von einem Lichtstrahlenkegel ausgefüllt wird. Es entsteht mithin ein von unendlich vielen Strahlen vereinigt gebildetes und daher sehr correctes Bild von $N$ in dem Pnnkt $c'$.

Es ist klar, dafs anch der oberste Pnnkt $N'$ auf das Glas $DE$ eine unendliche Menge dicht neben einander befindlicher, mit $N''C$ paralleler Strahlen wirft, nnd die Linse $DE$ hat die Eigenschaft, dafs diese Strahlen alle wiederum nach nur einem hinter der Linse befindlichen Pnnkt geworfen werden. Dieser Pnnkt liegt in der durch den Brennpunkt $c'$ mit dem Kreisring $DE$ parallel gelegten Ebene $C'C''$, d. h. in der Brennweite des Glases, nnd zwar da, wo die Nebenaxe $N''n''$ diese Ebene schneidet, also in $n'$.

Ist $M'F$ ein solcher, aus $N'$ kommender, mit $N''C$ paralleler Strahl, so setzt dieser also seinen Weg geradlinig nach $Fn'$ fort; es gilt dies wieder von allen ans $N'$ auf das Glas geworfenen Strahlen, der innere Raum $DEn'$ wird von einem Lichtstrahlenkegel ausgefüllt, nnd in $n'$ entsteht ein von unendlich vielen Strahlen gebildetes und daher sehr correctes Bild von $N'$.

Alle übrigen, also innerhalb $NN'$ liegenden Punkte des Gegenstandes $NN'$ werfen Strahlen auf $DE$ unter Winkeln, die kleiner sind als $\angle N''CN$, jeder dieser Punkte wirft einen Strahl durch $C$, jeder dieser durch $C$ fallenden Strahlen ist eine Nebenaxe und geht ungebrochen fort, fällt also zwischen $c'$ und $n'$, und jedem dieser Strahlenpunkte in $c'n'$ correspondiren eine unendliche Menge von Strahlen

aus demselben Punkt von $NN'$, so dafs innerhalb $c'n'$ eine unendliche Menge von Punkten entsteht, die alle die Spitzen von Strahlenkegeln sind und von den einzeln ihnen zugehörigen, in $NN'$ liegenden Punkten ein correctes Bild liefern.

Demnach ist die Linie $c'n'$ ein äufserst correctes Luftbild von der wirklichen Linie $NN'$; man kann $DE$ als die Pupille und die Luftebene $C'C''$ als die Netzhaut eines Auges ansehen, in welcher die von $DE$ aufgenommenen und kreuzweise hindurch gehenden Lichtstrahlen als Bild von $NN'$ sich abspiegeln, und zwar eben so verkehrt und eben so grofs, als ein in $C$ befindliches wirkliches Auge den Gegenstand $NN'$ sieht. Denn wenngleich die Länge $c'C$ viel gröfser ist als der Abstand der Netzhaut von der Pupille unseres Auges, so ist oben nachgewiesen, dafs Gegenstände von 18 Zoll und von Milliarden Meilen gleich grofs gesehen werden, wenn das Sehen beider so ungeheuer verschiedenen Längen untereinerlei Winkel geschieht; $\angle N''CN = \angle n'Cc'$ ist aber derjenige $\angle$, unter welchem ein in $C$ befindliches Auge den Gegenstand $NN'$ sehen würde.

Fafst man nun, wie oben vorausgesetzt, $N$ als Mittelpunkt und $NN'$ als Halbmesser einer Kreisfläche (Mondfläche) auf, so gilt von dem senkrecht abwärts fallenden Halbmesser dasselbe, und dieser wird in der Ebene $C'C''$ senkrecht aufwärts abgespiegelt; ebenso der Halbmesser rechts von $N$ waagerecht in $C'C''$, links von $c'$ waagerecht u. s. w., kurz, es entsteht in der Ebene $C'C''$ ein Luftbild, dessen Punkte den correspondirenden wirklichen Punkten in $NN'$ diametral entgegengesetzt liegen, und zwar ohne Vergröfserung, und wie es auf der Netzhaut eines in $C$ befindlichen Auges sich abspiegelt.

Jetzt kommt es darauf an, dem Auge das verkehrte Luftbild $c'n'$ von $NN'$ dem Auge, und zwar vergröfsert zuzuführen, und dies geschieht, indem man ein zweites biconvexes Glas von stärkerer Krümmung, das Ocularglas $AB \mp$ mit $DE$, dessen Mittelpunkt $c$ in gerader Linie mit $c'C$ und so einsetzt, dafs der Punkt $c'$ zugleich der Mittelpunkt der Kugeloberfläche wird, nach welcher die dem Auge zugekehrte Fläche, die Aufsenfläche von $AB$ gekrümmt ist. Also bei dem astr. F. müssen Ocular und Objectiv einerlei Hauptaxe, einerlei Brennpunkt haben und in der Summe beider Brennweiten von einander abstehen.

Der Grund davon ist nach dem Vorherigen bald einzusehen:

So wie die mit der Hauptaxe $Cc'$ parallel auf die Aufsenfläche der Linse $DE$ fallenden Strahlen nach dem Brennpunkt $c'$ geworfen werden, so werden auch alle von dem Brennpunkt $c'$ auf die Innenfläche von $DE$ fallenden Strahlen aufserhalb parallel der Hauptaxe $c'C$ fortgeleitet, und da $c'$ zugleich der Brennpunkt der Linse $AB$ ist, so werden alle von $c'$ auf die Innenfläche von $AB$ fallenden Strahlen aufserhalb $AB$ und parallel der Hauptaxe $c'c$ sich fortsetzen, und ein hinter $AB$ befindliches Auge wird die aus $c'$ kommenden Strahlen in paralleler Richtung mit der Pupille auffangen.

Desgleichen wie die von Aufsen parallel $N''C$ auf $DE$ treffenden Strahlen nach dem Punkt $n'$ gelenkt werden, so müssen auch die aus dem Punkt $n'$ auf die Innenfläche von $DE$ fallenden Strahlen aufserhalb $DE$ parallel mit $CN''$ sich fortsetzen, und da $n'$ zugleich in der Brennweite der Linse $AB$ liegt, so wird der aus $n'$ auf $c$ fallende Strahl ungebrochen in der geradlinigen Richtung $cm$ nach Aufsen weiter gehen, und alle anderen von $n'$ auf die Innenfläche von $AB$ fallenden Strahlen, wie $nn''$, werden nach Aufsen in die mit $cm$ parallele Richtung, also $nn''$ nach $n''m'$ weiter gehen, und das hinter $AB$ befindliche Auge alle die mit $cm$ parallelen, aus dem Punkt $n'$ kommenden Strahlen mit der Pupille auffangen.

Ebenso erhält das hinter $AB$ befindliche Auge von allen übrigen Punkten des Luftbildes $c'n'$ parallele Strahlen, es sieht mithin nicht den wirklichen Gegenstand $NN'$, sondern nur dessen verkehrtes Luftbild $c'n'$; den Punkt $c'$ in der Richtung $m'c$, den Punkt $n'$ in der Richtung $m'n''$; also das Untere sieht man unten, ebenso das Obere oben, Rechts und Links sieht man rechts und links, man sieht das Luftbild wie es ist, man sieht also den beobachteten Gegenstand verkehrt.

Das unbewaffnete Auge sieht den Gegenstand $NN'$ unter dem $\angle N''CN$, das Auge hinter $AB$ würde also $NN'$ unter dem $\angle c'cn = \angle N''CN$ und den Punkt $N'$ in $n$ sehen. Dieser Punkt erscheint aber dem Auge in der Richtung $cn'$, es wird mithin die Linie von der natürlichen Länge $c'n$ in die gröfsere Länge $c'n$ aus einander gezogen, jeder andere Punkt von $NN'$ desgleichen in demselben Verhältnifs von $c'n : c'n'$, und es beträgt mithin die Vergröfserung von $NN'$ das $\frac{c'n'}{c'n}$ fache.

$c'n'$ und $c'n$ sind die Tangenten der

$\angle c'cn'$ und $c'cn$ bei dem gleichen Halbmesser $cc'$

$\angle c'cn$ ist $= \angle c'Cn'$, mithin
$\triangle c'cn \sim \triangle c'Cn'$
daher $c'n' : c'n = c'C : cc'$

mithin ist die Vergrößerung

$$\frac{c'n'}{c'n} = \frac{c\,C}{c'c}$$

d. h. die Vergrößerung des a. F. ist = dem Quotient der Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Oculars. Oder das a. F. vergrößert so viel mal, als die Brennweite des Oculars in der Brennweite des Objectivs enthalten ist.

Das a. F. hat denn auch die Bequemlichkeit, daſs man mit demselben Objectiv verschiedene Vergröſserungen hervorbringen kann, indem man Oculare von verschiedenen Brennweiten mit einander vertauscht, und diese mehr oder weniger tief hineinschraubt, um den Brennpunkt mit dem des Objectivs in einen Punkt zu vereinigen.

**Astronomischer Horizont**, wahrer Horizont (ὁρίζειν, begrenzen). Ist der um den Mittelpunkt (*C*) der Erde mit der waagerechten Ebene (*AM*) eines Orts (*O*) der Erdoberfläche parallel gedachte Kreis (*A'M'*) während der die waagerechte Ebene des Orts und die Himmelskugel uns sichtbar begrenzende Kreis (*AM*), der also für uns eigentlicher, wahrer Horizont, wahrer Gesichtskreis ist, der scheinbare Horizont genannt wird.

Fig. 92.




Die zu den gedachten Kreisen gehörenden Ebenen heiſsen: Ebene des astr. oder wahren H. (*A'M'*) und Ebene des scheinbaren H. (*AM*), und es müssen dieselben von allen Seiten bis in die Unendlichkeit erweitert und die diese Ebenen begrenzenden Kreislinien, die H. selbst, unendlich weit hinausgerückt oder mit einem Halbmesser von unendlicher Länge beschrieben gedacht werden.

Der Grund für die unterschiedenen Bezeichnungen: wahrer und scheinbarer H., ist der, daſs die Standpunkte aller Gestirne (wie *S*) gegen die Erde als Kugel auf deren Mittelpunkt (*C*) bezogen werden müssen, daſs aber alle Beobachtungen von Gestirnen, Messungen der von ihnen gebildeten Winkel von Punkten (wie *O*) aus geschehen, die von dem Normalpunkt, dem Erdmittelpunkt um den Halbmesser (*OC*) der Erde entfernt sind. Diese Winkel nun (wie $\angle AOS$), sowie die auf den Horizont (*AM*) der Sternwarte (*O*) bezogenen Linien und Ebenen sind aber solche, welche dem Astronom für die darauf zu gründenden Berechnungen die richtigen zu sein scheinen, und müssen erst auf den dem Ortshorizont (*AM*) parallelen richtigen, daher wahren oder astr. H. (*A'M'*) reducirt werden.

2. Diese Reduction ist aber nur erforderlich für Gestirne, die eine meſsbare Entfernung von der Erde haben, also für die Sonne und für die Planeten und Monde unseres Sonnensystems; für die Fixsterne von unermeſslicher Entfernung verschwindet der Unterschied von circa 860 Meilen, um welche der scheinbare von dem wahren H. entfernt ist ($\angle SOA = \angle SCA'$, $OC$ = Null), und beide fallen in eine und dieselbe Kreislinie und deren zugehörige Ebenen (*AM* und *A'M'*) in nur eine Ebene zusammen.

Der nächste der Gestirne ist uns der Mond und von der Erde circa 50000 Meilen entfernt. Stellt man sich diesen in dem wahren H. (*A'M'*) eines Orts (*O*) z. B. Berlins vor, so erhält man den $\angle OA'C$, um welchen er noch unter dem scheinbaren H. (*AM*) Berlins steht, aus $tg\, OA'C = \frac{860}{50000}$, woraus $\angle OA'C$ etwa 59 Minuten, und es ist bei dem Mond dieser Unterschied (die Horizontal-Parallaxe) nicht ganz unbedeutend. Die Sonne von circa 20 Millionen Meilen Entfernung von der Erde hat die Horizontal-Parallaxe aus $tg\, OA'C = \frac{860}{20000000}$ von nur 8,9 Secunden.

Jeder Ort der Erdoberfläche hat seinen wahren und seinen scheinbaren H., Orte, die sich diametral gegenüber liegen (*O*, *O'*), haben einerlei wahren H. (*A'M'*) und deren scheinbare H. sind parallel und um

den Erddurchmesser ($OO'$) von einander entfernt.

3. Alle Beobachtungen und Messungen beziehen sich unmittelbar auf den H. des Beobachtungsortes, und jeder Ort der Erdobarfläche mufs mit dem Erdmittelpunkt als in einem und demselben Punkt befindlich und mit demselben als Welt-Mittelpunkt gedacht werden (s. Aequator); der H. des Orts (wahrer und scheinbarer, jetzt einerlei) theilt demnach die Himmelskugel in 2 Hälften, der H. ist ein gröfster Kreis der Himmelskugel, alle von dem Auge $O$ des Beobachters auf die Himmelskugel gerichtete gerade Linien ($OS$) sind Halbmesser der Himmelskugel, jeder zwischen 2 Gestirnen ($S$, $s$) gemessene Winkel hat das Auge ($O$) des Beobachters zur Spitze und der zu diesem ∠ auf der Himmelskugel verzeichnete Bogen $Ss$ ist der Bogen eines gröfsten Kreises.

4. Das in einem Ort $O$ gefällte Loth, $ZN$, welches nach dem Mittelpunkt $C$ der Erde gerichtet ist, auf beiden Seiten bis in die unendlich ferne Himmelskugel gedacht, die Axe des H. heifst Scheitellinie, Verticallinie; von deren Endpunkten, den Polen des H. heifst der über dem H., also über dem Kopf des Beobachters belegene (Z) der Scheitelpunkt oder das Zenith, der unter dem Horizont befindliche ($N$) der Fufspunkt oder das Nadir.

Die durch beide Pole des H. gelegten Kreise (wie $ZSN$) heifsen Scheitelkreise, Verticalkreise. Die Scheitellinie $ZN$ ist deren gemeinschaftlicher Durchmesser; sie stehen auf dem H. ($AM$) lothrecht und werden von demselben gehälftet ($BZD$ und $BND$ sind Halbkreise).

Durch jedes am Himmel befindliche Gestirn (wie $S$) kann ein Scheitelkreis ($ZSB$) gelegt werden; der zu messende Bogen ($SZ$) vom Gestirn bis zum Zenith (Z) heifst dessen Abstand vom Scheitel oder dessen Zenithdistanz, der zu messende Bogen ($SB$) vom Gestirn bis zu dem Durchschnittspunkt ($B$) des Scheitelkreises mit dem H. heifst die Höhe des Gestirns.

5. Liegt $O$ in der nördlichen Halbkugel der Erde, so sei $P$ der Nordpol, $p$ der Südpol, senkrecht darauf durch $C$ ist also $Qq$ der Aequator. Die Punkte $P$, $p$, $Q$, $q$ liegen in der Himmelskugel, also unendlich weit von $C$, mithin kann wieder jedes $O$ für $C$ gelten, die Aequator-Ebene $Qq$ schneidet den H. jedes Ortes $O$ in $O$ selbst, und jeder Ort $O$ ist nicht nur Mittelpunkt seines H., sondern so wie Mittelpunkt der Himmelskugel auch Mittelpunkt des Welt-Aequators. Wenn $O$ in $Pp$ liegt, also für die Orte unter dem Nordpol und dem Südpol läuft der Erd-Aequator mit dem H. parallel, und der Himmels-Aequator macht mit dem H. einerlei Ebene aus.

Wie durch jedes Gestirn, so kann durch jeden Punkt der Himmelskugel ein Scheitelkreis gelegt werden, also auch durch die (nicht durch ein Gestirn sichtbar gemachten) Pole $P$, $p$. Da die Axe $Pp$ durch $C$ ($= O$) gerichtet ist, so haben beide Pole denselben Scheitelkreis, dieser steht wie auf dem H., so auch auf dem Aequator senkrecht und schneidet diesen in den beiden dem H. höchsten und tiefsten Punkten $Q$, $q$.

6. Da sämmtliche Gestirne ∓ dem Aequator $Qq$ sich kreisförmig zu bewegen scheinen, so haben dieselben ihre gröfste Höhe über dem H. und ihre gröfste Tiefe unter dem H., wenn sie in den zu den Polen $P$, $p$ gehörenden Scheitelkreis ($PZApNMP$) treten, wenn sie culminiren; die gröfste Höhe in dem Halbkreis $PQp$, die gröfste Tiefe in dem Halbkreis $Pqp$, und da die Sonne, wenn sie in $PQp$ culminirt, den Mittag des Orts $O$ angiebt, so heifst der zu den Polen $P$, $p$ gehörende Scheitelkreis des Orts der Mittagskreis, Meridian des Orts.

7. Die beiden Orte unter den beiden Polen haben keinen Meridian, oder vielmehr: jeder beliebige Scheitelkreis ist Meridian des unter $P$ oder $p$ befindlichen Orts, und zwar sowohl aus dem geometrischen Grunde, dafs jeder durch $O$ daselbst gelegte Scheitelkreis durch beide Pole liegt, als aus dem physikalischen, dafs die Sonne wirklich niemals oder, wenn man will, permanent culminirt:

Tritt die Sonne von unten in den Horizont, so bezeichnet sie diesen 24 Stunden lang mit ihrem Lauf, den folgenden Tag beschreibt sie einen etwas höher liegenden, dem H. parallelen Kreis und tritt fortdauernd in höhere dem H. parallele Kreise, bis sie in den Sommerpunkt der Ekliptik kommt, wo sie wieder auf dieselbe Weise bis in den H. herab geht und von nun ab unter dem H. ihre Kreisläufe fortsetzt.

Man verschafft sich ein genaues Bild von dem Aufsteigen der Sonne für den Ort unter dem Pol, wenn man sich um die Erdaxe auf dem H. als Basis einen Cylinder mit dem Halbmesser von circa 20 Millionen Meilen beschrieben denkt, von der Höhe, dafs die von dem Ort im H. nach einem höchsten Punkt des Mantels gezogene gerade Linie mit dem H. einen ∠ von circa $23\frac{1}{2}°$ bildet, und wenn

man den Mantel von unten bis oben mit 92 Schraubengängen versieht, in welchen die Sonne am 22. März aufsteigt, alle 24 Stunden einen Schraubengang zurücklegt und am 23. Juni den höchsten Punkt des Mantels erreicht. Das Herabsteigen der Sonne von diesem Zeitpunkt bis zum 23. September geschieht nach derselben Richtung auf dieselbe schraubenförmige Weise, weshalb man sich für die Bewegung der Sonne von oben nach unten die Schraubengänge des Cylindermantels von entgegengesetzter Windung zu denken hat.

8. Das Zenith Z theilt den über dem H. befindlichen Meridian in 2 Quadranten; der Durchschnittspunkt *A* desjenigen, in welchem der Pol *P* nicht liegt, heifst der Mittagspunkt, Südpunkt, der Punkt *M*, in welchem der Pol *P* liegt, der Mitternachtspunkt, Nordpunkt; der durch Z rechtwinklig auf den Meridian gezeichnete Scheitelkreis schneidet den H. rechts von dem Pol in dem Morgenpunkt, Ostpunkt, links von dem Pol in dem Abendpunkt (s. d.) Westpunkt; diese beiden Punkte, deren Projection *O* ist, sind zugleich die Durchschnittspunkte des Aequators mit dem H.

Der Bogen zwischen dem Culminationspunkt eines Gestirns und dem Mittagspunkt *A* des H. heifst die Mittagshöhe des Gestirns. Ist z. B. $SS' \# Qq$, so culminirt *S* in *S'* und Bogen $S'A$ ist die Mittagshöhe von *S*.

Eben so heifst Bogen $QA$ ($= QA'$) die Aequatorhöhe des Orts *O* und Bogen $PM$ ($= PM'$) die Polhöhe des Orts *O*. Der Bogen $QZ$ ist der Zenith-Abstand des Aequators und der Bogen $PZ$ der Zenith-Abstand des Pols, beide für den Ort *O*.

Zenith-Abstand und Höhe eines Gestirns oder eines Punkts in der Himmelskugel ergänzen sich zu 90°. $\angle PCM'$, die Polhöhe, ist $= \angle A'Cp$, weil beide Scheitel$\angle$ sind, $\angle QCA' + \angle A'Cp = 90°$, folglich ergänzen sich Polhöhe $PM$ und Aequatorhöhe $QA$ eines Orts *O* zu 90°.

Die Polhöhe $PM$ ist = dem Zenith-Abstand $QZ$ des Aequators, und die Aequatorhöhe $QA$ ist = dem Zenith-Abstand des Pols.

Der Bogen $QZ$, der Zenith-Abstand des Aequators, ist zugleich die geographische Breite von *O* und = dem Bogen $PM$, welcher die Polhöhe von *O* ist, mithin ist die Polhöhe eines Orts *O* der Erdoberfläche gleich dessen geographischer Breite.

Für Orte unter dem Pol, also wenn man *P* in Z und *Q* in *A* ($= A'$) gerückt denkt, ist die Aequatorhöhe = Null, die Polhöhe $= \angle ZOM = 90°$, der Zenith-Abstand des Aequators $= 90°$, der Zenith-Abstand des Pols = Null, die geogr. Breite $= 90°$.

Für Orte im Aequator ist die Aequatorhöhe $= 90°$, die Polhöhe = Null, der Zenith-Abstand des Aequators = Null, der des Pols $= 90°$, die geogr. Breite = Null.

Der Bogen $BA$ zwischen dem Durchschnittspunkt *B* des Scheitelkreises $ZSB$ eines Gestirns *S* mit dem H. und dem Mittagspunkt *A* heifst das Azimuth oder die Südweite des Gestirns *S* in Beziehung auf den H. des Orts *O*. Das Azimuth ist östlich oder westlich, es wird von dem Mittagspunkt *A* zu beiden Seiten bis zum Mitternachtspunkt von 0° bis 180° gezählt.

9. Niemand ist im Stande, eine horizontale Linie unmittelbar mit einem Instrument zu ziehen, zu zeichnen, oder deren Richtung einzustellen; nur mittelbar ist dies möglich und zwar mit Hülfe der lothrechten Linie, welche mittelst des Bleilothes unmittelbar angegeben wird, die in jedem Ort in Folge der Schwerkraft nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet ist und mit der Ebene des H. einen rechten Winkel bildet.

Eine Horizontallinie wird also dadurch bezeichnet, dafs ein Instrument zwei Linien oder Ebenen erhält, die von dem mechanischen Künstler äufserst genau unter einem rechten $\angle$ befindlich gearbeitet sind, dafs die eine Linie oder Ebene mit einem frei spielenden Bleiloth versehen ist und dafs man diese entweder durch mikrometrische Vorrichtungen für jedesmalige Beobachtung mit dem Loth in einerlei Linie bringt, oder diese lothrechte Richtung, einmal festgestellt, bleibend macht, wonach die zweite Linie oder Ebene unter 90° mit dem Loth die Horizontale bezeichnet.

Selbst die Libelle zum Nivelliren giebt nicht unmittelbar die dem Geometer erforderliche Horizontale an, sondern mittelst der richtig in den Nullpunkt einzustellenden Luftblasse die Verticale, sowie Maurer und Zimmermann Plinten und Balken mit Hülfe des Bleiloths der Setzwaage horizontal legen.

**Astronomisches Jahr**, im Gegensatz von bürgerlichem Jahr. Ist die genaue, in Tagen, Stunden, Minuten und Secunden ermittelte Zeit, in welcher ein Umlauf der Erde in der Ekliptik von einem in derselben festgestellten Punkt bis wieder zu demselben Punkt geschieht, während das bürgerliche Jahr oder Ka-

lenderjahr aus nur ganzen Tagen zu 24 Stunden besteht.

Die in der Ekliptik festgestellten Punkte sind entweder der Durchschnittspunkt des Breitenkreises eines bestimmten Fixsterns, welcher das siderische Jahr (sidus, Gestirn), das Sternjahr bestimmt, oder einer der vier Punkte, welche die Anfänge der Jahreszeiten bestimmen; dies sind die beiden Aequinoctialpunkte und die beiden Solstitialpunkte, von welchen der eine der ersteren, der Frühlingspunkt, gewählt ist, und welcher das tropische Jahr bestimmt. Dieser Name kommt von ἡ τροπή, die Wendung, indem die Solstitialpunkte auch Wendepunkte, Tropen genannt werden. Oder das Perihelium oder das Aphelium, welche das anomalistische Jahr bestimmen (s. d. und Anomalie).

Alle drei astr. Jahre sind unter einander verschieden: Fixsterne kann man als unveränderlich in ihren Standpunkten betrachten, die Erde beschreibt also während des siderischen Jahres genau 360°. Die Aequinoctialpunkte dagegen verändern sich jährlich um einen Bogen von 50,1 Sec. von Ost nach West; da nun die Erde von West nach Ost sich bewegt, so kommt der Frühlingspunkt jährlich um diese 50,1″ der Erde entgegen, und in dem tropischen Jahr beschreibt die Sonne nur einen Bogen $360° - 50,1'' = 359° 59' 9,9''$. Das tropische Jahr ist also in dem Verhältnifs beider Bogen kürzer als das siderische Jahr. Aphelium und Perihelium verändern jährlich ihre Lage um einen Bogen von 11,8 Sec. von West nach Ost; mithin hat die Sonne in dem anomalistischen Jahr einen Bogen zu durchlaufen von $360° + 11,8''$ und dieses anomalistische Jahr ist also das längste der astr. Jahre.

Das siderische Jahr kann unmittelbar durch Beobachtung zweier auf einander folgender Durchgänge der Sonne durch den Breitenkreis eines bestimmten Fixsterns gefunden werden. Es beträgt im Mittel 365 Tage 6 Stunden 9 Min. 11 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit genau einen vollen Kreis von 360°.

Bei dem scheinbaren Eintritt der Sonne in den Frühlingspunkt, also bei dem wirklichen Eintritt der Erde in den Herbstpunkt hat die Sonne die Abweichung $= 0$; dieser Eintritt ist durch unmittelbare Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne in einem Ort zu finden (s. Abweichung).

Der Frühlingspunkt nämlich liegt offenbar in irgend einem Meridian. Beobachtet man nun, dafs die Sonne in dem Augenblick, wo sie durch den Meridian geht, also in dem Augenblick des Mittags eine Mittagshöhe hat, die genau mit der bekannten Aequatorhöhe des Beobachtungsorts übereinstimmt, so gehört der Ort dem eben gedachten Meridian an, und der Frühlingspunkt liegt in dem beobachteten Standpunkt der Sonne. Findet man dagegen, dafs die Sonne in einem Mittage eine geringere, in dem folgenden Mittage eine gröfsere Höhe hat als die bekannte Aequatorhöhe des Orts, so ist die Sonne in der Zwischenzeit durch den Frühlingspunkt gegangen, und aus dem Unterschiede der beiden beobachteten Höhen kann man auf dieselbe Weise, wie in dem Art.: „Absiden" die Ermittelung der Absidenpunkte gezeigt worden, die genaue Zeit des Durchgangs der Sonne durch den Frühlingspunkt berechnen.

Das tropische Jahr beträgt im Mittel 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 51 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit im Mittel einen Bogen von $359° 59' 9,9''$.

Dieses tropische Jahr ist es, welches unsern Kalenderjahren zu Grunde liegt.

Das anomalistische Jahr wird durch Beobachtung zweier auf einander folgender Anomalien gefunden (s. Absiden). Es beträgt 365 Tage 6 Stunden 14 Min. 23 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit einen vollen Kreis von 360° + einem Bogen von 11,8 Secunden.

**Astronomische Jahrbücher** (Ephemeriden) sind für den Seemann das, was für andere Geschäftsmänner, besonders den Landmann, der bekannte Kalender ist. Sie enthalten im Voraus: berechnet für ein Jahr die zeitweisen Constellationen der Gestirne, die Sonnen- und Mondfinsternisse, die der Jupitertrabanten, die Lichtwechsel der Venus, Tabellen zur Berechnung der Zeit beim Auf- und Untergang der Sonne und des Mondes, für Verwandlung des Bogenmaafses in Zeitmaafs und dergleichen nützliche Angaben mehr. Sie werden auch wohl noch auf andere wichtige astronomische Nachrichten und Abhandlungen ausgedehnt und gehören sodann zur Literatur. Besonders zeichnen sich hierin die Berliner astr. J. aus, welche von Bode i. J. 1776 begonnen, von Enke fortgesetzt werden und äufserst werthvolle Aufsätze enthalten.

**Astronomische Jahreszeiten.** Werden bestimmt durch die Höhe der Sonne für einen Ort *O* auf der Erde.

Die für jeden Ort auf der Erde geltenden, also allgemeinen Bestimmungen derselben sind folgende: Der astronomische Winter fängt in dem Augenblick an, wo die Sonne in den vom Zenith

entferntesten Parallelkreis tritt, wo also die Sonne über *O* am niedrigsten steht, wo sie die kleinste Mittagshöhe hat.

Der astronomische Sommer fängt in dem Augenblick an, wo die Sonne in den vom Zenith nächsten Parallelkreis tritt, wo die Sonne also über *O* am höchsten steht, wo sie die gröfste Mittagshöhe hat.

Der astr. Frühling beginnt zugleich mit dem Ende des Winters, in dem Augenblick, wo die Sonne in den Parallelkreis tritt, der zwischen den eben genannten in der Mitte liegt, wo die Sonne also die mittlere Mittagshöhe hat, und der astr. Herbst beginnt zugleich mit dem Ende des Sommers, in dem Augenblick, wo die Sonne zum zweiten Mal in den Parallelkreis der mittleren Mittagshöhe tritt.

Hiernach ergeben sich die Jahreszeiten und deren Grenzen für folgende speciell benannten Orte und Ortsgegenden:

Am Nordpol fängt der Frühling an, sobald die Sonne aus der südlichen Halbkugel in den Aequator tritt, die Sonne erscheint im Horizont und es bricht der Morgen an. Der Herbst fängt an in dem Augenblick, wo die Sonne aus der nördlichen Halbkugel wieder in den Aequator tritt, die Sonne geht unter, die Nacht bricht an.

Der Sommer fängt an in dem Augenblick, wo die Sonne in den nördlichen Wendekreis tritt, mithin zwischen Frühlings- und Herbst-Anfang genau in der Mitte und zugleich zwischen dem Eintritt des Tages und dem der Nacht in der Mitte, also gerade zu Mittage, und der Winter fängt an, sowie die Sonne in den südlichen Wendekreis tritt, und gerade zu Mitternacht.

In der kalten Zone, den Pol selbst ausgenommen, und in der nördlichen gemäfsigten Zone sind die Anfangspunkte der Jahreszeiten wie beim Nordpol selbst, nur dafs hier nicht deren Eintritte genau im Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht sein können (Vorrückung der Nachtgleichen).

Auch für einen Ort in dem nördlichen Wendekreise ist noch die Reihenfolge wie in der gemäfsigten Zone: die gröfste Mittagshöhe findet einmal des Jahres statt, wo die Sonne im Zenith steht, die kleinste einmal, wenn sie im Wendekreis des Steinbocks steht, und die mittlere zwei Mal, wenn die Sonne den Aequator schneidet.

Also der Winter fängt an, wenn die Sonne in den südlichen Wendekreis tritt und dauert, bis sie aus der südlichen Halbkugel den Aequator schneidet; mit diesem Augenblick fängt der Frühling an und dauert bis zu dem Augenblick, wo die Sonne in den nördlichen Wendekreis, also in das Zenith von *O* tritt, wo auch der Sommer beginnt und bis zum Wieder-Eintritt der Sonne in den Aequator dauert. Mit diesem Augenblick beginnt der Herbst und dauert bis zum Eintritt der Sonne in den südlichen Wendekreis.

Für einen Ort im Aequator selbst ist zwei Mal im Jahr die gröfste Mittagshöhe, nämlich im Zenith, wenn die Sonne den Aequator schneidet, zwei Mal die kleinste, wenn die Sonne in die Wendekreise tritt, und vier Mal die mittlere Mittagshöhe, gerade in den Mitten zwischen dem Aequator und den beiden Wendekreisen. Daher sind hier alle astr. J. doppelt:

Der erste Winter fängt an, wenn die Sonne in den Wendekreis des Steinbocks tritt (22. December); er dauert, bis die Sonne die erste mittlere Mittagshöhe hat, wenn nämlich ihre südliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier fängt der erste Frühling an (18. Febr.) und er dauert, bis die Sonne im Aequator, also im Zenith des Orts die gröfste Mittagshöhe erreicht hat. Hier fängt der erste Sommer an (21. März) und er dauert, bis die Sonne zum zweiten Mal die mittlere Zenithdistanz erhält, indem ihre nördliche Abweichung die halbe Schiefe der Ekliptik erhält. Hier fängt der erste Herbst an (21. April) und er dauert, bis die Sonne in den Wendekreis des Krebses tritt. Hier fängt der zweite Winter an (22. Juni) und er dauert, bis die Sonne zum dritten Mal die halbe Zenithdistanz erhält, indem deren nördliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier beginnt der zweite Frühling (23. August) und dieser dauert, bis die Sonne zum zweiten Mal in den Aequator, also in das Zenith tritt. Hier beginnt der zweite Sommer (23 Spt.) und dieser dauert, bis die Sonne zum vierten Mal in die mittlere Zenithdistanz tritt, indem ihre südliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier beginnt der zweite Herbst (24. October) und dieser dauert bis zu Anfang des ersten Winters am 22. December.

Ist die nördliche Breite des Orts *O* $=\frac{1}{2}$ der Schiefe der Ekliptik ($e$), so hat die Sonne im Zenith zwei Mal ihre gröfste Mittagshöhe, im Wendekreis des Steinbocks *S* ihre kleinste Mittagshöhe, der Abstand beider ist $e+\frac{1}{2}e$, der mittlere Abstand in *M* also $=\frac{1}{2}(e+\frac{1}{2}e)=\frac{3}{4}e$ und

so viel beträgt auch der Abstand des Wendezirkels des Krebses *K*; in diesem ist ihre mittlere Mittagshöhe ein Mal, südlich vom Aequator *A* in *M* aber zwei Mal, im Ganzen also drei Mal, der Ort *O* hat also 1 Frühling, 2 Sommer, 2 Herbste und 1 Winter.

Fig. 93.



Es beginnt der Winter mit dem Eintritt der Sonne in *S*, der Frühling mit ihrem ersten Eintritt in *M*, der erste Sommer mit ihrem Eintritt in *O*, der erste Herbst mit ihrem Eintritt in *K*, der zweite Sommer mit ihrem zweiten Eintritt in *O*, der zweite Herbst mit ihrem zweiten Eintritt in *M* und hierauf wieder der Winter mit dem Eintritt der Sonne in *S*.

Für jeden Ort *O*, der näher an dem Aequator liegt als $\frac{1}{3}$ der Schiefe (*e*) der Ekliptik, hat die Sonne im Zenith (*O*) 2 Mal die gröfste Mittagshöhe, in *S* die kleinste, zwischen beiden 2 Mal die mittlere in *M*, und zwischen *O* und *K* noch zwei Mal dieselbe in *M'*.

Fig. 94.



Denn da $AO = b < \frac{e}{3}$

so ist $OS = e + b < \frac{4}{3} e$

mithin $OM = \frac{e+b}{2} < \frac{2}{3} e$

da nun $OK = e - b > \frac{2}{3} e$

so mufs es zwischen *O* und *K* einen Parallelkreis in *M'* geben, der von *O* um $\frac{e+b}{2} < \frac{2}{3} e$ absteht, und in welchem die Sonne dieselbe mittlere Höhe für *O* hat wie in *M*.

Daher hat der Ort *O* 1 Winter, 1 Frühling, 2 Sommer und 3 Herbste: Der Winter beginnt mit dem Eintritt der Sonne in *S*, der Frühling mit ihrem Eintritt ans *S* in *M* unter $\left(\frac{e-b}{2}\right)^\circ$ südlicher Br., der erste Sommer mit ihrem Eintritt in *O* unter $b^\circ$ nördlicher Breite, der erste Herbst mit dem Eintritt aus *O* in *M'* unter $\left(\frac{e+3b}{2}\right)^\circ$ nördlicher Breite, der zweite Herbst, wenn die Sonne von *M'* nach *K* gegangen, von dort zurück nach demselben *M'* gekommen ist und in *M'* wieder eintritt, der zweite Sommer beginnt mit dem Eintritt der Sonne aus *M* in *O*, der dritte Herbst mit dem Eintritt aus *O* in *M* und dauert bis zum Eintritt der Sonne aus *M* in *S*, wo der Winter wieder anfängt.

Für jeden Ort *O*, der näher am Aequator liegt als *e* und ferner als $\frac{1}{3} e$ hat die Sonne im Zenith *O* zwei Mal die gröfste Mittagshöhe, in *S* die kleinste, zwischen beiden, *O* und *S*, in der Mitte zwei Mal die mittlere, während in *K*, der nördlichen Grenze der Sonnenbahn, die Sonne eine Mittagshöhe hat, die zwischen der gröfsten und der mittleren befindlich ist; daher hat der Ort *O* 1 Winter, 1 Frühling, 2 Sommer und 1 Herbst.

Fig. 95.



Der Winter beginnt mit dem Eintritt der Sonne in *S*, der Frühling mit deren Eintritt aus *S* in *M* unter $\left(\frac{e-b}{2}\right)^\circ$ südlicher Br., der erste Sommer mit ihrem ersten Eintritt aus *M* in das Zenith von *O*, der zweite Sommer mit ihrem zweiten Eintritt von *O* nach *K* und von *K* zurück in das Zenith von *O*, der Herbst mit ihrem zweiten Eintritt aus *O* in *M* und dieser dauert bis zu dem Wieder-Eintritt der Sonne in *S*, wo der Winter wieder anfängt.

Für Orte der südlichen Halbkugel hat

man dieselben Verhältnisse, wenn man den Wendezirkel des Krebses *K* mit dem des Steinbocks *S* vertauscht.

**Astronomische Länge, Länge der Gestirne.** Ist der östliche Abstand der Gestirne vom Frühlingspunkt (s. Absiden und astronomisches Jahr), in Bogen von 0 bis 360° gemessen.

Von Gestirnen, die in der Ebene der Ekliptik selbst liegen, wird die Länge unmittelbar angegeben; von allen übrigen Gestirnen wird die Länge des Punkts gemessen, in welchem der kleinere Bogen des Breitenkreises, der Breitenbogen des Gestirns die Ekliptik berührt (s. astronomische Breite).

Man sagt in der Regel: A. L. eines Gestirns sei der Abstand desselben vom Frühlingspunkt, von Abend nach Morgen oder von Rechts nach Links gemessen; Beides ist zwar richtig, aber weniger präcis bezeichnet. Denn da die Erde in jedem Angenblick in der Ekliptik sich befindet, so kann man eben so gut aufserhalb wie innerhalb der Ekliptik sich stehend vorstellen; betrachtet man im ersten Fall Abend und Morgen, Rechts und Links für den dem Beschauer zunächst befindlichen elliptischen Halbkreis, so hat man die entgegengesetzte, also unrichtige Abmessung für die a. L., und zwar deren Ergänzung zu 360°. Man mufs sich bei der Bezeichnung von Abend nach Morgen oder von Rechts nach Links vorstellen, dafs man innerhalb der Ekliptik sich befindet, das Gesicht nach Mittag gerichtet und in die hohle Himmelshalbkugel gesehen; alsdann liegt Abend zur Rechten, Morgen zur Linken, die Messung geschieht von Rechts nach Links oder von Abend (über Mittag) nach Morgen. Eine richtige präcise Bezeichnung für a. L. ist daher auch, wenn man sagt, die L. wird vom Frühlingspunkt aus nach der Folge der Zeichen gemessen (s. absteigendes Zeichen).

Fixsterne haben eine unermefsliche Entfernung von der Erde und deshalb einen unveränderten Stand gegen die Erde, diese möge sich in irgend welchem Punkt der Ekliptik befinden, mithin auch denselben Standort gegen die in der Mitte der Ekliptik befindliche Sonne, und folglich auch deren Breitenbogen dieselbe Entfernung von dem Frühlingspunkt oder dieselbe Länge; die Sterne mögen von der Erde oder von der Sonne aus betrachtet werden, indem beide Beobachtungslinien nach demselben Stern mit einander ‡ laufen.

Die zu unserem Sonnensystem gehörenden Gestirne dagegen, die Planeten, Monde und Kometen haben mefsbare und daher von Erde und Sonne verschiedene Entfernungen, die Visirlinien von der Erde und von der Sonne aus nach einem solchen Gestirn gerichtet, bilden einen Winkel, und sie durchkreuzen sich in dem Gestirn, und deren Verlängerungen geben auf der unendlich fernen hohlen Himmelskugel verschiedene Punkte an.

Befindet sich das Gestirn in der Ebene der Ekliptik (im Knoten), so sind die beiden Punkte verschieden weit vom Frühlingspunkt entfernt, steht es aufserhalb der Ekliptik, so haben beide Punkte verschiedene Breitenkreise und diese sind von dem Frühlingspunkt verschieden entfernt.

Jedes zu unserem Sonnensystem gehörende Gestirn hat also zwei verschiedene Längen: die von der Erde aus beobachtete, die geocentrische Länge und die in dem Sonnenmittelpunkt beobachtet gedachte, die heliocentrische Länge (vergl. astronomische Breite). Die Erde befindet sich fortdauernd in der Ekliptik, sie hat also weder geocentrische, noch heliocentrische Breite, und ihre heliocentrische Länge ist zugleich ihre geocentrische; die Sonne in einem Brennpunkt der Ekliptik hat weder heliocentrische Länge, noch Breite, auch keine geocentrische Breite, wohl aber eine geocentrische Länge, nämlich die in irgend einem Angenblick von der Erde aus beobachtete Entfernung der Sonne von dem unendlich fern gedachten Frühlingspunkt in Bogenmaafs ausgedrückt.

**Astronomische Maschinen** s. u. Apparat.

**Astronomischer Meridian, Himmelsmeridian** s. u. astronomischer Horizont No. 6, 7 und 8. Der M. eines Orts theilt die hohle Himmelskugel in 2 gleiche Halbkugelflächen, in die östliche und in die westliche; erstere liegt, wenn man nach dem Mittagspunkt sieht, zur Linken, letztere zur Rechten. Man sagt astr. M. im Gegensatz zum Erdmeridian, unter welchem man jeden der Halbkreise versteht, die durch beide Erdpole auf der Erdoberfläche beschrieben werden können, so dafs jeder Ort der Erde seinen bestimmten Meridian hat, und in welchem die Sonne in dem Augenblick sich befindet, wenn für den Ort Mittag ist, weil man aus jedem Ort der Erdoberfläche durch beide Pole einen Halbkreis beschreiben kann.

**Astronomischer Monat**, im Gegensatz von bürgerlichem Monat, ist die genaue, in Tagen, Stunden, Minuten und Secunden ermittelte Zeit, in welcher ein Umlauf des Mondes in der Mondbahn von

einem in derselben festgestellten Punkt bis wieder zu demselben Punkt geschieht, während der bürgerliche Monat oder der Kalendermonat aus nur ganzen Tagen zu 24 Stunden besteht.

Fig. 96.



Je nachdem die Punkte in der Mondbahn angenommen werden, je nachdem hat man verschiedene astr. M. (vergl. astr. Jahr). Damit diese M. möglichst klar verstanden werden, sei Fig. 96 *AFPH* die Ekliptik, *S* die Sonne in deren Brennpunkt; *A* das Aphel, *P* das Perihel, *F* der Frühlingspunkt, *H* der Herbstpunkt (s. Absiden), *E* die Erde in einem beliebigen Punkt der Ekliptik, in welcher sie sich nach der Pfeilrichtung um die Sonne bewegt und dabei die nach dem zweiten Pfeil gerichtete Axendrehung macht; der um *E* punktirte Kreis sei die Bahn des Mondes um die Erde, der von dieser um die Sonne mit fortgeführt wird, der Mond *M* darin bewegt sich nach der Richtung des Pfeils, also mit der Axendrehung der Erde nach einerlei Richtung, ohne selbst weitere Rotationen um seine Axe zu machen. Die Mondbahn liegt mit der Ekliptik nicht in derselben Ebene, sondern schneidet dieselbe zu verschiedenen Zeiten unter verschiedenen Winkeln, die aber $5\frac{1}{3}°$ nicht übersteigen, so dafs der Mond der Ekliptik immer sehr nahe ist, und bei jedem Umlauf um die Erde dieselbe 2 Mal (in den beiden Knoten) durchschneidet.

2. Der eigentlichste astr. M. ist der siderische M. (sidus, Gestirn), nämlich diejenige Zeit, in welcher der Mond, von der Erde aus gesehen, wieder mit demselben Fixstern zusammentrifft, oder denselben Stand gegen ihn hat. Es befinde sich in einer Richtung *Es*, entweder genau in der Ebene der Mondbahn, oder sehr nahe derselben, ein Fixstern *s*, so wird dieser vom Monde bedeckt oder tangirt, wenn dieser den Stand *M* hat. Von diesem Zeitpunkt ab entfernt sich der Mond von dem Stern immer mehr östlich, und tritt erst wieder nach vollendetem Umlauf um die Erde in dieselbe den Stern bedeckende Lage; während dieser Zeit ist nun die Erde mit dem Monde in der Ekliptik um eine Länge *EE'* weiter gegangen und die zweite Bedeckung des Fixsterns geschieht, wenn der Mond in *M'* zwischen *E'* und *s* getreten ist. Da nun der Fixstern *s* von dem Sonnensystem unendlich weit entfernt ist, so ist die Richtung *E's* ⫲ der Richtung *Es*, und der Mond hat genau den vollen Kreis mit 360° beschrieben. Die Zeit, in welcher dies geschieht, ist bei den bedeutenden Ungleichheiten der Mondbewegung im Mittel 27 Tage 7 Std. 43 Min. 11 Sec.

3. Ein zweiter astr. M. ist der tropische M. (vergl. astr. Jahr), die Zeit, in welcher der Mond um die Erde läuft, wobei er vom Frühlingspunkt aus in denselben zurückkehrt. Hierbei ist Folgendes zu beachten. Die durch den Mittelpunkt *C* der Ekliptik gezeichnete gerade Linie *HF* bezeichnet in den Endpunkten *H* und *F* allerdings den Herbstpunkt und den Frühlingspunkt in der Ekliptik, da jedoch diese Punkte auf der unendlich fernen Himmelskugel verzeichnet werden, so mufs man die endliche, etwa 40 Millionen Meilen betragende Länge *HF* nach beiden Seiten hin in's Unendliche sich verlängert denken; dann liegen also *F* und *H*, von jedem Punkt der Ekliptik aus gesehen, ⫲ mit *HF*. Steht demnach die Erde in *e* und der Mond in *m*, so dafs *emf* ⫲ *HF*, so liegt der Mond, von der Erde aus gesehen, im Frühlingspunkt, und wenn die Erde während einer Umdrehung des Mondes um dieselbe nach *H* gerückt wäre, so würde *HF* die Richtung sein, in welcher *e* und *m* sich befinden, und der Mond würde, wie beim siderischen Monat, genau 360° beschrieben haben. Allein Frühlings- und Herbstpunkt bleiben nicht constant: die Linie *HF* ändert ihre Richtung in *H'F'* um einen $\angle FCF' = 50{,}24$ Sec. jährlich. Setzt man also das Jahr $365\frac{1}{4}$ Tag, den siderischen Monat $= 27\frac{1}{3}$ Tag, so hat man den $\angle FCF'$, um den der Punkt *F*

während eines Mondumlaufs sich ändert, $= \frac{27\frac{1}{3}}{365\frac{1}{4}} \times 50,24$ Sec. $= 3,75$ Sec. Hat also der Mond von *e* ans die Richtung *emf*, so hat er, nm wiederum in die Richtnng nach dem Frühlingspunkt zu kommen, die Richtung *emf* zu erhalten, also $360° - fef' = 360° - 3,75''$ zu beschreiben. Nun macht aber der Mond 360° in $27\frac{1}{3}$ Tagen, mithin $3,75''$ in $\frac{3,75''}{360°} \times 27\frac{1}{3}$ Tage $= 7$ Zeit-Secunden. Der tropische Monat beträgt also im Mittel 7 Sec. weniger als der siderische = 27 Tg. 7 Std. 43 Min. 4 Sec.

Beide astr. M., der siderische und der tropische, werden ihres geringen Unterschiedes wegen mit dem gemeinschaftlichen Namen periodischer M. bezeichnet.

4. Ein dritter astr. M. ist der Knoten- oder Drachen-Monat, die Zeit, in welcher der Mond aus einem Knoten in denselben zurückkehrt, und zwar von absteigendem zu absteigendem, oder von auf- zu aufsteigendem Knoten. Dieser M. ist wieder kürzer als die periodischen M., weil die Knoten eine rückgängige Bewegnng machen, welche in einem Jahr von $365\frac{1}{4}$ Tag $= 19° 19'$ in der Mondbahn, also in einem Monat von $27\frac{1}{3}$ Tag $\frac{27\frac{1}{3}}{365\frac{1}{4}} \times 19° 19' = 1° 26' 44''$ beträgt, mit welchen der Knoten dem Monde entgegenkommt. Da nun der Mond in $27\frac{1}{3}$ Tag 360° zurücklegt, so entspricht jenem Winkel eine Zeit von $\frac{1° 26' 44''}{360°} \times 27\frac{1}{3}$ Tag $=$ 2 Std. 38 Min. 3 Sec.; diese von dem siderischen M. abgezogen, giebt den Knoten-M. = 27 Tg. 5 Std. 5 Min. 8 Sec.

Der Name Drachenmonat stammt aus der ältesten Zeit der Mythe, indem diese den Mond als Göttin Luna sich dachte, und die Mondfinsternisse, die nur in dem Knoten entstehen können, als Folgen des Kampfes der Luna mit einem Drachen ansahen, woher der aufsteigende Knoten Drachenkopf, der absteigende Drachenschwanz genannt wurde.

5. Ein vierter astr. M. ist der anomalistische M. (s. d.)

6. Der fünfte astr. M. ist derjenige, welcher unseren bürgerlichen Verhältnissen am entsprechendsten ist, nämlich der von einem Eintritt einer bestimmten Mondphase bis zu dem Wieder-Eintritt in dieselbe, als den Neumond oder den Vollmond, und der wegen gleicher Zusammenkunft (Synode) von Sonne, Erde und Mond der synodische M. genannt wird.

Fig. 96 zeigt den Mond *M* mit der Erde und der Sonne in gerader Linie, so dafs der nicht erleuchteten Erdhälfte die erleuchtete Mondhälfte zugekehrt, also Vollmond ist. Bewegt sich nun der Mond, bis er wieder in denselben Punkt *M*, also in *M'* tritt, so ist noch nicht der zweite Vollmond eingetreten, der Mond mufs noch den Bogen *M E' M''* = Bogen *MSM'* zurücklegen, also den Bogen, um welchen während seiner vollständigen Bewegung die Erde in der Ekliptik fortgeschritten ist. Die Erde durchläuft 360° in $365\frac{1}{4}$ Tag, der Mond 360° in $27\frac{1}{3}$ Tag; die Winkel-Geschwindigkeiten beider Körper haben das umgekehrte Verhältnifs mit den Geschwindigkeiten für den ganzen Umfang, die Winkel-Geschwindigkeit der Erde zu der des Mondes ist also $= 27\frac{1}{3} : 365\frac{1}{4}$. Bezeichnet man den $\angle M'E'M''$ $= \angle ESE'$ mit *y*, so beschreibt der Mond den $\angle 360° + y$, während die Erde den $\angle y$ beschreibt, mithin hat man:

$$365\frac{1}{4} : 27\frac{1}{3} = 360 + y : y$$

woraus

$$365\frac{1}{4} - 27\frac{1}{3} : 27\frac{1}{3} = 360° : y$$

und $y = 29° 7' 10\frac{1}{4}''$

Dividirt man diesen Bogen mit 360° und multiplicirt mit $365\frac{1}{4}$ Tag, oder dividirt man diesen Bogen + 360° durch 360° und multiplicirt mit $27\frac{1}{3}$, so erhält man die Dauer *x* des synodischen Monats = 29 Tg. 13 Std. 3 Min. 45 Sec.

Diesen M. $= x$, erhält man auch ohne vorherige Ermittelung des Bogens *y* aus der Proportion:

$$365\frac{1}{4} - 27\frac{1}{3} : 27\frac{1}{3} = 365\frac{1}{4} : x$$

weil

$$365\frac{1}{4} : 27\frac{1}{3} = 365\frac{1}{4} + x : x$$

indem das letzte Verhältnifs $360° + y : y$ in obiger Proportion aus 2 Bogen besteht, und diese wie die Zeiten $365\frac{1}{4} + x$ Tage : *x* Tagen, in welchen sie mit einerlei Winkel-Geschwindigkeit zurückgelegt worden, sich verhalten.

7. Endlich hat man den sechsten astr. M., den Sonnen-Monat, der zwölfte Theil des Sonnenjahres $= \frac{1}{12} \cdot 365\frac{1}{4}$ Tag $= 30$ Tg. $10\frac{1}{2}$ Std.

Wegen der grofsen Ungleichheiten, mit welchen der Mond um die Erde sich bewegt, sind alle astr. M. nur Mittelwerthe. Legt man die Beobachtungen zu Grunde, welche von einer grofsen Anzahl von Mondfinsternissen gemacht worden sind, indem das Mittel an Zeit zwischen Anfang und Ende jeder Finsternifs offenbar der Moment ist, in welchem der wirkliche Vollmond eben stattfindet, so erhält man den synodischen M. im Maximo 29 Tg. 19 Std., im Minimo 29 Tg. $6\frac{1}{2}$ Std., woraus das Mittel 29 Tg. 12 Std. 45 Min. für den synodischen M. hervorgeht.

Setzt man übrigens, um genauer zu rechnen, in das zweite Glied der beiden letzten Proportionen statt 27⅓ Tg. die wirkliche Zeit 27 Tg. 7 Std. 44 Min., so erhält man für den Bogen *y* den Werth 29° 6' 24,5" und für den synodischen M. $x = 29$ Tg. 12 Std. 45 Min., wie der eben gedachte Mittelwerth beträgt.

**Astronomisches Ocular.** Das Ocular am astr. Fernrohr, eine biconvexe Linse, während das Galilel'sche O. ein biconcaves ist (s. astr. Fernrohr zu Anfange).

**Astronomischer Ort.** Der Ort, in welchem am Himmelsgewölbe ein Weltkörper sich befindet. Der a. O. wird auf zweierlei Art bezeichnet: Erstens, in Beziehung auf die Lage der Ekliptik durch Breite: der zwischen dem Ort und der Ekliptik senkrecht auf dieser befindliche Bogen des gröfsten Kreises, und Länge: der östliche Abstand jenes Breitenkreises, von dem Frühlingspunkt in dem Bogen der Ekliptik gemessen. Zweitens, in Beziehung auf den Welt-Aequator durch Abweichung: der zwischen dem Ort und dem Aequator senkrecht auf diesem befindliche Bogen des gröfsten Kreises, und gerade Aufsteigung: der östliche Abstand jenes Abweichungskreises, von dem Frühlingspunkt in dem Bogen des Aequators gemessen.

**Astronomischer Quadrant.** Ein in Grade und deren Theile eingetheilter, später noch mit einem Nonius versehener Viertelkreis (Quadrant), der früher auf den Sternwarten als Winkelmefs-Instrument üblich war. Der eine Halbmesser wurde senkrecht gestellt, so dafs der andere waagerecht lag; um den Mittelpunkt drehbar waren Dioptern oder ein Fernrohr befestigt, die Ebene des Q. befand sich in der Mittagsebene, so dafs die Culmination der Sterne und deren Höhen und Zenith-Abstände gemessen werden konnten. Dieser Q. ist feststehend (Mauer-Quadrant). Ein beweglicher Q., der um seinen lothrechten Schenkel oder Halbmesser sich dreht, mifst auch die Höhen und Zenith-Abstände der aufserhalb des Meridians befindlichen Gestirne, und ist deshalb mit einem festliegenden horizontalen Kreis versehen (vergl. Aequatoreal), auf welchem das zu der Höhe gehörende Azimuth (die Entfernung des Sterns vom Meridian, dessen Südweite) abgelesen werden kann. Der a. Q. ist nicht mehr gebräuchlich und durch bessere Instrumante ersetzt.

Was die Quadranten besonders weniger zuverlässig macht, ist die ungleichmäfsige Veränderung des Metalls bei Temperaturwechseln wegen deren Form, und die vollen Kreise sind zuverlässiger, weil jene Ausdehnungen und Zusammenziehungen des Metalls bei geschlossenen Formen gleichförmig geschehen.

**Astronomische Rechnungen.** Die Rechnungen, mit welchen aus den beobachteten verschiedenen Orten eines Gestirns und dem zwischen beiden stattgefundenen Zeit-Unterschied, dessen Ort zu einem künftigen Zeit-Augenblick vorher genau bestimmt wird, so wie für die zu unserem Sonnensystem gehörenden Weltkörper Gröfse, Dichtigkeit, Rotation, Bahn u. s. w.

Diese R. beruhen auf der von Newton aufgestellten und überall streng bewährten Hypothese über die Natur der Attraction und werden mit Hülfe der Lehren der sphärischen Geometrie ausgeführt.

**Astronomische Refraction, Strahlenbrechung,** ist der ∠, um den ein Gestirn vermöge der Brechung des Lichtstrahls innerhalb des Luftgebiets höher zu stehen scheint, als es wirklich steht.

Fig. 97.



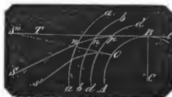
Kommt ein Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres, z. B. aus Luft in Wasser, so wird der Strahl nach dem Einfallslothe hin gebrochen. Ist *Ff* ein dichterer Körper als Luft, z. B. Glas, ist *Ll* das Einfallsloth, so wird der Lichtstrahl *AB*, statt in seiner Verlängerung *BE* weiter fortzugehen, nach *BC* gebrochen, und von *C* aus wieder in die Luft tretend, nimmt er die Richtung $CD \mp AB$ wieder an. Ein Auge in *D* empfängt den Strahl *ABC* aus *C*, und da es nur den Ort des Gegenstandes nach gerader Richtung beurtheilen kann, so versetzt es den Gegenstand *A* in *G*, ein Auge in *C* versetzt *A* nach *H*.

Der Lichtstrahl der Gestirne kommt aus luftleerem Raume, trifft durch dünne, aber immer dichter werdende Luftschichten die Erdoberfläche und wird somit curvenförmig abgelenkt.

Es sei *AOB* die Erdoberfläche, *Tt* die Tangente in *B*, so sollte ein Gestirn für

*B* erst aufgehen, wenn es in die Richtung *Tt* getreten wäre, allein es wird schon in *B* sichtbar, wenn es unterhalb *T*, z. B. in *S* erst steht. Den Luftkreis nämlich

Fig. 98.




kann man sich aus einer sehr grofsen Menge niedriger Luftschichten vorstellen, von denen jede der Erde näher liegende etwas dichter als die darüber befindliche ist. Der ganze Luftkreis in 3 Schichten gedacht, von welchen jede die mittlere Dichtigkeit der darin begriffenen Schichten in *aa*, *bb*, *dd* besitzt, giebt für den Lichtstrahl *Sm* die Ablenkungen *mn*, *np*, *pB*, und da man aus allen um uns befindlichen Gegenständen gewohnt ist, den Lichtstrahl nur in gerader Linie zu empfangen, so glaubt man auch, dafs das Gestirn *S* in der Richtung *tT* sich befinde und es scheint in der Richtung *Tt* aufzugehen. Ebenso wird ein Beobachter in *O* einen Circumpolarstern in seinem niedrigsten Stande *s* viel höher, etwa in *S'* stehend annehmen.

Sterne, die im Zenith stehen, erfahren keine Strahlenbrechung, weil der Lichtstrahl mit dem Einfallsloth zusammentrifft, die Brechung wird um so stärker, je näher der Stern dem Horizont steht, wo die Brechung am stärksten ist. Die Beobachtung eines Sterns ist demnach am sichersten, wenn derselbe culminirt.

Tritt ein Stern in das Zenith eines Ortes oder in die Nähe desselben bei seiner Culmination, so findet man dessen Abweichung, und hiernach vermittelst der sphärischen Trigonometrie seinen wahren Stand zu bestimmten Zeitabständen von der Zeit der Culmination. Beobachtet man nun in den Zeitpunkten den Stern, so findet man ihn höher stehend, und die Differenz zwischen der berechneten wahren Höhe und der gefundenen ist die Gröfse der astronomischen Strahlenbrechung für die bekannte scheinbare Höhe.

Mittelst einer Reihe äufserst sorgfältiger Beobachtungen an vielen Orten hat man tabellarisch die Gröfse der Strahlenbrechung für gegebene scheinbare Sternhöhen. La Place giebt dieselben an:

Scheinbarer Abstand vom Scheitel

| | | |
|---|---|---|
| 10° | Refraction | 10,3" |
| 20° | " | 21,2" |
| 30° | " | 33,4" |
| 40° | " | 48,9" |
| 45° | " | 58,2" |
| 50° | " | 1' 9,3" |
| 60° | " | 1' 40,6" |
| 70° | " | 2 38,8" |
| 80° | " | 5' 19,8" |
| 85° | " | 9' 54,3" |
| 87° | " | 14 28,1" |
| 90° | " | 33' 46,3" |

Ein Stern, der eben untergehen will, beschreibt also noch einen sichtbaren Bogen von 33' 46,3", und wenn er den Horizont senkrecht durchschneidet, so ist er noch $\frac{33' 46,3''}{360°} \times 24$ Stunden = 2 Min. 15,085 Sec. über dem Horizont zu sehen.

**Astronomischer Ring.** Die viel zu wichtige Bezeichnung der ehemals sehr gebräuchlichen Taschen-Sonnenuhr in Form eines Ringes, daher auch Sonnenring genannt, durch eine Oese an einem kleinen Haken beweglich befestigt, mit welchem man den Ring gegen die Sonne hangen liefs. Durch eine kleine Oeffnung schien die Sonne in's Innere des Ringes und gab mit ihrem Lichtpunkt die dort mit Linien und Zahlen bezeichneten Tagesstunden an. Die Oeffnung befand sich in einem kreisförmigen Plättchen und konnte mit diesem nach dem für jeden Monat des Jahres auf der Aufsenfläche bezeichneten Theilstrich verschoben werden.

**Astronomische Strahlenbrechung** s. v. w. astr. Refraction.

**Astronomische Tafeln** sind Hülfstabellen zum Gebrauch für astronomische Beobachtungen und Berechnungen. Die ersten, vollständigsten und ausführlichsten sind diejenigen, welche die Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1776 in 3 Bänden herausgegeben hat.

Diese Tafeln enthalten die Vorstellung des Sonnensystems, nämlich das Verzeichnifs für alle Planeten, deren gröfste, mittlere und kleinste Entfernung von der Sonne, in Halbmessern der Erdbahn ausgedrückt, deren Gleichungen des Mittelpunkts, deren Bahn-Neigung gegen die Ekliptik, deren wahren Abstände von der Sonne, deren Sternjahre, tropischen und synodischen Jahre, deren Zeit der Umwälzung, deren Dichtigkeit und Masse u. s. w.

Die Vorstellnng des Mondlaufs, das Verzeichnifs der Oerter auf der Erde und deren geographische Länge und Breite. Zeitrechnnngen für die gebräuchlichsten Kalender. Das Verzeichnifs der Fixsterne, deren Länge und Breite n. s. w.

Tafeln zur Berechnung der wahren Länge der Sonne, deren scheinbare Halbmesser an bestimmten Tagen, deren Zeitgleichnng, Abweichung, Axen-Neignng.

Tafeln zur Berechnung der wahren Länge, Breite, der Parallaxe, des scheinbaren Durchmessers, der stündlichen Bewegung des Mondes, nnd für die Lagen des Mond-Aequators für die Zeit der Neu- nnd Vollmonde.

Tafeln für die Bewegung der einzelnen Planeten, deren beobachtete Gegenscheine und Zusammenkünfte mit der Sonne.

Pertnrbations-Tafeln für den Saturn und den Jnpiter, für die Bewegnng der Knotenlinien und Bahn-Veränderungen der Planeten vermöge ihrer wechselseitigen Einwirknng.

Tafeln zur Berechnnng der Bahn der Kometen.

Hülfstafeln znr Berechnnng der Nutation der Erd-Axe, der Abirrung des Lichtes, der abgeplatteten Form der Erde; Tafeln für die Gradlängen in verschiedenen Meridianen verschiedener Oerter, für die Längen des Secnndenpendels; Tafeln für die Sinus, durch Bogen von gleicher Länge ausgedrückt, der Positionswinkel für die acht ersten Grade der Breite und alle Grade der Länge, zum Gebrauch für Mond nnd Planeten.

Tafel für die mittlere astronomische Strahlenbrechung bei 0° bis 90° Höhe und mit Rücksicht auf die verschiedene Dichtigkeit der Luft.

Tafel für die halben Tagebogen (nnd Weiten in Ost nnd West) bei gegebener südlicher und nördlicher Abweichung der Gestirne nnd deren Breiten nnd Polhöhen.

Tafel für die Lichtgestalten des Mondes nnd der Venus, nnd endlich

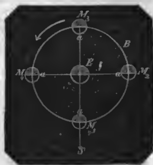
Längen der Kreisbogen, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt.

Anweisnugen zum Gebranch dieser Tafeln befinden sich in den astronomischen Jahrbüchern derselben Akademie vom Jahr 1776.

**Astronomischer Tag.** Unterscheidet sich von bürgerlichem Tag, indem jener mit dem Augenblick beginnt, wo die Sonne durch den oberen Meridian des Ortes geht, also um 12 Uhr Mittags, und dafs dessen Stnnden von 1 bis 24 fortgezählt werden, während der bürgerliche Tag anfängt, wenn die Sonne durch den unteren Meridian des Ortes geht, also nm 12 Uhr Mitternacht, nnd dafs dessen Stnnden in 2 halben Tagen von 1 bis 12 fortgezählt werden. Der astr. T. fängt übrigens mit dem bürg. T. desselben Datnms 12 Stnnden später an; bürgerliche Zeit wird also in astronomische Zeit verwandelt, indem man die Nachmittagsstunden, welche übereinstimmen, beibehält, zu den Vormittagsstnnden aber 12 Stunden hinzuzählt nnd einen ganzen Tag zurückrechnet. Der erste Jannar 1856 Nachm. 3 Uhr war astronomisch der erste Januar 1856, 3 Uhr, derselbe Tag Vorm. 10 Uhr war astronomisch der 31. December 1855, 22 Uhr.

**Astronomischer Tag des Mondes.** Bedeutet $E$ die Erde, $B$ nach der Richtnng des Pfeiles die Mondbahn, $S$ die Richtnng der Sonne, so hat man während des Umlaufes des Mondes nm die Erde, wie schon erwähnt, keine Axendrehnng; die

Fig. 99.




mit $a$ bezeichneten Punkte haben in allen vier gezeichneten Stellungen des Mondes die angegebenen Lagen. In $M_1$ hat $a$ Mitternacht, in $M_2$ Sonnen-Aufgang, in $M_3$ Mittag, in $M_4$ Sonnen-Untergang und in $M_1$ wieder Mitternacht. Der astr. T. des Mondes (auf der Erde circa 24 Std.) ist demnach gleich dem synodischen Monat desselben, nämlich der Zeit von einer Conjnnction desselben mit der Sonne bis zur nächstfolgenden (s. astr. Monat, der 5te) = 29 Tg. 13 Std. 3 Min. 45 Sec. Erdzeit, nnd eben so lange währt eine vollständige scheinbare Umdrehung sämmtlicher Gestirne um den Mond.

**Astronomische Vergröfserung.** Die V., in welcher die durch ein Fernrohr gesehenen Gestirne gegen den Anblick mit

unbewaffnetem Auge erscheinen. Bei der so sehr großen Ferne der Gestirne bleibt deren scheinbare Größe dieselbe, sie ändert sich aber in so vielfacher Annäherung und Schärfe des Bildes (s. astr. Fernrohr.)

**Astronomische Zeichen** sind die bekannten Kalenderzeichen. Außer den im Art. „Absteigendes Zeichen" angegebenen hat man noch die für die Sonne, die Mondphasen, für sämmtliche größere Planeten, für Gegenschein, Zusammenkunft, Geviertschein und Knoten.

**Asymmetrisch** (α, Verneinung, συν, zusammen, μετρειν, messen). Bei den alten Analysten s. v. w. incommensurabel oder irrational, wie z. B. die Seite und die Diagonale eines Quadrats (1 und $\sqrt{2}$), der Durchmesser und die Peripherie eines Kreises (1 und $\pi$) sind a.

**Asymptote** (α, Verneinung, συν, zusammen, πιπτειν, fallen). Eine Linie, in der Regel eine gerade, welche einer krummen Linie immer näher kommt, ohne sie jemals zu erreichen, oder ohne mit ihr zusammenzufallen; man kann daher auch eine A. definiren als eine gerade Linie, welche eine krumme Linie in einem unendlich weit entfernten Punkt tangirt.

Fig. 100.




Es sei $FB$ eine Tangente an der Curve $ABE$ für den Punkt $B$, $AD$ sei die Axe der Abscissen $x$, $x'$ ...., $A$ deren Anfangspunkt, die zugehörigen Ordinaten seien $y$, $y'$ ...., so ist $FD$ die Subtangente zu $x$ und $y$. Es sei $GH$ eine A., so soll diese die Curve erst in einem $\infty$ fernen Punkt als Tangente berühren. Es ist mithin die dazu gehörige Abscisse von $A$ aus $\infty$, es ist also für die Zulässigkeit einer A. nothwendig, daß die Curve eine unendliche Abscisse zuläßt. Aber auch die Subtangente von $G$ aus ist $\infty$, allein die Differenz beider, Subtangente − Abscisse $= GA$, ist eine endliche Größe, und diese ist die zweite Bedingung, unter welcher eine A. zulässig ist.

Um daher eine A. zu bestimmen, ist erforderlich, eine Subtangente ($T$) durch die Coordinaten auszudrücken, und dies geschieht (ohne Hülfe der Differenzialrechnung) folgender Art: Es sei $ID = DK = d$, also $AI\,(x') = x - d$ und $AK\,(x'') = x + d$

Nun ist $FI : FD : FK = IL : DB : KM$ oder $T - d : T : T + d = y' + NL : y : y'' + EM$

Hieraus ist

$$\frac{T-d}{T} > \frac{y'}{y}$$

$$\frac{T+d}{T} > \frac{y''}{y}$$

Dies aus der Natur der Tangente von selbst hervorgehende Resultat bietet aber ein Mittel für die Construction der Tangente; denn je kleiner $d$ genommen wird, desto mehr verschwindet sowohl rechts als links von $y$ die Ungleichheit, und mit $d = 0$ ist vollkommene Gleichheit vorhanden.

1. Beispiel. Die Gleichung für die Parabel ist

$$y^2 = p \cdot x$$

Man ersieht, daß $x$ einen unendlichen Werth annehmen kann, daß also in dieser Beziehung eine A. möglich ist, und es ist daher die Subtangente zu bestimmen.

Nun ist $\frac{T \mp d}{T} > \frac{y_1}{y}$

daher $\left(\frac{T \mp d}{T}\right)^2 > \frac{p(x \mp d)}{px}$

die Nenner fortgeschafft und gehoben, giebt

$$\pm 2Tx + dx > \mp T^2$$

Hierin $d = 0$ gesetzt, giebt

$$2Tx = T^2$$

woraus $T = 2x$

Nun ist Subtang. − Abscisse $= 2x - x = x$, mithin für $x = \infty$ hat diese Differenz ebenfalls einen unendlichen Werth, und eine A. ist nicht möglich.

2. Beispiel. Die Gleichung für die Ellipse ist

$$y^2 = ax - bx^2$$

Schreibt man dafür

$$y^2 = b \cdot x\left(\frac{a}{b} - x\right)$$

so ersieht man, daß, so lange $x < \frac{a}{b}$ ist, $y^2$ einen positiven Werth behält, daß für $x = \frac{a}{b}$, $y^2 = 0$ wird, daß mit dem ferneren Wachsthum von $x$ die Klammergröße negativ wird, daß, da $y^2$ als Quadrat negativ nicht existiren kann, $x = \infty$, oder eine unendliche Abscisse nicht möglich ist, und daß daher auch die Subtangente nicht ermittelt werden darf.

3. Baispiel. Die Gleichnng für die Hyperbel ist

$$y^2 = ax + bx^2 = bx\left(\frac{a}{b} + x\right)$$

welche eine unendliche Abscisse $x$ zuläſst.

Znr Auffindung der Snbtangente hat man

$$\left(\frac{T+d}{T}\right)^2 > \frac{a(x+d) + b(x+d)^2}{ax+bx^2}$$

die Nenner fortgeschafft nnd gehoben, giebt

$$(2T+d)(ax+bx^2) > (a+bd+2bx)T^2$$

Hierin $d=0$ gesetzt, giebt

$$2(ax+bx^2)T = (a+2bx)T^2$$

woraus $T = 2 \cdot \frac{ax+bx^2}{a+2bx}$

Es ist mithin allgemeiu Subtang. – Abscisse

$$= 2 \cdot \frac{ax+bx^2}{a+2bx} - x = \frac{ax}{a+2bx} = \frac{a}{\frac{a}{x} + 2b}$$

für $x = \infty$ wird $\frac{a}{x} = 0$, mithin die Differenz $= \frac{a}{2b}$

Da nnn $y^2 = ax + bx^2$, so ist $b$ eine abstracte Zahl in dem gegebenen Werthe von $\frac{1}{n}$ bis $n$. Es sei für beispielsweise erforderliche Construction der A., der Einfachheit wegen $b = 1$, $a$ ebenfalls als Länge $AB$ gegebeu, so erhält man für jedes beliebige $x$, z. B. $BD$, eineu Punkt der

Fig. 101.

Hyperbel für den Scheitel $B$, wenn man über $AD$ einen Halbkreis zeichnet, das Loth $BF$ errichtet und aus $D$ den Bogen $FE$ bis in die Lothrechte $DE$ beschreibt.

Deun $y^2 = ax + x^2 = x(a+x)$

Nun ist $BD = x$, $AD = a + x$, mithin $FD^2 = x(a+x)$

Snbtg. – Abscisse ist $= \frac{a}{2} = GB$, nnd $G$ ist der Anfaugspunkt der A; nur ist der Winkel uoch nicht bekannt, unter welchem sie gezogen werden muſs. Es ist aber für jedes $x$

Subtg. $\times \, tg\, \alpha = y$

also $2 \cdot \frac{ax+bx^2}{a+2bx} \, tg\, \alpha = \sqrt{ax+bx^2}$

$$\text{woraus } tg\, \alpha = \frac{a+2bx}{2\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{\frac{a}{x} + 2b}{2\sqrt{\frac{a}{x} + b}}$$

für $x = \infty$ wird $\frac{a}{x} = 0$

mithin $tg\, \alpha = \frac{2b}{2\sqrt{b}} = \sqrt{b}$

in vorliegendem Fall ist $b = 1$

mithin $tg\, \alpha = 1$

und $\alpha = 45°$

**Atmosphäre.** Der die Erde nmgebende Luftkreis, war nicht von Anfang an von der heutigen Beschaffenheit. Die Erde, ursprünglich gasförmig, durch Abkühlnng flüssig, durch weitere Abkühlung beim Umschwnng durch den kalten Weltenraum an der Oberfläche zu einer starreu Kruste erhärtet, also anfänglich in glühendem Zustande hatte den Sauerstoff zu den fossilischen Verbindnngen zu Verbrennung des Wasserstoffs zu Wasser und des Kohlenstoffs zu Kohlensäure vollständig consumirt. Bei der noch heiſsen Riude war sämmtliches Wasser noch als Dampf über der Erdoberfläche, die Sonnenstrahlen konnten nicht dnrchdringen und äuſserten sich also uoch nicht auf die heutigen klimatischen Verhältnisse; die Erdrinde war an den Polen so heiſs, wie am Aequator. Nach weiterer Abkühlung schlug sich der Wasserdampf zu Wasser immer mehr nieder, vielfache Durchbrüche der inneren elastischen Gase durch die Rinde erzeugten Höheu und Tiefen, hier sammelte sich die Wassermasse, die Atmosphäre wurde immer lichter, allein sie bestand nur aus Stickstoff, Kohlensäure nnd einer groſsen Menge Wasserdampf. Hier fing offenbar schon der Schöpfer au, die Natur zur Aufnahme von lebenden Wesen sich vorbereiten zn lassen. Blattgewächse muſsteu nach und nach (sowie dies von allen Blätteru der Pflanzen noch hent geschieht) die Kohlensäure aufsaugen, den Kohlenstoff zu eigenem Wachsthum verbrauchen und den reinen Sauerstoff ausathmen, so daſs die A. zu der heutigen Zusammensetzung, aus Stickstoff und Sauerstoff hergestellt wurde; sie wurde bei immer weiterer Niederschlagung der Wasserdämpfe immer durchsichtiger, die Brechnug der Lichtstrahleu unterhielt die heutige kosmische Wärme der Erdoberfläche und mit der Schiefe der Erdaxe gegen die Ekliptik, deren klimatischen

Abstufungen, und erzeugte somit die Strömungen der Luftmasse in den oberen Regionen vom Aequator nach beiden Polen hin, und mit Herstellung des Gleichgewichts in den unteren Regionen von den Polen nach dem Aequator hin, wie es noch heut geschieht. Indem nämlich die Luft um die Aequator-Ebene heifser, ausgedehnter, leichter und höher, nach den Polen zu immer kälter, dichter, schwerer und niedriger ist, so finden die oberen Schichten vom Aequator ab, zu beiden Seiten in gleichen Höhen oder Abständen von der Erdoberfläche Luftleeren, welche sie permanent auszufüllen haben; mit diesen oberen Abströmungen werden aber die zugehörigen Luftsäulen über der Oberfläche leichter, die nach den Polen hin durch Zuströmungen schwerer, das aërostatische Gleichgewicht ist gestört, und die nothwendige Folge davon ist die Strömung der unteren Luft-Regionen in entgegengesetzten Richtungen.

Dafs die Luftströmungen (Winde) in verschiedenen Höhen nach verschiedenen Richtungen gehen, beweisen uns die Luftschifffahrt und Gewitter. Einen Vogel, der bei starkem Wind in die Luft sich erheben will, sieht man unter grofser Anstrengung senkrecht bis zu einer bestimmten Höhe sich aufschwingen, und hier leichten Fluges äufserst schnell nach einer mit dem Winde ganz verschiedenen Richtung horizontal fortgehen. Offenbar hatte der Vogel schon die Absicht, die später genommene Richtung einzuschlagen, und sein Instinct lehrte ihn, dafs er eine Luftschicht von der geeigneten Stromrichtung finden würde.

Eine andere permanente Luftströmung auf dem ganzen Erdball ist die von Ost nach West, in Folge des täglichen Umschwungs des Erdballs von West nach Ost um seine Axe, und diese hat von Anfang an stattgefunden. Die Lufttheilchen nämlich, welche vermöge der Schwerkraft an den festen Erdkörper gefesselt sind, werden in die Schwungbewegung mit hineingerissen, ungeachtet sie als abgesonderte Körperchen keinen festen Zusammenhang mit der Erdaxe haben; ihres Beharrungsvermögens oder ihrer Trägheit zufolge wollen sie in Ruhe bleiben, d. h. den zuvor eingenommenen Ort beibehalten, und somit entsteht die scheinbar rückgängige Bewegung der Luft, der Ostwind, welcher, wo der Umschwung am stärksten ist, am Aequator, am heftigsten weht, während er an den Polen = Null ist und in unseren Gegenden durch viele zufällige andere Luftströmungen so weit unterbrochen wird, dafs wir denselben als permanent nicht mehr wahrnehmen. Da mit der gröfseren Höhe die Lufttheilchen eine gröfsere Umschwungs-Geschwindigkeit annehmen müssen, zugleich ihre Leichtigkeit und Beweglichkeit zu-, ihre Schwerkraft aber abnimmt, so treffen alle Umstände überein, dafs die Strömung der Luft von Ost nach West mit der Höhe der Luft-Region zunimmt, und auch in unseren Gegenden wird sie mit zunehmender Höhe immer vorherrschender sein.

2. Die Höhe der A. wird sehr verschieden angegeben, je nach den Voraussetzungen, welche den Berechnungen derselben zu Grunde gelegt werden.

Nach dem Mariotte'schen Gesetz könnte man annehmen, dafs die A. bis in's Unendliche reicht. Mariotte nimmt nämlich an, dafs jede luftförmige Flüssigkeit ein unbegrenztes Expansionsbestreben habe, dafs sie zu unbegrenzter Ausdehnung nur durch Druckkraft verhindert werde, und dafs die Dichtigkeiten verschiedener Luftmassen sich verhalten wie die auf sie wirkenden Druckkräfte.

Nun ist die Druckkraft der A. auf die an der Erdoberfläche befindliche unterste Luftschicht so grofs, dafs sie einer Quecksilbersäule im Mittel von 28 par. Zoll oder $760^{mm}$ (Millimeter) das Gleichgewicht hält, und in $11{,}5^{m}$ (Meter) Höhe sinkt das Barometer um $1^{mm}$; die darüber stehende Luftsäule hält also einer $759^{mm}$ hohen Quecksilbersäule das Gleichgewicht. Bei $2 \times 11{,}5^{m}$ steht nun das Barometer auf

$$759 - \frac{759}{760} = 760\left(\frac{759}{760}\right)^2 \text{ Millm.}$$

und bei $n \times 11{,}5^{m}$ auf $760\left(\frac{759}{760}\right)^n$ Millm.

So grofs man also auch immer $n$ nehmen mag, so behält der Druck der darüber befindlichen Luft einen reellen Werth, und die Höhe $n \times 11{,}5^{m}$ ist ohne Grenzen.

Allein erstens ist eine unbegrenzte Verdünnung der Luft nicht wohl denkbar, denn das Auseinanderrücken der Atome, bei welcher der Körper, dem sie angehören, als ein homogenes Ganzes noch existiren kann, mufs jedenfalls seine Grenzen haben. (Vergl. den folg. Art. Atom.) Aber auch zweitens kommt hinzu, dafs die mit der Ferne vom Erdmittel zunehmende Centrifugalkraft mit der abnehmenden Schwerkraft in's Gleichgewicht kommen mufs, und dafs in dieser Höhe von der Erdoberfläche kein Körper der Erde mehr angehören kann.

3. Um diese Höhe zu finden, kann man 2 Wege einschlagen:

Jedes Lufttheilchen macht mit dem

Parallelkreise, zu dem es gehört, in 24 Stunden einen Umschwung um die Erdaxe, die Geschwindigkeit desselben wird um so gröfser, je weiter es von der Erdoberfläche entfernt ist. Stellt man sich nun in der Aequator-Ebene ein in der möglich höchsten Luftkreislinie liegendes Lufttheilchen vor, so hat dies diejenige Geschwindigkeit, welche seinem Umschwung um die Erdaxe in 24 Stunden angehört. Es entferne sich dieses Lufttheilchen um ein Geringes über den Endkreis, so behält es in Folge des Beharrungsvermögens seine Geschwindigkeit bei und bewegt sich unabhängig von der Luftbewegung und nur noch abhängig von der Anziehungskraft der Erdmasse, also wie ein Mond in 24 Stunden um die Erdaxe.

Der zweite hierauf folgende Art. Attraction zeigt, dafs die Bewegung eines angezogenen Körpers nur von der Masse des anziehenden Körpers, nicht aber von seiner eigenen Masse abhängig ist, mithin ist seine Bewegung mit der unseres Mondes zu vergleichen.

Der Mond umkreis't die Erde in 27 Tg. 7 Std. 43 Min. (s. astr. Monat, 2.), wofür man 27 Tg. 8 Std. = $27\frac{1}{3}$ Tage setzen kann. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist 50800 geogr. Meilen, der Erdhalbmesser beträgt 860 Meilen, mithin die Entfernung des Mondes von der Erde von Mittel zu Mittel = 59 Erdhalbmesser. Nun verhalten sich nach dem 3. Kepler'schen Gesetz die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Körper um einen Centralkörper wie die Kubi deren Entfernungen von diesem. Bezeichnet man also die Entfernung des Lufttheilchens von dem Erdmittelpunkt mit $x$, (in Erdhalbmessern), so hat man

$$(27\tfrac{1}{3})^2 : 1^2 = 59^3 : x^3$$

woraus

$$x = \frac{59}{\sqrt[3]{(27\frac{1}{3})^2}} = 6{,}50$$

Demnach hätte die A. eine Höhe von $6\frac{1}{2}$ Erdhalbmessern

$$= 6\tfrac{1}{2} \times 860 = 5590 \text{ geogr. Ml.}$$

Hierbei ist zu bemerken, dafs die Verzögerung, welche jedes Lufttheilchen in dem rückgängigen Passatwinde erleidet, aufser Acht gelassen werden kann; denn setzt man die Geschw. des Windes an der Erdoberfläche auch 10 Fufs per Sec., so beträgt dies bei circa 1500 Fufs Geschwindigkeit des Aequators $\frac{1}{150}$, und statt $1^2$ würde $\left(\frac{149}{150}\right)^2$ zu setzen sein.

4. Ein zweiter Weg ist folgender:

Mit Beibehaltung der Bezeichnung von $x$ würde ein Körper, also auch ein Lufttheilchen in der Entfernung von $x$ Erdhalbmessern in der ersten Secunde $\frac{g}{x^2}$ Fufs fallen, wenn er an der Erdoberfläche $g$ ($15\frac{5}{8}$ preufs.) Fufs fällt.

Bezeichnet man die Fliehkraft, welche ein Körper an der Erdoberfläche im Aequator beim Umschwung um die Axe besitzt, mit $F$, so ist

$$F = \frac{c^2}{2g \cdot r} M$$

wo $c$ die Geschwindigkeit des Körpers per Sec., $g$ die Fallhöhe per Sec., $r$ den Erdhalbmesser und $M$ die Masse des Körpers bedeuten.

Der Umfang des Aequators ist 5400 geogr. Ml., diese durchläuft der Körper in 24 Stunden oder in $24 \cdot 60 \cdot 60$ Sec., mithin ist

$$c = \frac{5400}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \tfrac{1}{16} \text{ Meile}$$

$$g = 15\tfrac{5}{8} \text{ preufs. Fufs}$$

$$r = 860 \text{ geogr. Ml.}$$

$M$ kann = 1 gesetzt werden,

daher

$$F = \frac{(\frac{1}{16})^2 \square \text{Ml.}}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \text{ (pr. Fufs)} \cdot 860 \text{ Ml.}}$$

$$= \frac{1 \text{ (geogr. Ml.)}}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot 860 \cdot 256 \text{ (pr. Fufs)}}$$

die geogr. Ml. ist = 1970 pr. Ruthen an 12 Fufs, mithin

$$F = \frac{1970 \cdot 12}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot 860 \cdot 256} = 0{,}003436$$

$$= \frac{1}{291{,}032}$$

wofür $\frac{1}{291}$ gesetzt werden kann.

Die Schwerkraft äufsert sich durch den Fall von $g$ per Sec., die Fliehkraft $F$ also durch die entgegengesetzt gerichtete Fallhöhe $= \frac{g}{291}$. Diese Schwungkraft vermehrt sich mit der Entfernung vom Erdmittel, und in der Entfernung von $x$ Halbmessern wird sie $\frac{g}{291} \cdot x$

Wenn nun ein Lufttheilchen in der Entfernung $x$ vom Erdmittel als Grenze nicht mehr auf die Erde fallen soll, so mufs dessen Schwerkraft $\frac{g}{x^2}$ mit seiner Centrifugalkraft = grofs sein, und man hat

$$\frac{g}{x^2} = \frac{g}{291} x$$

$$\text{woraus } x = \sqrt[3]{291} = 6{,}6267$$

d. h. die Höhe der A. beträgt 6,6267 Erdhalbmesser = 5699 geogr. Ml.

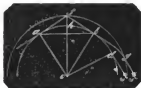
5. Nimmt man von den ad 4 und 5 gefundenen beiden Höhen der A. das Mittel = $5644\frac{1}{4}$ geogr. Ml. = $5644\frac{1}{4} \times 7420,158$ Meter und dividirt diese durch 11,5, so erhält man die Zahl 3642008, also (s. No. 2) die Höhe des Quecksilbers im Barometer

$$= 760\left(\frac{759}{760}\right)^{3642008}$$

Für diese Zahl erhält man den *log* = − 2080, die Decimalstellen fortgelassen, also einen Decimalbruch von 0,000 . . . ., dessen Anzahl von Nullen hinter dem Komma 2079 beträgt, und dessen Werth höchstens 1 Nonilliontel ist; die Luft ist daher, wenn hier noch das Mariotte'sche Gesetz gilt, von einer Verdünnung, bei welcher schwerlich noch ein Körper als homogene Flüssigkeit bestehen kann.

6. Außer mehreren anderen Bestimmungen der Höhe des Luftkreises, welche auf nur problematischen Voraussetzungen beruhen, noch anderen, denen strengere Principe zu Grunde liegen, die aber einem späteren Art. vorbehalten bleiben müssen, soll noch hier der Bestimmung der A.-höhe gedacht werden, welche man aus der Strahlenbrechung ableitet.

Fig. 102.



Es sei *c* der Mittelpunkt der Erde, *abd* ein Bogen der Erdoberfläche, *efg* die höchste Luftschicht, welche noch die Fähigkeit hat, Sonnenstrahlen zu reflectiren, so muſs offenbar die Reflection mit der Dämmerung beginnen und aufhören. Es sei *a* der Punkt, bei welchem die Dämmerung beginnt oder aufhört. Wenn der Sonnenstrahl in *b* tangirt, so muſs der höchste Punkt *f* der A., in dem der Strahl sich noch abspiegelt, so liegen, daſs $fa = fb$ ist. Wenn nun in *a* die Sonne im Horizont erscheint, so steht diese um den Bogen $bd = 33'\ 46,3''$ noch unter dem Horizont von *b*, denn ist die Tangente *Sd* an *d* die Richtung der Sonne, also auch $Sg \nparallel Sd$, so wird der Lichtstrahl *Sg* durch die A. in einer Curve *gb* gebrochen, die in *b* tangirt, woher *S*, obgleich sie erst in dem Horizont *dS* steht, schon in dem Horizont von *b* erscheint. Der Bogen *dba*, der Dämmerungsbogen, wird = 18° angegeben.

Setzt man $\angle acf = \alpha$

so ist $fh = ac\,(\sec\alpha - 1) = ac \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}$

Nun ist $ac = 860$ geogr. Ml.

$\angle acf = \alpha = \frac{1}{2}(18^\circ - 33'\ 46,3'') = 8^\circ 43'\ 6,85''$ wonach man die Höhe *fh* der A. erhält = 10,0536 geogr. Ml. Um die Ausdehnung der Luft in dieser Höhe zu finden, hat man 1 geogr. Ml. = 7420,158 Meter, mithin eine Höhe von 74599 m. Dividirt man nun diese durch 11,5 m, so erhält man den Exponent $n = 6269$ und die Quecksilberhöhe im Barometer, welcher die Luftsäule darüber noch das Gleichgewicht hält, $= 760\left(\frac{759}{760}\right)^{6269}$

Der *log* dieser Zahl ist

$$2,8808136 + 6269 \times (0,9994282 - 1)$$
$$= 0,2961994 - 1$$

die Zahl $= 0,1977877 = \frac{1}{5,056}$ Millim.

Mithin beträgt die Verdünnung der Luft in Höhe von 10,0536 geogr. Ml.

$$\frac{1}{5,056 \times 760} = \frac{1}{3842\frac{1}{2}}$$

7. Es wird oft die Frage aufgeworfen und beantwortet: Wie hoch würde die Atmosphäre sein, wenn sie die an der Erdoberfläche stattfindende Dichtigkeit bis an der äußersten Grenze beibehielte. Diese Frage, welche wunderlich zu sein scheint, hat in der Aërodynamik zur Bestimmung der Ausfluſsgeschwindigkeit von Luft in einen absolut leeren Raum u. s. w. Bedeutung und soll deshalb auch hier beantwortet werden.

Nach Biot und Arago wiegt 1 Kubikmeter trockene Luft bei 0° Temperatur und unter 0,76 Meter = 28 pariser Zoll Barometerstand 1,299 Kilogramme. Nun wiegt 1 Kubikmeter Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit 1000 Kilg., das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° Temp. ist 13,598, also das Quecksilber

$$\frac{13,598 \times 1000}{1,299} = 10468 \text{ mal schwerer als}$$

die an der Erdoberfläche befindliche atmosphärische Luft, folglich hat die mit der unteren Dichtigkeit gleich dichte Luftsäule, die einerlei Barometerstand 0,76 Meter entspricht, eine Höhe von

$$10468 \times 0,76 = 7955,68 \text{ Meter}$$
$$= 3,186199 \times 7955,68 = 25348 \text{ pr. Fuſs.}$$

Wegen der Ausdehnung der Luft durch die Wärme von 0,00366 . . . = $\frac{11}{30}$ für jeden

Grad Celsius hat man die Höhe bei einem Wärmegrade $t$ Celsius

25348 $(1 + \frac{11}{38} \cdot t)$ preufs. Fufs.

Anmerk. 0,76 Meter sind = 28,075 par. Zoll und 28 par. Zoll sind = 0,7579 Meter; für 28 Zoll Barometerstand erhält man auch nur 25280 Fufs Höhe der gleichförmig dichten Atmosphäre. Die Bestimmung des mittleren Barometerstandes durch 28 par. Zoll ist eine ältere, und offenbar die sehr nahe liegende ganze Zahl in Zollen gewählt, die neuere Bestimmung 0,76$^m$ ist als richtiger anzusehen.

**Atom.** Kleinstes, unzertheilbares Theilchen eines einfachen Stoffes (nicht zu verwechseln mit Molekül, Massentheilchen, welches eine Summe neben einander befindlicher Atome nicht nur von einfachen, sondern auch von zusammengesetzten Stoffen ist). Die Lehre von den Atomen, die atomistische Lehre, gehört eigentlich der Chemie an, sie greift aber unmittelbar in die Physik, und zwar in die mechanische Naturlehre ein, sie bildet die Basis zum Verständnifs der allgemeinen Eigenschaften der Körper, sie veranschaulicht die Zusammensetzung der Körper aus einfachen oder zusammengesetzten Bestandtheilen in multiplen Proportionen, bildet somit die Theorie der rechnenden Chemie und gehört hierher (s. Aequivalent).

Die Atomenlehre ist hypotbetisch, allein sie hat sich in allen Fällen chemischer Untersuchungen als zuverlässig bewährt, hat noch nicht widerlegt werden können und bildet die Grundlage der theoretischen Chemie. Sie behauptet hier denselben Rang wie in der theoretischen Astronomie als Grundlage die Lehre von der Attraction, die ebenfalls Hypothese ist und die ebenso noch nirgend widerlegt werden konnte.

Die Porosität, schon in den frühesten Zeiten als allgemeine Eigenschaft der Körper angenommen, gab Gelegenheit zu der Hypothese, dafs das verschiedene Verhalten verschiedener Körper nur in dem verschiedenen Verhältnifs der Poren zur wirklichen Masse ihren Grund habe, dafs Wasser z. B., weil es 7 mal leichter als Eisen ist, 7 mal so viele Poren habe als Eisen, dafs die Massen in zwei Körpern von gleichem Volumen umgekehrt wie deren Porosität sich verhalten, dafs nämlich die Materie aller Körper nur einerlei sei.

So widerstrebend diese Annahme an sich ist, so zeigt sie sich am widersprechendsten beim Vergleich zwischen Zinn und Eisen, welche beide ziemlich einerlei spec. Gew. haben, und dafs der geringe Unterschied deren Porosität allein das so äufserst verschiedene physikalische und chemikalische Verhalten beider Metalle hervorbringen soll.

Mit Recht hat man also diese Lehre verworfen, allein man ging wieder zu weit und nahm nur Poren in den Körpern an, soweit man solche wahrnahm, wie in den organischen Körpern, und betrachtete die Körper als homogene Massen: Wasser und Gold z. B. waren Körper ohne Poren, und dies ist nicht richtig; denn wenn auch das schärfste Mikroskop im Wasser keine Poren nachweis't, so sind diese darum doch vorhanden und man begreift dies augenscheinlich an anderen Körpern durch mikroskopische Betrachtung, z. B. an einem Pflanzenblatt, welches dem Auge als eine homogene grüne Masse erscheint, während sie mikroskopisch in einzelnen Tröpfchen Zellensaft sich auflös't, welche in oft 6facher farbloser Länge aus einander liegen, und dem Auge als gleichmäfsiges Grün erscheinen, weil die leeren Räume zwischen den Tröpfchen so sehr klein sind, dafs die 6fach kleineren Tröpfchen in grofser Menge dicht an einander zu liegen scheinen.

Die Annahme dabei aber, dafs die Moleküle der einfachen Stoffe eben so verschieden sind, als die Summen der Moleküle, als die einfachen Körper selbst, wird durch die Atomentheorie als richtig bestätigt und ist auch gewifs nur vernunftgemäfs.

Die Verwandtschaft vieler Stoffe zu einander und die Verbindung zweier derselben zu einem dritten, beiden ungleichartigen und ganz anderen Stoff, so dafs auch die besten Mikroskope im Zinnober z. B. weder Schwefel- noch Quecksilbertheilchen einzeln neben einander zeigen, widersprach offenbar der allgemeinen Eigenschaft aller Körper, der Undurchdringlichkeit, und man fühlt, dafs hier den Erscheinungen des Mikrokosmos der Natur eben so ein allgemein gültiges Gesetz zu Grunde gelegt werden mufste, wie es Newton für den Makrokosmos in der Attractionslehre gegeben hat. Dies Grundgesetz nun ist die Atomentheorie, welche Undurchdringlichkeit neben Porosität und Chemismus gestattet und veranschaulicht.

Die atomistische Theorie lehrt, dafs die Theilbarkeit, diese allgemeine Eigenschaft aller Körper, nicht, wie die dynamische Theorie lehrt, bis in's Unendliche gehe, sondern dafs sie bei jedem Körper eine Grenze habe, und zwar in kleinsten, nicht weiter theilbaren, in sich nicht weiter

änderungsfähigen, also festen, undurchdringlichen Theilchen, den **Atomen** des Stoffes, woraus der Körper besteht. Diese Atome bleiben also auch in demselben Stoff dieselben, der Körper möge starr, flüssig oder gasförmig sein, z. B. in festem, in flüssigem und in zu Dampf verflüchtigtem Golde; die in den verschiedenen Aggregatzuständen statthabenden verschiedenen specifischen Gewichte desselben Stoffs haben ihren Grund nur in den verschiedenen gegenseitigen Entfernungen der Atome, zu welchen sie durch die Kraft der Wärme auseinandergerückt werden.

Die Theorie lehrt, allen Versuchen und Beobachtungen und der menschlichen Vernunft entsprechend, dafs jedem Atom in Beziehung auf jedes ihm zunächst liegende gleichartige Atom eine Anziehungskraft und eine Abstofsungskraft inne wohnt. Die Anziehungskraft der Atome wird durch die Festigkeit des die Atome begreifenden Körpers, d. h. durch die erforderliche Kraft, um die Massentheile nach verschiedenen Richtungen von einander zu trennen, ausgesprochen; die Abstofsungskraft bildet die Porosität, d. h. die Entfernung der einzelnen Atome unter einander, und ist der Anziehungskraft und mithin auch der von dieser abhängigen Festigkeit entgegengesetzt.

Von der Gröfse, der Gestalt und dem absoluten Gewicht der Atome haben wir keine Vorstellung, weil sie ihrer Kleinheit wegen nicht wahrzunehmen sind. Dagegen ist man im Stande, das specifische Gewicht derselben in Bezug auf das Gewicht des Atoms eines bestimmten Körpers, wozu der Sauerstoff gewählt worden ist, und aus diesen relativen Gewichten, den **Atomgewichten** auch die relativen Räume, welche sie einnehmen, die **Atomvolume** sehr genau zu bestimmen.

Nach diesen nun beträgt z. B. das Atomvolum des Quecksilberdampfes etwa das 1500fache von dem Atomvolum des flüssigen Quecksilbers, und da das Atom des Quecksilbers sich nicht ändern kann, so müssen die leeren Räume zwischen den einzelnen Atomen des Dampfes 1500 mal gröfser sein als bei der Flüssigkeit und zwar ohne dafs die Homogenität des Körpers (des Dampfes) aufgehoben wird.

Meiner Ansicht nach haben diese Abstände der Atome für die Beibehaltung der Homogenität des Gases ihre bestimmte Grenze, und wüfsten wir diese, so könnten wir für jeden Barometerstand auf der Erdoberfläche die Höhe der Erd-Atmosphäre nach dem Mariotte'schen Gesetz berechnen. Wenn durch fortgesetzte Exhaustion mittelst einer Luftpumpe die Grenze der Dünnigkeit, z. B. die der atmosphärischen Luft erreicht wäre, so würde diese zugleich entweder die Grenze der Evacuation sein, oder wenn bei dem folgenden Auszuge des Stempels die Masse dem neu gebildeten leeren Raum folgte, so würden die Atome einzeln niederfallen und vollkommene Leere entstehen.

In dem Artikel Aequivalent ist erklärt, wie verschiedene einfache Stoffe chemisch zu zusammengesetzten Körpern sich verbinden, indem sie ihre Atome zu einem gleichförmigen Gemenge an einander reihen. So z. B. bildet sich unterschweflige Säure aus Schwefel und Sauerstoff, indem beide Körper in einander fliefsen, und sich der Art gleichmäfsig vermengen, dafs immer 1 At. Schwefel mit 1 At. Sauerstoff sich an einander begiebt. Dieses abwechselnde Aneinanderliegen je zweier Atome verschiedener Stoffe geschieht durch Chemismus, nämlich vermöge der chemischen Verwandtschaft zwischen beiden Stoffen, und beide sind auch nur durch Chemismus wieder zu trennen. Beide Atome, ein Doppel-Atom, bilden nun das At. des dritten, von beiden einfachen Stoffen ganz verschiedenen Körpers, der unterschwefligen Säure.

Beide Stoffe, Schwefel und Sauerstoff, haben aufser der vorigen und noch andern auch einen Grad der Verwandtschaft, vermöge welcher 2 Atome Schwefel mit 5 Atomen Sauerstoff sich zu einem At. eines von beiden verschiedenen Körpers, der Unterschwefelsäure, verbinden; das At. derselben besteht also aus 7 einfachen Atomen, die nur durch Chemismus zu trennen sind, und verhält sich in der Säure wie das einfache At. in einem einfachen Stoff.

Die Aneinanderfügung der Atome zu einem homogenen Körper geschieht also durch zweierlei Anziehungskräfte, durch die Cohäsion und durch die Verwandtschaft (Affinität s. d.). Die Cohäsion verbindet gleichartige Atome mit einander, einfache Atome zu einfachen, zusammengesetzte At. zu zusammengesetzten Körpern, dergestalt, dafs der Körper, als die Summe der Atome, mit jedem seiner At. gleichartig ist; die Verwandtschaft, Affinität, verbindet ungleichartige At. mit einander, und zwar in verschiedenen, aber jedesmal bestimmten Mengen zu einem Körper, der mit jedem der einfachen At. ungleichartig, mit dem zusammengesetzten Atom aber gleichartig ist.

**Atomgewicht.** In dem Artikel Aequivalent, No. 5, ist schon angegeben, dafs Aequivalent nicht immer Atom, sondern

auch ein Multiplum eines Atoms sein kann; bei den einfachen Körpern ist es in solchen Fällen nur das Doppelte, d. h. das Atom ist die Hälfte des Aequivalents und es sind dort die Aequivalente und die A—e der einfachen Stoffe alphabetisch zusammengestellt. Eben so wichtig wie die A—e der einfachen Stoffe sind die derzusammengesetzten Körper, der chemischen Verbindungen. Diese sind nicht immer so leicht zu bestimmen, und es ist hierbei von den Chemikern mit vieler Vorsicht und Umsicht verfahren.

Fast sämmtliche A.-Bestimmungen haben ihr Grundprincip in der A.-Bestimmung der Säuren und Basen gefunden. Es ist nämlich das Gesetz entdeckt worden (das Gesetz der Neutralitätsreihen): Wenn die Mengen $S'$, $S''$, $S'''$ .... verschiedener Säuren die bestimmte Menge $B$ einer Basis sättigen, und die Mengen $s'$, $s''$, $s'''$ .... derselben Säuren sättigen die bestimmte Menge $b$ einer anderen Basis, so stehen beiderlei Mengen derselben Säuren in geradem Verhältnifs, d. h.

$$S' : S'' : S''' \ldots = s' : s'' : s''' \ldots$$

Und gegenseitig: Wenn die Mengen $B'$, $B''$, $B'''$ .... verschiedener Basen die bestimmte Menge $S$ einer Säure sättigen, und die Mengen $b'$, $b''$, $b'''$ .... derselben Basen sättigen die bestimmte Menge $s$ einer anderen Säure, so stehen beiderlei Mengen derselben Basen in geradem Verhältnifs, d. h.

$$B' : B'' : B''' \ldots = b' : b'' : b''' \ldots$$

Demnach hat man feststellen können, dafs die Aequivalente der Säuren und der Basen, welche zu neutralen Salzen sich verbinden, zugleich deren A—e und dafs die Summen deren Aequivalente die A—e der neutralen Salze sind; überall wo nicht unwiderleglich das Gegentheil hervorgeht:

1. Beispiel.

588,857 Kali verbinden sich mit 500,75 Schwefelsäure zu neutralem schwefelsauren Kali; da nun

588,857 Kali = 488,857 Kalium + 100 Sauerstoff,

500,75 Schwefelsäure = 200,75 Schwefel + 300 Sauerstoff

und da 100 das A. von Sauerstoff
488,857 „ „ „ Kalium
und 200,75 „ „ „ Schwefel,

so setzt man ganz richtig

588,857 das A. von Kali
500,75 „ „ „ Schwefelsäure, und
1089,607 = 588,857 + 500,75 das A. des neutralen schwefelsauren Kali.

2. Beispiel.

333,685 Eisenoxyd verbinden sich mit 500,75 Schwefelsäure zu neutralem schwefelsaurem Eisenoxyd.

Nun ist

333,685 Eisenoxyd = 233,685 Eisen + 100 Sauerstoff,

500,75 Schwefelsäure = 200,75 Schwefel + 300 Sauerstoff,

233,685 ist aber nicht das A. des Eisens, sondern

350,527, welches sich mit 100 Sauerstoff zu der niedrigsten Oxydationsstufe, zum Eisenoxydul verbindet; und da 233,685 = ⅔ 350,527 ist, so ist das Aequivalent 233,685 im Eisenoxyd = ⅔ des A. vom Eisen. Da aber Bruchtheile von Atomen undenkbar sind, so kann 333,685 nicht das A. des Eisenoxyds sein, das Eisenoxyd kann nur aus 2 Atomen Eisen und 3 Atomen Sauerstoff bestehen, nämlich aus:

2 · 350,527 Eisen + 3 · 100 Sauerstoff = 701,054 Eisen + 300 Sauerstoff,

und das A. des Eisenoxyds ist

701,054 + 300 = 1001,054

Nun ist aber auch nicht 333,685 + 500,75 = 834,435 das A. des schwefelsauren Eisenoxyds. Denn es bestände das Atom desselben aus ⅓ Atom Eisenoxyd und 1 Atom Schwefelsäure, mithin kann das Atom schwefelsaures Eisenoxyd nur aus 1 Atom Eisenoxyd und 3 Atomen Schwefelsäure bestehen. Das A. des neutralen schwefelsauren Eisenoxyds ist demnach

1001,054 + 3 · 500,75 = 2503,304

Eine weitere Erläuterung gehört nicht in die mathematischen Wissenschaften.

**Atomvolum.** Der Raum, den das Atom eines Körpers, der zu ihm gehörende Zwischenraum eingeschlossen, einnimmt.

Wenn man das Gewicht eines Körpers durch das Gewicht seiner Volum-Einheit, d. h. durch sein specifisches Gewicht dividirt, so erhält man zum Quotient das Volum des Körpers, und folglich findet dies auch für die Atome statt.

Man kennt von den Atomen weder die Gestalt, noch die Gröfse mit und ohne Zwischenräume, noch das absolute Gewicht, noch das Volum; die Atomgewichte sind relative Gröfsen, wie die specifischen Gewichte der Körper, abstracte Zahlen, die sich auf ein angenommenes Gewicht als Einheit, das des Sauerstoff-Atoms = 100 gesetzt, beziehen, und somit können auch die A—e nur relativ sein, und es ist natürlich, dafs man wieder das A. des Sauerstoff-Atoms zur Einheit nimmt, wonach man denn auch das spec. Gewicht des Sauerstoffs als Einheit für die spec. Gewichte aller Körper festzustellen hat. Setzt man das spec. Gewicht des Sauer-

stoffs = 100, so hat man das A. des Sauerstoffs = $\frac{\text{Atomgew.} = 100}{\text{spec. Gew.} = 100} = 1$

Für alle übrigen Körper mufs nun das spec. Gewicht auf dieselbe Einheit bezogen werden; für feste und flüssige Körper liegt das Gewicht des Wassers unter 15° R. = 1 zu Grunde, das spec. Gew. des Wassers bei 0° ist = 1,00121, das der atmosphärischen Luft bei 0° = 0,001295773; mithin ist das Wasser $\frac{1,00121}{0,001295773} = 773$ mal schwerer als atm. Luft. Das spec. Gew. des Sauerstoffs gegen atmosphärische Luft (= 1) ist 1,1026, mithin ist jedes in Bezug auf Wasser ermittelte spec. Gew. mit $\frac{773}{1,1026} \cdot 100 = 70107$ zu multipliciren. Z. B. gegossenes Gold hat das spec. Gew. gegen Wasser = 19,258, mithin gegen 100 Sauerstoff = 19,258 × 70107 = 1350120. Das Atomgew. des Goldes ist = 1229,415, mithin das A. des Goldes

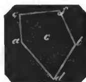
$$\frac{1229,415}{1350120} = 0,00091$$

**Attraction.** Das Bestreben fern von einander befindlicher Massen, auf dem kürzesten Wege, also in gerader Linie zu einander hin sich zu bewegen. Sie wird auch Gravitation, Schwere genannt, sofern man die Intensität des Attractionsbestrebens (zunächst beim freien Fall eines in der Luft losgelassenen Körpers gegen die Erdoberfläche) vor Augen hat, nämlich die Gröfsen der Kraft und der Geschwindigkeit, mit welchen die Annäherung geschieht, je nach der Summe der materiellen Theile und des Raum-Abstandes zweier sich anziehender Massen.

Aus den Artikeln: Anziehung und Abstofsung, hat man schon indirect wenigstens ersehen, dafs beide Kräfte das Grundprincip, das Belebende und Erhaltende der gesammten sogenannten leblosen (wohl besser: der willenlosen) Natur ausmachen. Affinität und Cohäsion z. B. sind anziehende Kräfte, allein beide wirken als abstofsende Kräfte einander entgegen. Der A. als anziehender Kraft ist die Centrifugalkraft entgegengesetzt, diese ist aber keine mit der A. zugleich geschaffene Urkraft, sondern, wie später erhellen wird, eine Kraft, die aus dem Beharrungsvermögen der Massen in Absicht auf Richtung und Geschwindigkeit hervorgehen mufste.

2. Um möglichst verständlich zu werden, möge zuvor Folgendes zur Veranschaulichung dienen: Man denke einen unbegrenzten leeren Raum und in diesem einen starren Körper von unregelmäfsiger Gestalt, aber gleichmäfsiger Masse, so hat dieser Körper keine Ursache, seinen Ort zu ändern. Man denke hiernach den

Fig. 103.




Körper von einer Wärmemenge umgeben, welche ihn schmilzt, so erhalten die äufseren Massentheilchen das Bestreben, sich dem inneren Kern zu nähern, sie äufsern einen Druck gegen denselben, der von den am fernsten befindlichen Theilchen, wie bei *d*, *e*, *f* am gröfsten ist, und da die Massentheile zwischen *abd* und *abef* bei verminderter Cohäsion der Druckwirkung nachgeben, so entsteht von *d*, *e*, *f* aus eine Herabsenkung nach *c*, welche Erhebungen bei *a* und *b* veranlafst, also ein Zerfliefsen, welches nicht eher aufhört, als bis alle auf der Oberfläche befindlichen Massentheilchen einerlei Druck gegen die Gesammtmasse ausüben, bis also ein allen Massentheilen angehörendes Massencentrum und mit diesem die Oberfläche zur Kugel-Oberfläche sich gebildet hat.

Das Zerfliefsen der Massen von *d*, *e*, *f* aus nach *a* und *b*, also eine Bewegung von Massen gegen ruhende Massen hat mittelst Stofs auch diese in Bewegung gebracht, diese Stofswirkungen waren aber nicht nach *c* gerichtet, sie waren nicht central, sondern excentrisch, mithin hat eine Bewegung der äufseren Massen um *c*, also eine Summe von Kreisbewegungen stattgefunden; das Centrum *c* ferner ist nicht von Anfang bis Ende der Kugelbildung dasselbe geblieben, jede Gestalt-Aenderung hatte ein anderes Centrum zur Folge und die successiven Aenderungen der Gestalt und des Centrums haben auch auf die inneren Massentheilchen verschiedene Druckwirkungen und deren Orts-Aenderungen zur Folge gehabt. Welche von allen Bewegungsrichtungen durch successive Zusammensetzung von Mittelrichtungen nun die vorherrschende geworden, diese verbleibt, weil keine Aufhebungs-Ursache da ist, also eine Kreisbewegung um das Centrum *c* oder vielmehr um eine durch *c* zu denkende Axe.

3. Im Anfang war das Wort, sagt die Bibel, allein es war auch der Stoff da,

der durch das Wort belebt werden sollte: die Atome der einfachen Körper, derjenigen, welche wir zu kennen glauben; und wahrscheinlich vieler anderen, die wir nicht kennen. Alle diese Atome neben und durch einander befindlich konnten keine A. zu einander haben, weil es kein Massencentrum gab, oder auch weil jedes einzelne Atom Massencentrum war, jedes Atom also mit jedem anderen gleiche Fähigkeit zur Vereinigung von Massen-Elementen um sich hatte, solche Vereinigungen mithin nicht geschehen, weil sie in allen Atomen zugleich nicht geschehen konnten.

Mit dem Willen Gottes, aus den todten Massen-Elementen Leben zu schaffen, mufste durch das Wort zuerst ein Massen-Centrum geschaffen werden, entweder durch Verdichtung einer Anzahl von Atomen, denen nun als Kern die ihnen zunächst liegenden folgten, oder durch Entfernung von rund herumliegenden Atomen, so dafs die innerhalb befindlichen die Beziehung nach Aufsen verloren und sich somit nach Innen zusammenzogen, oder durch beiderlei Mittel zugleich. Mit der vermehrten Anhäufung der Atome um einen Kern geschah immer gröfsere Verdichtung und Vereinigung derselben zu Gasen, die elastisch durch Selbstbelastung nach dem Centrum zu immer dichter wurden, und die, aus gröfstentheils fossilen Stoffen bestehend, nur glühend sein konnten, womit denn das Ergebnifs des ersten Schöpfungstages, das Licht (1 Buch Mose, Cap. 1, V. 3: Und Gott sprach: es werde Licht, und es ward Licht), beiläufig seine physikalische Erklärung gefunden haben möchte.

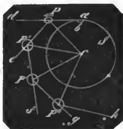
Die allmähliche Zufliefsung von Atomen konnte schon anfangs nicht immer central sein, es entstanden Kreisbewegungen um das Centrum, und endlich durch Zusammensetzung aller Seitenwirkungen zu einer Mittelwirkung eine Kreisbewegung um eine Axe, in welche alle später hinzukommenden Atome mit hineingerissen wurden.

4. Stellt man sich vor, dafs der erste, so gebildete Gas-Körper unsere Sonne war, so hat derselbe nach Jahrtausenden einen Umfang eingenommen, der den Raum, den unser ganzes Sonnensystem jetzt einnimmt, vielleicht noch übertrifft. Die äufsersten Massentheilchen hatten also zuletzt eine ganz enorme Geschwindigkeit, und da die Richtung einer Bewegung nur geradlinig ist, jeder Punkt des in Kreisbewegung befindlichen Umfangs also in jedem Augenblick die Richtung nach der Tangente hat, so hat er zugleich in Folge des Vermögens zur Beharrung in der Bewegung nach einmal gewonnener Richtung und Geschwindigkeit, auch in jedem Augenblick das Bestreben nach der Tangente gerichtet, von der Masse sich zu entfernen, und wird davon nur durch die in dem Centrum vereint zu denkende A. der Gesammtmasse zurückgehalten.

Dies aus dem Beharrungsvermögen einer in Kreisbewegung befindlichen Masse hervorgehende Bestreben derselben, das Centrum der Gesammtmasse zu verlassen, wird angemessen mit Centrifugalkraft bezeichnet, während die A. in Beziehung auf jene Centripetalkraft genannt wird. Wird einmal die letzte von der ersteren übertroffen, so geschieht solche Massen-Entfernung von der Gesammtmasse wirklich, und man kann jeden unserer Planeten und eben so unsere Erde als eine durch Centrifugalkraft aus der Sonne geschleuderte Gas-Masse sich vorstellen, die Millionen von Jahren im kalten Weltenraum herumkreisend, nach und nach zu Flüssigkeiten und aus vielen von diesen zu starren Körpern sich condensirt hat.

Ein Gleiches ist von den Monden anzunehmen, die wiederum von den Oberflächen der Planeten, denen sie zugehören, sich entfernt haben; und bei den Kometen, die unmittelbar aus der Sonne stammen, hat man sich zu denken, dafs deren Gase aus Stoffen bestehen, die keine Verdichtung in starre Körper durch Abkühlung zulassen.

Fig. 104.



Es sei $S$ die Sonnengaskugel, der Theil $ab$ habe sich zu einem Planeten abgelös't, der Punkt $a$ hatte gröfsere Geschwindigkeit als der Punkt $b$; $a$ hat also gröfsere Intensität zur Vorwärtsbewegung als $b$, erstere bleibt die vorherrschende, und in $P$, wo das Abgelöste noch ellipsoidische Gestalt hat, wird mit dem Fortschreiten der Masse nach der

Tangente *ad* zugleich die mit dem Pfeil bezeichnete Axendrehung statthaben.

Die Masse *P* wird aber durch die bei Weitem gröfsere Masse *S* nach der Richtung *Pc* angezogen, aus beiden Richtungen *Pd* und *Pc* geht eine mittlere Richtung *Pe* hervor; hat nun die Masse *P* in *Pe* den Ort *P'* eingenommen, wo sie vermöge der A. ihrer eigenen Masse schon Kugelgestalt besitzt, so wird sie durch *S* nach der Richtung *P'c* angezogen. Aus der Richtung *P'e*, welche *P* weiter fortsetzen will, und der Richtung *P'c* geht eine Mittelrichtung *P'f* hervor; ist *P* in *P''* dieser Richtung gekommen, so geht wieder aus den beiden Richtungen *P''c* und *P''f* die Mittelrichtung *P''g* hervor, in *P'''* aus *P'''c* und *P'''g* die Mittelrichtung *P'''h*, und man ersieht, wenn man die Längen *aP*, *PP'*, *P'P''*, *P''P'''* u. s. w. sich sehr klein, mit sehr vielen zwischen inliegenden Punkten und durch die Punkte *a*, *P*, *P'*, *P''*, *P'''*.... eine stetige Curve gezeichnet denkt, wie die Planetenmasse um die Sonne eine Rundbewegung macht, während sie sich selbst um eine Axe dreht.

5. Bei der Axendrehung der Sonnenmasse konnten solche Ablösungen nur in dem weit aufgeschwellten Aequator geschehen, die Gasplaneten mufsten also in einerlei Ebene mit dem Sonnen-Aequator fort sich bewegen. Wenn dies jetzt nicht geschieht, wenn z. B. die Bahn unserer Erde, die Ekliptik, mit der Ebene des Sonnen-Aequators einen Winkel von etwa 7½° bildet, so kann man sich vorstellen, dafs nach Entfernung einer Gasmasse, die heut unsere feste Erde ausmacht und die als solche einen Durchmesser haben mufste, welcher weit den der Mondbahn um unsere Erde übertrifft, die Wiederausfüllung der in der Sonnenmasse entstandenen Lücke nicht allein aus den im Aequator, sondern auch von den zu vielen Seiten rund herum befindlichen Gasen geschah, dafs einige Zeit es währte, ehe die der A. und der Schwungbewegung zugehörige Normalform der Gasmasse wieder hergestellt war, dafs die Strömungen und Stauchungen der Gase nach verschiedenen Richtungen zu einer Seitenkraft sich zusammensetzten, die mit der früher bestandenen, in der Aequator-Ebene thätig gewesenen einzigen Schwungkraft einen Winkel bildete, und dafs aus beiden Kräften eine Mittelkraft hervorging, die von der ursprünglichen Schwungkraft in Richtung um etwas abwich, dafs also die Aequator-Ebene der Sonne um etwas geändert wurde.

Die Ekliptik unserer Erde ist also in derjenigen Ebene, in welcher der Aequator der Sonne in dem Augenblick sich befand, in welchem sie aus der Sonne sich entfernte; es müfste denn, wie auch wahrscheinlich, die spätere Entfernung der Mondmasse aus der Erde deren Aequator-Ebene gleichfalls abgeändert haben.

Dafs die Bahnen aller übrigen Planeten in Ebenen liegen, die sowohl unter sich, als mit dem jetzigen Aequator der Sonne verschieden sind, ist durch die Vorstellung erklärlich, dafs die Losreifsung der einzelnen Planetenmassen zu verschiedenen Zeiten geschehen ist und dafs mit jeder solchen Losreifsung die Aenderung der Sonnen-Aequatorebene nothwendige Folge war.

6. Dafs bei den Planeten zwischen deren Aequator-Ebenen und Bahnen Abweichungen stattfinden, ist nach Obigem ganz natürlich; denn bevor *ab* als Ellipsoid nach *P* und *P* nach *P'* als Kugel gekommen ist, haben so viele verschiedene Seitenströmungen und Stauchungen in der *P* masse stattgefunden, und fanden auch wohl noch bis *P'* und weiter statt, ehe sie zu einer einzigen Mittelkraft, der Schwungkraft um eine Axe sich zusammensetzten, und es erscheint z. B. eine Abweichung unseres Erd-Aequators von der Ekliptik um etwa 23½° gar nicht auffallend.

7. Es ist nicht denkbar, dafs die Sonnensysteme unter einander nicht in attractorischem Verhältnifs stehen sollten. Stellt man sich die ad 4 gedachte Bildung der ersten Gaskugel vor, so kann man auch annehmen, dafs durch Centrifugalkraft eine Masse hinausgeschleudert worden, die jetzt ein ganzes Sonnensystem ausmacht; dafs ferner die ursprüngliche Gaskugel durch Anziehung von neuen Atomen wieder einen Umfang erlangte, welcher die Ausschleuderung eines zweiten Sonnensystems bedingte u. s. f. Was dann No. 4 von Planeten *P* gesagt, gilt von Sonnensystemen, die nun in attractorische Verhältnisse getreten und darin geblieben sind.

8. Augenscheinliche Beweise von A. unserer Erde sind der Fall von Körpern gegen die Erdoberfläche, das langsamere oder schnellere Abfliefsen von Wasser, je nachdem das Wasserbett weniger oder mehr geneigt ist, die Pendelschwingungen und andere Erscheinungen.

Ein Beweis von der A. anderer Weltkörper gegen unsere Erde ist die Meeresflut, als Wirkung der Anziehung des Mondes und der Sonne, woher auch bei Neumond, wo beide Weltkörper, in einerlei Richtung stehend, gemeinschaftlich

auf die Erhebung der Meereswellen wirken, die Flut am stärksten ist.

Hutton und Maskelyne vermafsen in den Jahren 1774 bis 1776 einen Theil *AB* der Erdoberfläche, zwischen welchem der 500 Fufs hohe Berg Sheshallien auf der Grenze von Hoch- und Nieder-Schottland liegt. Da der Umfang der Erdoberfläche bekannt ist, so erhielt man den Bogen *AB* oder $\angle ACB$, wenn *C* den Mittelpunkt der Erde bedeutet = 43''.

Diese geodätische Vermessung mufste mit einer astronomischen übereinstimmen, wenn die über *A* und *B* aufgestellten Bleilothe ebenfalls nach dem Mittelpunkt *C* als dem Schwerpunkt der ganzen Erdmasse gerichtet waren. Die genannten Naturforscher beobachteten nun von *A* und von *B* aus eine grofse Menge von Fixsternen; es sei *S* einer derselben, so sind *AS* und *BS* wegen der unendlichen Ferne von *S* einander $\ddagger$, sind also *DC* und *EC* die Richtungen der Bleilothe über *A* und *B*, so ersieht man, dafs $\angle EBS - \angle DAS = \angle EBG$ (wenn $GB \ddagger DA$ gezeichnet wird) $= \angle BCA$. Es fand sich

Fig. 105.




aber dieser $\angle = 54''$, also 11'' gröfser, und diese Differenz ergab sich für sämmtliche beobachteten Fixsterne. Hierfür war kein anderer Grund, als dafs die Masse des zwischen liegenden hohen Berges die Bleilothe von der wirklichen Lothlinie abgelenkt hatte. Das Bleiloth über *A* hatte nämlich eine Richtung wie *FA*, und das über *B* wie *HB*; es waren also die $\angle FAS$ und *HBS* gemessen. Nun ist

$$\angle HBS = \angle EBS + \angle EBH$$
$$\angle FAS = \angle DAS - \angle DAF$$
$$\angle HBS - \angle FAS = \angle EBS - \angle DAS + (\angle EBH + \angle DAF)$$

Die eingeklammerten Ablenkungs$\angle$ des Bleiloths betrugen mithin obige 11'' und jede einzelne Ablenkung durch die A. der Bergmasse im Mittel $5\frac{1}{2}$ Sec.

9. Alle Massen-Elemente *m* haben einerlei Anziehungskraft. Zwei in der Entfernung *w* von einander befindliche Elemente *m* sollen gegenseitig die Kraft *p* haben, sich einander zu nähern, so kommt jedes *m* dem andern mit gleicher Kraft *p* entgegen, und die Summe der thätigen Kräfte ist $2p$.

Hat jede der beiden Massen *n* Einheiten, ist jede von beiden also $= n \cdot m$, so ist beider Annäherung wiederum gleich grofs, aber die Kräfte und also auch deren Wirkungen sind in jeder Masse $= n \cdot p$, in Summa $2n \cdot p$.

Die Einwirkung einer Masse $Nm$ auf *m* ist $Np$, die von *m* auf $Nm = p$, die Summe der Thätigkeiten $= (N+1)p$; daher kommt *m* der $Nm$ mit dem *N*fachen, $Nm$ der *m* mit dem einfachen Annäherungsbestreben entgegen.

So ist für 2 Massen, $Nm$ und $nm$, die Summe der Thätigkeiten $(N+n)m$; die Bestrebungen, mit welchen $Nm$ und $nm$ einander entgegenkommen, verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen, nämlich wie $n : N$.

Die absolute Gröfse der A. eines Massen-Elements kennen wir so wenig, als die eines Massen-Elements selbst. Wir wissen nur durch Erfahrung, dafs die Masse unserer Erde eine A. auf eine andere Masse ausübt, dafs diese in der Nähe der Erdoberfläche mit einem Wege von $15\frac{1}{2}$ preufs. Fufs in der ersten Secunde sich derselben nähert.

Zugleich geht aus dem Obigen No. 9, hervor, dafs diese Aeufserung der A. (der Schwerkraft) unserer Erde dieselbe bleibt, der fallende Körper mag von noch so kleiner oder noch so grofser Masse sein (Widerstand durch die atm. Luft unberücksichtigt), welches ich deshalb erwähne, weil ganz intelligente Leute mich schon allen Ernstes gefragt haben, wie es komme, dafs ein 2 Pfund wiegender Stein nicht doppelt so schnell falle, als ein Stein, der nur 1 Pfund wiegt.

Hat die Erde die Masse *M*, der fallende Stein die Masse *m*, so kommt *M* auch der *m* entgegen, allein *m* verschwindet gegen *M*, und selbst 1000 *m* gegen *M* verschwinden, die Bewegung der Erde gegen *m* oder 1000 *m* ist = Null zu setzen. Hörte die Centrifugalkraft des Mondes auf, so würde nicht allein der Mond auf die Erde fallen, sondern die Erde würde dem Monde ebenfalls entgegenkommen, und zwar, da die Masse der Erde das 87fache der des Mondes ist, mit

$\frac{1}{87}$ der Intensität, mit welcher der Mond nach der Erde hin sich bewegt.

10. Die Gröfse der Masse ist nicht das einzige Element der A., ein zweites Element ist die Entfernung der anziehenden von der angezogenen Masse, und Newton hat aus Schlüssen bei betrachteter Bewegung des Mondes um die Erde und der Planeten um die Sonne und aus Berechnungen das der gesammten Astronomie zu Grunde liegende A.-Gesetz entdeckt, dafs die Anziehungen sich verhalten umgekehrt, wie die Quadrate der Abstände zwischen beiden sich anziehenden Massen. Z. B. die Masse der Erde kann in ihrem Mittelpunkt vereinigt gedacht werden, und sie mufs es, wenn man das Ergebnifs deren A. auf frei fallende Körper in Betracht zieht.

Nun ist der Halbmesser der Erde etwa 860 Meilen, ein über der Erdoberfläche befindlicher Körper hat also von der Erdmasse einen Abstand von 860 Meilen. Die A. der Erdmasse in dieser Entfernung wirkt aber mit solcher Kraft, dafs ein Stein in der ersten Secunde um $15\frac{5}{8}$ Fufs sich ihr nähert. Denkt man sich denselben Stein 860 Meilen über der Erdoberfläche, so würde er zwei Mal so weit von der Erdmasse entfernt sein, und sein Fall würde in der ersten Secunde nur $\frac{1}{4} \cdot 15\frac{5}{8} = 3\frac{29}{32}$ Fufs betragen.

11. Die später zu entwickelnden Gesetze des Falles zeigen, dafs der Körper, welcher in der ersten Sec. $15\frac{5}{8}$ Fufs fällt, in der zweiten Sec. $= 3 \times 15\frac{5}{8}$ Fufs, in beiden zusammengenommen also $4 \times 15\frac{5}{8}$ Fufs, in der dritten Secunde $5 \times 15\frac{5}{8}$ Fufs, in allen dreien zusammengenommen also $9 \times 15\frac{5}{8}$ Fufs u. s. w. fällt, dafs überhaupt die Fallräume eines Körpers sich verhalten wie die Quadrate der von Anfang an verflossenen Zeiten; dafs z. B. ein Körper, in $9 \times 15\frac{5}{8} = 140\frac{5}{8}$ Fufs Höhe losgelassen, 3 Sec. braucht, um die Erdoberfläche zu erreichen. Dies Fallgesetz gehört nicht zu dem Gesetz der A., sondern ist eine Folge von 2 Wirkungen, 1) der Beständigkeit des A.-Vermögens der Erde und 2) dem Beharrungszustande eines Körpers während der Bewegung.

Es wird dies deshalb erwähnt, weil es scheinen könnte, als habe das eben gedachte Fallgesetz Zusammenhang mit dem A.-Gesetz, nach welchem die A. zwischen zwei Körpern mit dem Quadrat der Entfernungen direct abnimmt.

12. Um nun die Gröfse der A. anderer Weltkörper zu finden, sei der Halbmesser der Erde $= R$, deren Masse $= M$, beide Gröfsen eines anderen Weltkörpers $R'$ und $M'$; die Höhe, von der ein Körper in einer Secunde auf die Oberfläche der Erde fällt ($15\frac{5}{8}$ Fufs) $= G$, die des anderen Weltkörpers $= G'$, so ist:

$$\frac{M}{R^2} : \frac{M'}{(R')^2} = G : G'$$

Z. B. der Halbmesser der Erde ist 860 Meilen, der des Mondes 234 Ml., die Masse der Erde = 1 gesetzt, ist die des Mondes $= \frac{1}{87}$; $G = 15\frac{5}{8}$ Fufs. Daher

$$\frac{1}{860^2} : \frac{\frac{1}{87}}{234^2} = 15\frac{5}{8} : G'$$

woraus $G' = 2{,}42586$ Fufs = 2 Fufs 5 Zoll.

Denkt man sich, dafs Erde und Mond allein durch A. gegen einander wirken, so hat man den Fall des Mondes auf die Erde in der ersten Secunde bei der mittleren Entfernung der Mittelpunkte beider Körper von 51800 Meilen

$$g = \frac{860^2}{51800^2} \cdot 15\frac{5}{8} \text{ Fufs} = 0{,}0043068 \text{ Fufs}$$
$$= 0{,}6201792 \text{ Linien.}$$

und den Fall der Erde auf den Mond in der ersten Secunde

$$g' = \frac{234^2}{51800^2} \times 2\frac{5}{12} \text{ Fufs} = 0{,}000049316 \text{ Fufs}$$
$$= 0{,}0071015 \text{ Linien.}$$

13. Eine Aufgabe, die zur A. gehört, ist, zu bestimmen, in welchem Punkt zwischen Erde und Mond ein Körper eben so viel Neigung zum Fall auf die Erde als auf den Mond besitzt, so dafs er, von beiden Weltkörpern gleich stark angezogen, zu keinem von beiden sich bewegt und also in Ruhe bleibt.

Nennt man die Entfernung beider Weltkörper von Mittelpunkt zu Mittelpunkt L, setzt die Entfernung des Körpers von der Erde $= x$ Erdradien, von dem Monde $y$ Mondradien, so ist, da

$$\frac{M}{R^2} : g = \frac{M'}{(R')^2} : g'$$

$$\text{auch } \frac{M}{(xR)^2} : \frac{g}{x} = \frac{M'}{(yR')^2} : \frac{g'}{y}$$

die A.-Bedingungsgleichung ist also

$$\text{I. } \frac{g}{x} = \frac{g'}{y}$$

und die geometrische Hülfsgleichung

$$\text{II. } xR + yR' = L$$

aus I. den Werth $\frac{g'}{g} x$ für $y$ in II. gesetzt und entwickelt, giebt

$$x = \frac{g}{gR + g'R'} \cdot L$$

Nun ist $g = 15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs
$g' = 2\frac{5}{12}$ preufs. Fufs
$R = 860$ geogr. Meilen
$R' = 234$ geogr. Meilen
$L = 51800$ geogr. Meilen.

mithin

$$x = \frac{15\frac{5}{8}}{15\frac{5}{8} \cdot 860 + 2\frac{5}{12} \cdot 234} \times 51800$$
$$= 57{,}8001$$

und $y = \frac{2\frac{5}{12}}{15\frac{5}{8}} \cdot 57{,}8001 = 8{,}93975$

Die Entfernung von dem Mittelpunkt der Erde ist also

$57{,}8001 \times 860 = 49708$ geogr. Meilen,
und von dem Mittelpunkt des Mondes
$51800 - 49708 = 2092$ geogr. Meilen.

Die Anfangs-Geschwindigkeit des Körpers zum Fall gegen die Erde ist nun

$\frac{g}{x} = 0{,}27$ pr. Fuſs $= 3\frac{1}{4}$ pr. Zoll,

und gegen den Mond

$\frac{g'}{y} = 0{,}27$ pr. Fuſs $= 3\frac{1}{4}$ pr. Zoll,

14. Auch die ad 8 beobachtete Gröſse der A. einer Bergmasse läſst sich in Zahlen angeben: Hat nämlich die horizontal wirkende Bergmasse $m$ ein Pendel $ca$ um den $\angle bca = \alpha$ aus dem Loth $ca$ gelenkt,

Fig. 106.



so hat deren Kraft $A'$ offenbar den Weg $ad$ zurückgelegt. Die lothrecht wirkende Masse $M$ der Erde hat um den Weg $bd$ ihrer Kraft $A$ jener Kraft nachgegeben, und da 2 Kräfte $A$ und $A'$ im Gleichgewicht umgekehrt wie die von ihnen zurückgelegten Wege sich verhalten, so ist

$$A : A' = ad : bd$$
$$= \sin\alpha : \operatorname{sinvers}\alpha$$
$$= 1 : tg\frac{\alpha}{2}$$

Nun war $\alpha$ (No. 8) $= 5\frac{1}{2}''$, mithin ist
$A : A' = 1 : tg\, 2\frac{3}{4}'' = 1 : 0{,}00001333$

Ist nun der Abstand des Schwerpunkts der Masse $m = r$ Fuſs, der Halbmesser der Erde $R$, so hat man

$$\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} = 100000000 : 1333$$
$$= 75019 : 1$$

die A. des Berges ist also $\frac{1}{75019}$ der A. der Erde.

Hätte man durch genaue Nivellements die Form des Berges und aus dieser den Schwerpunkt ermittelt, betrüge dieser von dem Pendel $\frac{1}{2}$ Meile, also $= \frac{1}{1720} R$, so wäre die Masse $m$ des Berges

$$= \frac{1}{75019 \times 1720^2} \times M$$
$$= \frac{1}{221936 \text{ Million}}$$

der Masse der Erde.

**Atwood's Fallmaschine.** Ein Apparat, mit welchem die theoretisch erwiesenen Fallgesetze veranschaulicht werden: Ein vierkantiger, etwa 6 Fuſs hoher Ständer ist in Zolle und deren Unter-Abtheilungen getheilt; über demselben dreht sich eine metallene Scheibe um eine Welle in Lagern, in deren Höhlung läuft eine Schnur, die an beiden Enden mit Häkchen zur Aufnahme von Gewichten versehen ist. Sind beide Gewichte gleich groſs, so bleiben sie in jeder Lage in Ruhe, weil beide einerlei Bestreben haben, zu fallen, mithin keins von beiden fallen kann. Nimmt man das eine Gewicht fort, so fällt das andere vermöge der Schwerkraft der Erde in der ersten Sec. $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs, und nimmt man nur einen Theil des einen Gewichts fort, so wird das andere mit dem Ueberschuſs gegen das erstere Gewicht zur Uebərwucht, und fällt, da es von den Massen, die es theils mit herab-, theils mit hinaufziehen muſs, an dem freien Fall gehindert wird, in der ersten Secunde durch eine geringere Höhe als $15\frac{5}{8}$ Fuſs, die aber mit diesen in bestimmtem Verhältniſs steht.

Bei der groſsen Fallhöhe von $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs in der ersten Secunde kann der Apparat zur Veranschaulichung der Gesetze des freien Falles unmittelbar nicht dienen, sondern nur für die des durch eine Ueberwucht veranlaſsten beschränkten Falles; allein beider Gesetze sind einerlei:

Bei der auf alle Massen-Elemente eines Körpers gleich groſsen Einwirkung der Schwerkraft unserer Erde ist die Masse eines frei fallenden Körpers gleichgültig. Bezeichnet man also die Höhe $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs des frei fallenden Körpers in der ersten Sec. mit $g$, so ist diese Höhe (Beschleunigung genannt) beim beschränkten Fall $g' = \frac{p}{m} g$; wenn $p$ die Ueberwucht und $m$ die durch dieselbe bewegte Masse bezeichnen. Hat man z. B. an jedem Schnur-Ende ein Gewicht $q$ und man legt auf das eine noch ein Ge-

wicht $p$, so ist $p$ die Ueberwucht, $2q+p$ die zu bewegende Masse und $g' = \frac{p}{2q+p}\,g$

Es sind $15\frac{5}{8}$ pr. Fufs = 15 par. Fufs, daher man, um Brüche zu vermeiden, die Scala des Ständers in par. Maafs theilt. Hängt man nun an jedes Häkchen 7 Loth und legt dem einen 1 Loth an, so ist $g' = \frac{1}{2 \cdot 7 + 1}\,g = \frac{1}{15}g$ und die 8 Loth fallen in der ersten Sec. 1 Fufs, während die auf der anderen Seite befindlichen 7 Loth 1 Fufs steigen.

Die Rolle, die Reibung deren Wellzapfen in den Lagern und das Gewicht der Schnur sind ebenfalls Bewegungs-Hindernisse, die also als Masse gegenwirken; man nimmt daher diese beständig mit zu bewegenden Theile möglichst gering, sorgt besonders für einen möglichst geringen und constanten Reibungswerth, ermittelt den Werth dieser Hindernisse durch Fall-Versuche mit sehr kleinen $2q$ und $p$ und legt das diesem entsprechende kleine Gewicht der Ueberwuchtseite hinzu, so dafs der bewegliche Theil des Apparats vollständig balancirt ist.

Mit Beibehaltung der Ueberwucht = 1 und der Masse = 15 zeigt sich nun wirklich, dafs $g'$ genau 1 Fufs ist. Man hält nämlich das Gewicht $q+p$ mittelst einer Klemme an einem Punkt fest, dafs die Unterfläche des Gewichts genau mit einem Theilstrich der Scala übereinstimmt, schraubt einen Schieber mit dessen Oberfläche gegen den 1 Fufs tiefer liegenden Theilstrich, bewegt ein Secundenpendel, läfst genau mit einem Schlag desselben $q+p$ los, und genau mit dem folgenden Pendelschlag trifft es mit einem Schlag auf den Schieber.

Ein zweites Gesetz ist: Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der von Anfang an verflossenen Zeiten. Schraubt man nun den untern Schieber 4 Fufs tiefer als die Unterkante von $q+p$, so erhält man wirklich mit dem zweiten Pendelschlage den Schlag des Gewichts. Bei 3 Sec. Fallzeit müfste die Scala schon 9 Fufs Höhe haben; um also den Versuch für gröfsere Fallhöhen zu machen, mufs $\frac{p}{2q+p}$ geringer genommen werden.

Hängt man an eine Seite 22 Loth, an die andere 23 Loth, so hat man

$$\frac{p}{2q+p} = \frac{1}{2 \cdot 22 + 1} = \frac{1}{45}$$

und $g'$ ist $= \frac{1}{45}g = \frac{1}{3}$ Fufs = 4 Zoll. Man findet nun wirklich bestätigt, dafs $q+p$ fällt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| in 1 | Sec. | 4 | Zoll | Höhe |
| „ 2 | „ | 16 | „ | „ |
| „ 3 | „ | 36 | „ | „ |
| „ 4 | „ | 64 | „ | „ |

indem man die Unterkante von $q+p$ auf den Nullpunkt und die Oberkante des unteren Schiebers resp. auf 1' 4"; 3' und 5' 4" stellt.

Ein drittes Gesetz ist: Die Geschwindigkeit, die ein frei fallender Körper erlangt, ist = der Beschleunigung, multiplicirt mit der doppelten, zu seinem Fall verwendeten Zeit in Secunden, oder, wenn $c$ die Geschw., $t$ die Anzahl der Sec., die er von Anfang an gefallen, ist, so hat man

$$c = 2gt;$$

also bei beschränktem Fall

$$c' = 2g't$$

Das Gesetz über Geschwindigkeiten macht beim Studium die meiste Schwierigkeit: unter Geschwindigkeit eines in beschleunigter Bewegung begriffenen Körpers wird nämlich der Längenraum verstanden, den der Körper in der nächsten Sec. zurücklegen würde, wenn die bewegende Kraft während dieser Sec. zu wirken aufhörte. Nun kann man zwar den Fallraum in jeder einzelnen Sec. oder in einer noch kleineren Zeit beobachten, die Geschw. aber nicht abgesondert, weil dieselbe in dem Fallraum mit begriffen ist. Z. B. Ein Körper fällt in der ersten Sec. $g = 15$ Fufs, in 2 Sec. $4g = 4 \cdot 15 = 60$ Fufs, mithin ist er in der zweiten Sec. $3g = 45$ Fufs gefallen, in diesen $3g$ steckt nun die Geschw. $c$ mit.

Dafs aber die Geschw. am Ende der ersten Sec. $2g = 30$ Fufs gewesen ist, schliefst man folgendermafsen: Die Schwere ist eine beständige Kraft, sie wirkt also auf die Körper, sie mögen ruhen, oder, gleichviel mit welcher Schnelligkeit sich bewegen, gleich stark. Hat nun die Schwerkraft den Körper in der ersten Sec. $g = 15$ Fufs lang bewegt, so kann sie den Körper in der zweiten und in jeder folgenden Sec. ebenfalls nur $g = 15$ Fufs lang bewegen, er bewegt sich aber $3g = 45$ Fufs, und dieses Mehr von $2g = 30$ Fufs kann keine andere Ursach haben, als das Beharrungsvermögen, mit welchem der Körper die nach Verlauf einer Sec. erlangte Geschw. fortzusetzen das Bestreben hat.

Atwood ist es durch einen eben so sinnreichen als witzigen Einfall gelungen, diesen ebengedachten Schlufs als richtig zu bestätigen und die in allen Fallräumen

versteckten Geschwindigkeiten sichtbar zu machen.

Der Fall-Apparat wird nämlich zu diesem Behuf mit 2 Schiebern versehen, das Gewicht $q + p$ wird auf den Nullpunkt gestellt, der mittlere Schieber wird so gestellt, dafs es nach $t$ Secunden aufschlägt, dagegen hat der Schieber eine mittlere Oeffnung, welche $q$ durchläfst, das Ge-

Fig. 107.




wicht $p$ aber ist von gröfserem Durchmesser und wird durch den Schieber aufgefangen, und das Gewicht $q$ setzt den ferneren Weg ohne $p$, also ohne bewegende Kraft fort, und macht also in der folgenden Sec. einen Weg blofs vermöge seines Beharrungsvermögens, also mit der bei dem durchlochten Schieber erhaltenen Geschwindigkeit.

Ist, wie vorher, $q = 22$ Loth, $p = 1$ Loth, so wird $p$ auf $q$ gelegt, die Unterkante von $p$ auf Null gestellt und das Pendel in Schwung gesetzt. Steht nun die Ober kante des Schiebers auf 4 Zoll, so wird genau mit 1 Sec. Fall das Gewicht $p$ aufgefangen, und wird der untere zweite Schieber mit der Oberkante 8 Zoll tiefer gestellt, als die Unterkante von $q$, so schlägt mit dem folgenden Pendelschlage auch $q$ auf, wonach $c' = 2g' = 8$ Zoll erwiesen wird; denn $p$ ist mit Anfang der zweiten Sec. entfernt worden, und nur ein $q$ abwärts und ein $q$ aufwärts bleiben in Bewegung, also 2 Massen, die ohne hinzutretende Ueberwucht in Ruhe bleiben würden.

Steht der obere Schieber auf 16 Zoll, so schlägt $p$ mit dem zweiten Pendelschlage auf und $q$ mit dem dritten, wenn der untere Schieber 16 Zoll tiefer, also auf 32 Zoll Theilung steht, indem nun $c' = 2g't = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ Zoll ist.

Steht der obere Schieber auf 36 Zoll, so schlägt $p$ mit dem dritten Pendelschlage auf und $q$ mit dem folgenden vierten, wenn der untere Schieber 24 Zoll tiefer, also auf 5 Fufs Theilung steht, weil $c'$ jetzt $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ Zoll ist.

**Auffahrt** s. v. w. Appareille.

**Aufgabe** (Problem), ein Satz, der verlangt, einen Begriff, dessen Merkmale aus Lehrsätzen hervorgegangen sind, anschaulich zu machen.

Zählen und Numeriren gehören zu den Forderungssätzen, den Postulaten, denn ersteres beruht auf der Definition der Einheit und der Zahl, letzteres auf der des dekadischen Systems; Rechnen gehört zu den Aufgaben, weil es zufolge der Lehrsätze geschieht, die über die Werthe verschiedener Zahlen-Verbindungen vorher aufgestellt oder, wie in Elementarschulen, erzählend mitgetheilt werden. Zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen, ist ein Postulat, denn die Ausführung beruht auf der Definition der geraden Linie und dem Grundsatz: Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich. Aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck zu zeichnen, ist eine Aufgabe, denn die Ausführung (Auflösung) beruht aufser der Definition des Kreises, wonach alle Radien desselben Kreises gleich grofs sind, auch auf dem Lehrsatz: In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammengenommen gröfser als die dritte.

Jede Aufgabe verlangt eine Auflösung

und diese wieder einen Beweis für die richtige Erfüllung der von der Aufgabe ausgesprochenen Forderung.

**Aufgang und Untergang der Gestirne.** A. ist das Hervortreten des Gestirns in dem Horizont des Beobachtungsorts, von wo ab es sichtbar an der Himmelskugel einen Bogen beschreibt; U. ist der Augenblick, wo dies Gestirn den Horizont berührt und unter demselben verschwindet. Der A. und U. ist in Absicht auf die Erscheinung derselben dreierlei Art: der senkrechte, der schiefe und der horizontale.

2. Unter dem Aequator gehen alle Gestirne senkrecht auf und unter, alle beschreiben Halbkreise und sind (die Strahlenbrechung außer Acht gelassen) 12 Stunden über dem Horizont sichtbar und 12 Stunden unter dem Horizont unsichtbar. Die in der Aequator-Ebene befindlichen Gestirne gehen zugleich durch's Zenith, wie die Sonne, wenn sie in den Nachtgleichen steht; die übrigen Gestirne beschreiben um so kleinere Halbkreise, je weiter sie von dem Aequator abstehen, der nördliche Polarstern also den kleinsten Halbkreis, nur ein in der Welt-Axe stehendes Gestirn würde einem Ort unter dem Aeq. weder auf- noch untergehen, und bis auf diesen werden alle an der Himmelskugel befindlichen Gestirne sichtbar.

In Fig. 1, pag. 2 (Art. Abendweite), ist das Gesagte in einer mit der Erdaxe parallelen Ebene dargestellt: Beschreibt das im Aeq. befindliche Gestirn $S$ den Halbkreis vom Durchmesser $Qq$ und geht durch die Zenithe aller in der Ebene $QCq$ belegenen Orte, so beschreibt das unter der südlichen Abweichung $FQ$ stehende Gestirn $S''$ den Halbkreis vom Durchmesser $FG$, erscheint während seiner ganzen sichtbaren Bewegung vom Aeq. $Qq$ um den $\angle FCQ$ entfernt, und seine Höhe zu Mittage ist $\angle FCP'$. Je näher das Gestirn dem Südpol steht, desto kleiner wird der von ihm beschriebene Halbkreis, desto weiter erscheint es vom Aequator entfernt und desto geringer ist seine Mittagshöhe. Ein Gestirn in der Richtung $CP'$ würde den Halbkreis vom Durchmesser = Null beschreiben, seine Höhe zu Mittag wäre $\angle P'CP' =$ Null, es wäre also das einzige Gestirn der südlichen Halbkugel, das dem Bewohner des Aeq. unsichtbar bliebe.

Das Gestirn $S'$ unter der nördlichen Abweichung $BQ$ beschreibt den Halbkreis vom Durchmesser $BD$, erscheint in der Entfernung $BQ$ vom Aeq., seine Mittagshöhe ist $\angle PCB$; ein Gestirn in der Richtung $CP$, also unter der Abw. $QP=90°$, wie in $CP'$.

3. Zwischen dem Aeq. und den Polen gehen alle Gestirne schief auf und unter.

Zwischen den Wendekreisen hat jeder Ort zwei Mal im Jahr die Sonne zu Mittag im Zenith, zu welchem sie in schiefem Quadrant aufsteigt und von dort eben so wieder absteigt.

Dieselbe Erscheinung haben diese Orte und die zu beiden Seiten der Wendekreise noch $5\frac{1}{4}°$ weiter liegenden zu verschiedenen Zeiten mit dem Monde.

Ein Ort $O$ (Fig. 1), z. B. in der nördlichen Halbkugel unter der geogr. Breite $CO$, der sich bei der Rotation der Erde, also in dem Parallelkreise $MA$ herumdreht, hat den A. und U. eines im Aeq. stehenden Gestirns $S$ (also die Sonne am 21. März und 23. Septbr.) in dem Punkt $M$ um 6 Uhr Morgens und in $A$ um 6 Uhr Abends. $Zz$ ist der Horizont von $O$, zu Mittag hat also die Sonne die Höhe $ZMs$ (Mittagshöhe der S., zugleich Aequatorhöhe) $= \angle MCP =$ Bogen $MP$ (Zenithdistanz vom Nordpol) und die Entfernung der S. zu Mittage vom Zenith ist der $\angle$, den $sM$ mit der verlängerten $CM$ bildet, $= \angle QCM$, (der geogr. Breite des Orts $O$) $= \angle sMp$ (der Polhöhe des Orts); die Sonne beschreibt also in Folge der schiefen Richtung $Zz$ des Horizonts einen schief liegenden Halbkreis.

Ein Gestirn $S''$ der südlichen Halbkugel würde erst sehr spät für $O$ aufgeben. Um 6 Uhr Morgens, wo es noch unter dem Horizont steht, hat es die Richtung $OM''$, Abends 6 Uhr die Richtung $OA''$; es erhebt sich bis Mittag, wo es in der Richtung $OP'$ in dem Meridian steht, nur wenig über dem Horizont, wovon man sich überzeugt, wenn man von $M$ aus eine Parallele mit $OM''$ zieht, geht erst zwischen $F$ und $P'$, nahe an $P'$ auf, und eben so nahe an $P'$ nach $G$ hin gerichtet unter.

Ein Gestirn $S'$ in der nördlichen Halbkugel hat in $O$ Morgens 6 Uhr die Richtung $OM' \# CS'$, Abends 6 Uhr die Richtung $OA$. Es geht aber zwischen $M'$ und $P$ früher auf und zwischen $A'$ und $P$ später unter, seine Mittagshöhe ist der fast rechte Winkel, den $Zz$ mit $Os'$ bildet, das Gestirn steht also zu Mittag nur wenig südlich vom Zenith entfernt.

4. Die horizontalen A. und U. finden in den Polen $P$ und $P'$ statt, und zwar nur für die zu unserem Sonnensystem gehörenden Körper. Fixsterne gehen weder auf noch unter: die Gestirne in der mit dem Pol gleichnamigen Halbkugel bewegen sich in horizontalen constanten

Kreisen, deren Höhen vom Horizont ihren Abweichungen gleich sind, alle 24 Stunden einmal herum; die der südlichen Halbkugel bleiben unsichtbar. Die Sonne, die Planeten und Monde bleiben dem Nordpol unsichtbar, so lange sie in der südlichen Halbkugel stehen; sowie sie in den Aeq. treten, um in die nördliche Halbkugel aufzusteigen, werden sie im Horizont sichtbar, bewegen sich horizontal herum und steigen immer höher. In dem Art. Astronomischer Horizont, No. 7, pag. 147, ist das Auf- und Niedersteigen der Sonne beschrieben; sowie nach einem halben Jahr die Sonne wieder in den Aeq. hinabsteigt, findet deren U. in fast horizontaler Richtung statt. Eben so geht der Mond auf, bleibt ½ Umlaufszeit über dem Horizont, geht unter und verschwindet während der anderen Hälfte der Umlaufszeit.

5. Man kann also die dreierlei A. und U. folgender Art zusammenfassen:

1) Unterm Aeq. laufen sämmtliche Gestirne sichtbar in Halbkreisen, die senkrecht auf dem Horizont stehen.

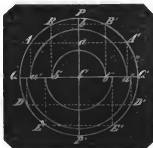
2) Unter jedem der Pole laufen die in gleichnamiger Halbkugel befindlichen Gestirne sichtbar in ganzen Kreisen, die mit dem Horizont ∓ laufen.

3) In Orten zwischen dem Aeq. und den Polen laufen sämmtliche Gestirne sichtbar in schiefen Kreisbogen; für Gestirne im Aeq. sind die Bogen Halbkreise, für Gestirne in der mit dem Ort gleichnamigen Halbkugel sind die Bogen gröſser, für die in der ungleichnamigen Halbkugel befindlichen Gestirne kleiner als Halbkreise.

6. Man kann für jeden Ort $O$ der Erde und für jedes Gestirn die Bahn, die es scheinbar alle 24 Stunden durchläuft, construiren; man erhält nur Kreise oder Ellipsen. Es hat dies aber nur Interesse, wenn man zugleich den Tagebogen, den Nachtbogen der Bahn abtheilen und noch andere ausgezeichnete Punkte darin verzeichnen kann.

Bedentet $QPQ'P'$ die Himmelskugel von unendlichem Halbmesser, so kann die Erde bei einem Halbmesser von 860 Meilen, der dagegen verschwindet, mit dem Punkt $C$ zusammenfallend gedacht werden, und da scheinbarer und wahrer Horizont desgleichen zusammenfallen (vergl. astr. Horizont), so ist für jeden Bewohner des Aeq. $QQ'$ die Linie $PP'$ die Durchschnittslinie des Horizonts. Bewegt sich der Himmel scheinbar um $PP'$ von $Q$ über $C$ nach $Q'$, und man denkt sich den Kreis $QPQ'P$ als die Ebene des Horizonts so sind $Q$, $A$, $B$, $D$, $E$ die Aufgangspunkte und $Q'$, $A'$, $B'$, $D'$, $E'$ die Untergangspunkte der in den Parallelkreisen $QQ'$, $AA'$ .... befindlichen

Fig. 108.




und sich bewegenden Gestirne. Denkt man sich $PP'$ als Horizont, den Halbkreis $PQP'$ als den senkrecht darüber und $PQ'P$ als den senkrecht darunter befindlichen Halbkreis, so sind $Q$, $A$, $B$, $D$, $E$ die Culminationspunkte der gedachten Gestirne, deren Höhen $CQ$, $Aa$, $Bb$...., diese nach Norden, die Gestirne in $D$, $E$.... nach Süden immer weiter vom Zenith $Q$ abstehend. Denkt man sich endlich durch $C$ den Horizont gelegt und $QPQ'$ als darüber befindliche Verticalebene, so hat man in dem Halbkreis $QPQ'$ die sichtbare Bahn eines im Aeq. befindlichen Gestirns. Die Projectionen $a'$ von $A$, $b'$ von $B$.... sind die Aufgangspunkte; die Projectionen $a'$ von $A'$, $b'$ von $B'$ die Untergangspunkte der in den Parallelkreisen $AA'$, $BB'$.... sich bewegenden Gestirne, und die Halbkreise über $a'a''$, $b'b''$.... die sichtbaren Bahnen der in der nördlichen Halbkugel befindlichen Gestirne, wie die von $QQ'$ nach $P'$ gerichteten die der südlichen Halbkugel. Die von $P$ und $P'$ auf $QQ$ genommenen Projectionen fallen in dem Punkt $C$ zusammen und geben keinen Kreis. Hiermit sind geometrisch die Bahnen der Gestirne für Bewohner des Aeq. nachgewiesen.

7. Die Bahnen der Gestirne für die zwischen dem Aeq. und den Polen befindlichen Bewohner verzeichnet man folgender Art; auch kann man den Tagebogen von dem Nachtbogen trennen und sonst bemerkbare Punkte in der Bahn angeben.

Bedentet $APMP'$ den Durchschnitt der Himmelskugel, ziehe durch deren Mittel-

punkt $C$ die sich normal schneidenden Durchmesser $MA$, $PP'$, zeichne $\angle MCQ =$ der Aequatorhöhe des Orts, ziehe $QQ' \parallel MA$, nimm $CN = CS$, so ist $MA$ die große, $SN$ die kleine Axe der Ellipse, in der die Kreisbahn eines jeden Gestirns gegen die Lothrechte des Orts in Projection erscheint. Ist also die halbe große Axe $CM = 1$, so ist die halbe kleine Axe $CS =$ dem *Sin* der Aequatorhöhe des Orts.

Fig. 109.

Zeichnet man $\angle MCH =$ der mit dem Ort gleichnamigen Abweichung des Gestirns, zieht $HH' \parallel MA$, so ist $HH'$ der Horizont, Bogen $EMSAF$ der sichtbare Tagebogen; Bogen $ENF$ der unsichtbare Nachtbogen.

In $E$ geht das Gestirn auf, in $M$ steht es Morgens 6 Uhr, in $S$ zu Mittag, in $A$ Abends 6 Uhr, in $F$ geht es unter, in $N$ steht es zu Mitternacht, Bogen $HMQ$ ist seine Mittagshöhe über dem Ort, Bogen $HB$ seine Mitternachtstiefe.

Für Berlin ist $QM = 37° 28' 30''$; ist $MH = 23\frac{1}{2}°$, so ist die Ellipse die scheinbare Bahn der Sonne am 21. Juni; legt man $MH$ von $M$ nach $Q$ hin, so erhält man oberhalb $MA$ den Horizont. Man hat sich also nur $N$ als Mittags-, $S$ als Mitternachtspunkt zu denken, so steht die Sonne 6 Uhr Morgens in $M$ und Abends 6 Uhr in $A$ unter dem Horizont; nach 6 Uhr Morgens geht die Sonne in $E$ auf und vor 6 Uhr Abends in $F$ unter, Bogen $HB$ ist ihre Mittagshöhe, $ENF$ ihr Tagebogen, $EMSAF$ ihr Nachtbogen.

Ist am 21. Juni der Ort $O$ im nördlichen Wendekreise, so ist $HH'$ der Horizont, die Aequatorhöhe $MQ$ wird $66\frac{1}{2}°$, um so viel rückt $S$ höher, $N$ tiefer. Hat ein Gestirn $37° 28' 30''$ nördliche Abweichung, dann fällt $H$ in $B$, für Berlin ist $BD$ der Horizont und $N$ der einzige tangirende Punkt der Gestirnbahn in demselben.

8. Die Auf- und Untergangspunkte mit den Morgen- und Abendweiten lassen sich geometrisch in der Kreisbahn des Gestirns auf folgende Weise construiren.

In dem Art. Abendweite ist pag. 3 mit Hülfe von Fig. 2 erwiesen, daſs

$$\sin \left\{ \begin{matrix} \text{Morgenweite} \\ \text{oder} \\ \text{Abendweite} \end{matrix} \right\} = \frac{\sin \text{Abweichung}}{\sin \text{Aequatorhöhe}}$$

In Fig. 110, in welcher die Fig. 1 stehenden Buchstaben übereinstimmen, sei $C$ der Erdmittelpunkt, $Qq$ der Aeq., $CB$ die Richtung des Gestirns $S'$, $O$ der Ort der Erde, für welchen die Construction geschieht, so ist $\angle QCB\ (w)$ die nördliche Abweichung von $S'$ und, wenn $OM \parallel Qq$, $\angle OCM\ (h)$, die Aequatorhöhe von $O$. Bezeichnet man den Halbmesser $CQ$ mit $r$, so ist $BR = r \sin w$; ziehe $BD \parallel Qq$, $CE$ normal auf $CM$, so ist $\angle qCE = \angle PCM = h$. Fällt man nun aus dem Durchschnittspunkt $H$ zwischen $BD$ und $CE$ das Loth $HI$, so ist

$$HI = BR = r \sin w, \text{ aber auch}$$
$$HI = CH \sin h$$
$$CH = r \frac{\sin w}{\sin h}$$

folglich ist $CH = r \cdot \sin$ Morgenweite. Beschreibt man daher aus $C$ den Bogen $HK$, zieht $KL \parallel Qq$, so ist das Loth

$$LN = r \sin LCQ$$
$$= r \cdot \sin \text{Morgenweite},$$

folglich ist $\angle LCQ =$ Bogen $LQ$ die Morgenweite und die Abendweite des Gestirns $S'$ für den Ort $O$, und zieht man $OM' \parallel LC$, so ist $OM'$ die Richtung, in der $S'$ aufgeht, und $Os' \parallel CS'$ die Richtung, in der es Morgens 6 Uhr steht.

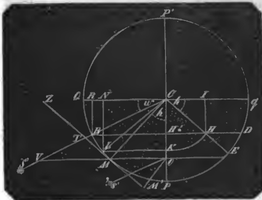
Jeder Halbkreis, also auch $QP'q$ stellt den Bogen vor, den das Gestirn $S'$ von 6 Uhr früh bis 6 Uhr Abends zurücklegt, also $QP'$ den Quadrant von 6 Uhr früh bis Mittag, mithin ist Bogen $LQP'$ der Bogen vom Aufgang bis Mittag, und $\angle \frac{LCQ}{90°} \times 6$ Stunden die Zeit, um welche das Gestirn vor 6 Uhr früh aufgeht. Ferner ist $LP$ der halbe Nachtbogen und $\frac{LCP}{90°} \times 6$ Stunden die halbe Nachtzeit von $S'$.

Hat $S'$ südliche Abweichung, so erhält man für $O$ in der nördlichen Halbkugel durch dieselbe Construction $QP$ den Bogen, den $S'$ in 6 Stunden zurücklegt, $QL$ den Bogen, um den es später als 6 Uhr aufgeht, $LP$ den halben Tagebogen und $LQP'$ den halben Nachtbogen.

Mit dieser Construction ist zugleich das bisher und im Art.: „Abendweite" Vorgetragene figürlich bestätigt und nachgewiesen, daſs wenn ein Gestirn für einen

Ort auf- und untergehen soll, die Aequatorhöhe des Orts > sein mufs als die Abweichung des Gestirns, denn die Construction verlangt einen Durchschnittspunkt $H$ zwischen $BD$ und $CE$. Für $\angle h = \angle w$ fällt $H$ in die Peripherie, z. B. in $D$ oder in $E$; zeichnet man nun den Bogen $HK$ von $H$ in die Richtung $CP$, so fällt $K$ in $P$, die Morgenweite ist $QP$,

Fig. 110.



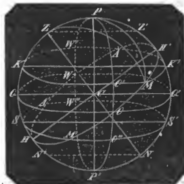

die Abendweite $qP$; das Gestirn tangirt zu Mitternacht den Horizont, sein Tagebogen ist 360°, es ist der äufserste Circumpolarstern. Fällt $H$ aufserhalb der Peripherie, ist $h$ also kleiner als $w$, liegt also $O$ dem Pol näher als $S'$ dem Aeq., so bleibt $S'$ auch zu Mitternacht über dem Horizont von $O$. Ist $\angle h =$ Null, liegt also $O$ in $P$ oder $P'$, so fällt $H$ in $Qq \neq BD$; es ist kein Durchschnittspunkt zwischen beiden Linien, also auch keine Morgen- und keine Abendweite möglich ($\sin$ Morgenweite $= \frac{\sin w}{0} = \infty$), das Gestirn bleibt unter dem $\angle QCS'$ über dem Horizont von $P$. Ist $\angle h = 90°$, d. h. liegt $O$ in $Qq$, so fällt $H$ in $H'$, die Morgenweite ist $= QB = w$ ($\sin$ Morgenweite $= \frac{\sin w}{\sin 90°} = \sin w$).

**9. Die Elemente für die Construction schief liegender Bahnen erhält man am klarsten mit Hülfe einer perspectivischen Zeichnung.**

Ein Ort $o$, z. B. Berlin, liege zwischen dem Aeq. und dem Nordpol unter der geogr. Breite $QCZ$, so ist auf der der Erdkugel concentrischen Himmelskugel $QPQ'P'$ der Kreis vom Durchmesser $ZZ'$ der dem Ort $o$ entsprechende Parallelkreis, und zwar zugleich der geometrische Ort sämmtlicher Zenithe, welche der Ort $o$ während seiner 24stündigen Umwälzung um $PP'$ hinter einander erlangt, so wie der Kreis $NN'$ der geometrische Ort sämmtlicher Nadire von $o$. Die Normale $HH'$ durch $C$ auf $ZN$ ist der Horizont von $o$, der sich innerhalb der durch $H$ und $H'$ zu denkenden Parallelkreise ebenfalls 24stündlich um $PP'$ herumdreht. Denkt man sich jedoch den Horizont $HH'$ von $o$ festliegend, dann bleibt $Z$ das Zenith, $N$ das Nadir von $o$, und die Himmelskugel dreht sich scheinbar alle 24 Stunden von Ost nach West, hier z. B. von $Q'$ über $C$ nach $Q$ um $PP'$ herum.

Der Horizont $HH'$ und der Aequator $QQ'$ schneiden sich in der Linie $OW$; da beide gröfste Kreise sind, so halbiren sie einander, und $OQW = WQ'O = OHW = WH'O = 180°$. Ein im Aeq. befindliches Gestirn tritt, von $Q'$ kommend, in $O$ über den Horizont, es g e h t a u f; in $W$ tritt es unter den Horizont, es g e h t u n t e r; $O$ ist der Ostpunkt, $W$ der Westpunkt, der Tagebogen $OQW$ ist gleich dem Nachtbogen $WQ'O$ und jeder wird in 12 Stunden beschrieben. Dies geschieht

Fig. 111.



also von der Sonne an den Tagen der Nachtgleichen am 21. März und 23. Septbr., die Sonne hat zu Mittage in $Q$ die Höhe $QH$ = der Aequatorhöhe = 90° − geogr. Breite, und die Bahn der Sonne ist zu construiren durch eine Ellipse, in welcher $QC$ die halbe große Axe und die Normale von $Q$ auf $HH'$, also *sin* Aequatorhöhe die halbe kleine Axe ist, und die große Axe als Horizont trennt den Tagebogen von dem ihm gleichen Nachtbogen. Für Berlin wird die halbe große Axe = 1, die halbe kleine = *sin* 37° 28′ 30″

Legt man durch $POP'W$ einen größten Kreis, so theilt dieser die Himmelskugel für den Ort $o$ der Erdoberfläche in eine südliche und in eine nördliche Halbkugel. Alle Gestirne, die in Parallelkreisen, wie in dem Kreise $KMK'A$ laufen, haben in dem Halbkreis $POP'$ den östlichsten Stand, in dem Halbkreise $PQP'$ den südlichsten, in dem Halbkreise $PWP'$ den westlichsten und in dem Halbkreise $PQ'P'$ den nördlichsten Stand; ein innerhalb des Kreises $KK'$ befindliches Gestirn steht also in $O'$ im Ostpunkt, in $W'$ im Westpunkt des Ortes $o$; ein im Kreise $SS'$ befindliches Gestirn steht in $O''$ im Ostpunkt und in $W''$ im Westpunkt des Ortes $o$.

Das in der nördlichen Halbkugel $QPQ'$ im Kreise $KK'$ befindliche Gestirn geht aber schon in $M$ vor dem Ostpunkt auf und erst in $A$ hinter dem Westpunkt unter, sein Tagebogen $MKA$ ist > als sein Nachtbogen $AK'M$; das in der südlichen Halbkugel $QPQ'$ im Kreise $SS'$ befindliche Gestirn geht erst nach dem Ostpunkt in $M'$ auf und schon vor dem Westpunkt in $A'$ unter, sein Tagebogen $M'SA'$ ist kleiner als sein Nachtbogen $A'S'M'$.

$MO'$ ist die Morgenweite, $AW'$ die ihr gleiche Abendweite des nördlichen, $M'O''$ die Morgenweite, $A'W''$ die ihr gleiche Abendweite des südlichen Gestirns für den Ort $o$ der Erde.

10. Aus der gegebenen Aequatorhöhe $QH$ des Orts $o$ und der Abweichung $QK$ eines Gestirns $s$ läßt sich auch der halbe Tagebogen, nämlich der Bogen $MOH$, den $s$ vom Aufgang bis Mittag beschreibt, finden, wenn man den Kreisbogen $PM$ zeichnet und den Stundenwinkel, den $PM$ mit dem Bogen $PZKQH$ bildet, also den $\angle ZPM$ ermittelt. Zeichnet man daher den Bogen $ZM$, so ist in dem schiefwinkligen sphärischen $\triangle PZM$

$$\cos ZPM = \frac{\cos ZM - \cos ZP \cdot \cos PM}{\sin ZP \cdot \sin PM}$$

Ist aber $M$ der Aufgangspunkt von $s$ für $o$, so hat offenbar $M$ einen Abstand = 90° vom Zenith $Z$ über $o$, d. h. $\angle ZCM$, den $Z$ und $M$ mit dem Mittelpunkt $C$ der Erd- oder Himmelskugel bilden, ist 90°, mithin Bogen $ZM = 90°$, es ist $\cos ZM$ = Null und

$$\cos ZPM = -\cot ZP \cdot \cot PM$$
$$= -\cot QH \cdot \operatorname{tg} KQ$$

Nun ist $ZPM$ ($P$) der Stunden∠, d. h. der ∠, der sich zu 360° verhält wie die Zeit, in welcher der Bogen $MO'K$ durchlaufen wird, zu 24 Stunden, und man hat

$$\cos \text{Stunden}\angle = -\cot \text{Aequatorhöhe} \times \operatorname{tg} \text{Abweichung}.$$

Z. B. für Berlin am längsten Tage

$$\cos P = -\cot 37° 28' 30'' \times \operatorname{tg} 23° 30'$$

Es ist

$$\log \cot 37° 28' 30'' = 10,1154120 - 10$$
$$\log \operatorname{tg} 23° 30' = 9,6383019 - 10$$
$$\log - \cos P = 9,7537139 - 10$$
$$\text{woraus } 180° - P = 55° 26' 49''$$
$$\text{mithin } P = 124° 33' 11''$$

11. Es ist Bogen $HZP = 37° 28' 30'' + 90° = 127° 28' 30''$, $MOH$ der Bogen im Horizont vom Sonnen-Aufgang bis Mittag, $\angle HPM$ der Stunden∠ = 124° 33′ 11″, $\angle PHM$ (der ∠ zwischen dem Meridian und dem Horizont) = 90°.

Man hat also in dem rechtwinkl. sphär. $\triangle PHM$ den Bogen $HM$ aus

$$\operatorname{tg} HM = \sin PH \cdot \operatorname{tg} HPM$$
$$\sin 127° 28' 30'' = \sin 52° 31' 30''$$
$$\operatorname{tg} 124° 33' 11'' = -\operatorname{tg} 55° 26' 49''$$
$$\log \sin 52° 31' 30'' = 9,8996120 - 10$$
$$\log \operatorname{tg} 55° 25' 49'' = 10,1620044 - 10$$
$$\log(-\operatorname{tg} HM) = 10,0616164 - 10$$
$$\text{hieraus } 180° - HM = 49° 3'$$
$$\text{also } HM = 130° 57'$$
$$\text{hiervon } HO = 90°$$
$$\text{bleiben } 40° 57'$$

für die Morgenweite, wie sie pag. 3 gefunden worden ist.

12. Die Mittagshöhe eines Gestirns in $KK'$ ist Bog. $KH = QH + QK$ = Aequatorhöhe des Orts + Abweichung des Gestirns; die Mitternachtshöhe = $K'H' = Q'H' - Q'K'$ = Aequatorhöhe − Abweichung. Die Summe der Mittagshöhe und der Mitternachtshöhe eines Gestirns ist also = der doppelten Aequatorhöhe des Orts, unabhängig von der Abweichung und folglich für jedes Gestirn, aber nur für denselben Ort der Erde dieselbe.

Die Mittagshöhe eines in $SS'$ sich bewegenden Gestirns ist $SH = QH - QS$ = Aequatorhöhe − Abweichung; die Mitternachtshöhe = $S'H' = Q'H' + Q'S'$ = Aequatorhöhe + Abweichung.

Für $QK = QH$ wird die Mitternachtshöhe = Null, das Gestirn ist der äußerste Circumpolarstern; für $QH = QS$ ist die Mittagshöhe = Null, das Gestirn tangirt

zu Mittage unterhalb den Horizont. (Vergl. astronomische Dämmerung, No. 5 und 6.)

**Aufgang und Untergang der Gestirne, poetischer.** So genannt, weil derselbe von den alten griechischen und römischen Dichtern uns überliefert worden ist. Diese A. und U. waren den Alten für die nothwendigen landwirthschaftlichen Verrichtungen unser heutiger Kalender, der damals bei den nur mangelhaften astronomischen Kenntnissen anders nicht existiren konnte.

Da nämlich die Fixsterne in den auf einander folgenden Tagen immer einen anderen Stand gegen den der Sonne haben, so dienten die A. und U. der Sonne als Fundamentalpunkte für die Zeitmessung, und die Zeit selbst wurde in der Anzahl der Tage festgestellt, in welcher dieser und jener Fixstern mit dem A. oder U. der Sonne zugleich auf- oder unterging.

So z. B. war der Anfang des Pharaonischen Jahres bei den Aegyptern in dem Augenblick, wo der Sirius mit der Sonne zugleich aufging, weil hiermit die fruchtbare Ueberschwemmung des Nils begann, und welches 365¼ Tage dauerte.

Man unterschied 3 verschiedene A. und 3 verschiedene U.

1) Kosmischer A. (ortus cosmicus), wenn ein Stern mit der Sonne zugleich aufgeht.

2) Kosmischer U. (occasus cosmicus), wenn der Stern mit dem Aufgang der Sonne zugleich untergeht.

3) Akronyktischer A. (ortus acronyctus), wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich aufgeht.

4) Akronyktischer U. (occasus acronyctus), wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich untergeht.

5) Heliacischer A. (ortus heliacus), wenn der Stern etwas früher aufgeht als die Sonne und aus den Sonnenstrahlen hervorrückt.

6) Heliacischer U. (occasus heliacus), wenn der Stern etwas später untergeht als die Sonne, sich also in deren Strahlen verbirgt.

**Aufgehen** beim Subtrahiren und Dividiren, wenn kein Rest bleibt, im ersten Fall also geht die Rechnung auf, wenn Minuend und Subtrahend gleich sind, im zweiten Falle, wenn der Divisor ein aliquoter Theil des Dividendus ist.

**Aufhängepunkt** am Pendel und an der Waage ist derjenige Punkt der festen Drehaxe, welcher mit den Richtungslinien der wirkenden Kräfte in einerlei Ebene liegt.

**Aufheben der Brüche** s. v. w. Abbreviren der Brüche (s. d.). Bisweilen ist es nothwendig, einen in Buchstaben ausgedrückten Bruch aufzuheben, wenn derselbe z. B. für bestimmte Zahlen, welche der Bedingung angemessen sind, einen unbestimmten Werth z. B. $\frac{0}{0}$ giebt.

Der Bruch sei $\frac{2a^2+3ab-2b^2}{6a^2-5ab+b^2}$

Dieser giebt für $b=2a$ den Werth $\frac{0}{0}$, und wenn die Bedingung $b=2a$ eine der Natur der Sache angemessene ist, so kann diese Unbestimmtheit nur daher rühren, dafs in Zähler und Nenner ein gemeinschaftlicher, für $b=2a$ Null werdender Factor vorhanden ist.

Um diesen aufzufinden, dividire (allgemein gültig) den Nenner durch den Zähler, so erhält man

$$\frac{6a^2-5ab+b^2}{2a^2+3ab-2b^2}=3-7b\cdot\frac{2a-b}{2a^2+3ab-2b^2}$$

Dividire wieder den Nenner des Restes durch den Zähler, so erhält man

$$\frac{2a^2+3ab-2b^2}{2a-b}=a+2b$$

Es ist mithin $2a-b$ ein gemeinschaftlicher Factor.

Es ist $\frac{2a^2+3ab-2b^2}{6a^2-5ab+b^2}=\frac{(2a-b)(a+2b)}{(2a-b)(3a-b)}$
$=\frac{a+2b}{3a-b}$

und für $b=2a$ ist der Werth des Bruches $=5$.

**Auflösung einer Aufgabe.** Die Ausführung der von der Aufgabe ausgesprochenen Forderung. Die A. einer geometrischen Aufgabe geschieht synthetisch durch Zeichnung, analytisch durch Rechnung; die A. einer Gleichung algebraisch (s. Algebra, algebraische Auflösung, Gleichung, 6 etc., Analytisch etc.)

**Auflösungskraft** (Chemie) s. u. Anziehung.

**Aufnehmen.** (Feldmefsk.) einer Fläche Landes. Die Vermessung derselben mittelst Mefs-Instrumenten, oder auch, wenn die Fläche nicht sehr ausgedehnt, ziemlich eben ist, und wenn keine grofse Genauigkeit verlangt wird, durch Abschreiten. Die Hauptsache bei jedem A. ist die Abtheilung der Fläche in zusammenhangende Dreiecke, weil diese Figur der wenigsten Bestimmungsstücke (nur 3) für ihre richtige Verzeichnung bedarf. Kleine Flächen, einzelne Morgen, theilweise Feldmarken können ohne Hülfe von Winkel-Instrumenten, also blofs durch Kette und Stäbe vermessen werden (Ba-

eulometrie). Hier hat man das erste △ in seinen 3 Seiten einzeln en vermessen, die folgenden, damit verbundenen Dreiecke jedes nur in 2 Seiten.

Bei ausgedehnteren Aufnahmen, wo eur Vermeidung oder Verminderung von Fehlern, die bei der Unvollkommenheit jedes Mefs-Instruments unvermeidlich sind, möglichst grofse Haupt-Dreiecke, also lange Hauptlinien abzustecken sind, hat man Winkel-Instrumente nöthig (Boussole, Astrolabium, Sextant, Theodolit); bei unebenem Terrain müssen die vermessenen Linien auch nivellirt werden, weil die Zeichnung der vermessenen Erdfläche in horizontaler Projection darzustellen ist.

Grofse Länderstrecken werden triangulirt, d. h. es wird nur eine einzige gerade möglichst lange Linie und sehr genau wirklich vermessen, und von deren Endpunkten aus nur die Winkel, welche diese Linie mit anderen zu Dreiecken vereinigt; diese Linien werden trigonometrisch berechnet, aus deren Endpunkten wieder die ∠ neuer Linien als Seiten zu neuen anschliefsenden Dreiecken gemessen, diese Seiten trig. berechnet u. s. f. Das zwischen den gedachten Seiten des Dreiecknetzes befindliche Terrain wird speciell vermessen und in die Dreiecke eingetragen.

**Aufschlagewasser.** Das unmittelbar vor einem Mühlrade stehende und auf dasselbe geleitete Wasser, um durch Stofs oder Druck die mit dem Rade verbundenen Widerstände zu überwinden und durch Umdrehung desselben die Mühle zu betreiben.

**Aufsteigender Knoten** (☊) s. u. absteigender Knoten (pag. 17).

**Aufsteigende Reihe**, eine Reihe von der Form

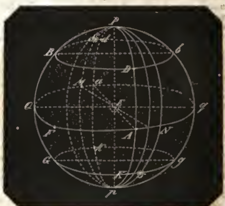
$$a \pm bx \pm cx^2 \pm \ldots . wx^n$$

in welcher also die Exponenten der Grundzahl in den auf einander folgenden Gliedern zunehmen. (Vergl. absteigende Reihe, pag. 17.)

**Aufsteigendes Zeichen** s. u. absteigendes Zeichen (pag. 18).

**Aufsteigung und Absteigung eines Gestirns.** Aufsteigung ist der Punkt des Aequators, der für einen Ort der Erde mit dem Gestirn zugleich aufgeht, sowie Absteigung (s. d. pag. 18) derjenige Punkt des Aequators, der mit dem Gestirn zugleich untergeht. Beide Punkte werden durch die Länge des Bogens angegeben, in welchem sie von dem Frühlingspunkt als Nullpunkt und von diesem ab von Abend nach Morgen gemessen abstehen.

Fig. 112.




Es sei auf der Himmelskugel, $Qq$ der Aequator, $P$ der Nordpol, $p$ der Südpol, so ist der Kreis $PDAKpkadP$ der wahre Horizont für 2 Orte der Erdoberfläche unter dem Aequator an den Endpunkten $Q$, $q$ eines Erd-Durchmessers, und von denen der eine in der östlichen, der andere in der westlichen Halbkugel liegt. Ist $Aa$ die Durchschnittslinie zwischen dem Horizont und dem Aequator, $q$ das Zenith des Orts, $QAq$ die Richtung von Westen nach Osten, in welcher die Erde um ihre Axe sich dreht, mithin $qAQ$ die scheinbare Bewegung der Himmelskugel von Osten nach Westen, so gehen alle Gestirne in dem Augenblick auf, in welchem sie aus der westlichen Halbkugel $PapAQ$ in den Halbkreis $Pap$, und unter in dem Augenblick, in welchem sie aus der Halbkugel $PapAq$ in den Halbkreis $pAP$ treten. Ein in der Aequator-Ebene befindliches Gestirn geht also in dem Punkt $a$ auf, geht durch das Zenith $q$ und in $A$ unter.

Alle Sterne bewegen sich in Kreisen, die mit dem Aequator ∦ laufen, der Stern $S$ der nördlichen Halbkugel also in dem Parallelkreise $SbDBS$, der Stern $s$ der südlichen in dem Kreise $sGkgs$, und die Bewegung der Sterne ist somit eine senkrechte, eine gerade. Daher nennt man auch die Auf- und Absteigung der Gestirne für einen unter dem Aequator

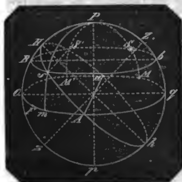
belegenen Ort gerade Aufsteigung und gerade Absteigung.

2. Es ist nun klar, dafs mit den Punkten $d$ und $k$ für die Gestirne $S$ und $s$ der Punkt $a$ des Aequators zu gleicher Zeit aufgeht und mit den Punkten $D$ und $K$ der Punkt $A$ im Aequator zugleich untergeht. Während der Stern $S$ aber den Bogen $Sd$ scheinbar durchläuft, durchläuft auch der Punkt $M$ des Aequators, der mit $S$ in demselben Scheitelkreis liegt, den Bogen $Ma$, mithin ist $M$ die gerade Aufsteigung von $S$, sowie der Punkt $N$ für den Stern $s$ die gerade Aufsteigung ist. Da der Punkt $M$ mit dem Stern $S$ und $N$ mit $s$ nicht nur gleichzeitig aufsondern auch untergeht, so sind beide Punkte $M$ und $N$ auch die geraden Absteigungen der beiden Sterne, und gerade Aufsteigung und gerade Absteigung sind ein und dasselbe.

Bedeutet der Punkt $F$ im Aequator den Frühlingspunkt, so erhält man durch die Länge des Bogens $FNqM$ die gerade Aufsteigung $M$ des Sternes $S$, und da mit dieser zugleich der Ort desselben in seinem Parallelkreise $SBDbS$ gegeben ist, so nennt man auch besonders den Bogen $FNqM$ vom Frühlingspunkt bis zum Durchschnitt des Scheitelkreises im Aequator die gerade Aufsteigung (Rectascension) des Sterns $S$. Die Rectascension des Sterns $s$ ist der Bogen $FAN$ (s. Ascension).

3. Für jeden Ort auf der Erdoberfläche aufserhalb des Aequators ist die Auf- und Absteigung der Gestirne eine schiefe. Es sei $HahA$ der wahre Horizont zweier Orte der Erdoberfläche, deren gerade Verbindungslinie also so wie die ihrer Zenithe Z und z durch den Mittelpunkt der Erde

Fig. 113.




geht, und von denen der eine in der nördlichen, der andere in der südlichen Halbkugel liegt. Für den ersteren Ort gehen also alle Gestirne auf, wenn sie aus der Halbkugel $Hhs$ in den Kreis $Hh$ und aus diesem in die Halbkugel $HhZ$ treten. $Aa$ sei die Durchschnittslinie des Horizonts mit dem Aequator, so ist der Punkt $M$ des Aequators mit dem Stern $S$ in demselben Scheitelkreis. Jetzt geht der Stern $S$ schon in dem Punkt $S'$ auf und mit diesem zugleich der Punkt $a$ des Aequators, folglich ist für den Horizont $Hh$ $a$ die Aufsteigung und zwar die schiefe Aufsteigung des Sterns $S$ in der Entfernung $FAqa$ vom Frühlingspunkt. Wenn der Stern $S$ durch $SbsB$ nach $S'$ kommt, so ist der ihm entsprechende Punkt $M$ des Aequators in $M'$ und dieser liegt beim Aufgang von $S$ noch um den Bogen $M'a$ unter dem Horizont.

Wie $a$ die schiefe Aufsteigung, so ist $A$ die schiefe Absteigung des Sterns $S$, indem er in $s$ untergeht; die gerade Absteigung $m$ ist dann schon um den Bogen $Am$ unter dem Horizont. Da der Unterschied zwischen der geraden und der schiefen Aufsteigung (der Aufsteigungs-Unterschied) eines Gestirns für einen bestimmten Ort gleich ist mit dem Unterschied der geraden und schiefen Absteigung (der Absteigungs-Unterschied) desselben Gestirns für denselben Ort, so führen beide Unterschiede den gemeinschaftlichen Namen Ascensional-Differenz.

4. Für $s$ als Zenith ist der Tagebogen desselben Sterns $S = sBS'$, in $s$ ist sein Aufgang, in $S'$ sein Untergang. Es ist mithin $A$ die schiefe Aufsteigung, $a$ die schiefe Absteigung des Sterns $S$; $m$ dessen gerade Aufsteigung und $M'$ dessen gerade Absteigung, der Aufsteigungs-Unterschied $= mA$, der Absteigungs-Unterschied $M'a$. Hier steht die Rectascension $m$ von $S$ schon um die Ascensional-Differenz $mA$ über dem Horizont, wenn $S$ in $s$ aufgeht, beim Untergang von $S$ in $S'$ ist die gerade Absteigung $M'$ noch um dieselbe Ascensional-Differenz über dem Horizont.

Bei der letzten Betrachtung für das Zenith z kann man sich vorstellen, dafs z in der nördlichen Halbkugel liegt, dann steht der Stern $S$ in der südlichen. Für das Zenith Z liegt $S$ in derselben nördlichen Halbkugel, demnach gilt die Gleichheit der Auf- und Absteigungs-Unterschiede für alle Gestirne, sie mögen mit dem Beobachtungsort in derselben oder in der entgegengesetzten Halbkugel liegen.

Wenn für einen Zeitpunkt die Abweichung der Sonne beobachtet worden, so kann auch deren Rectascension leicht berechnet werden; denn die Abweichung (*A*) und die Rectascension (*R*) sind Katheten eines rechtwinklig sphär. △, in welchem der *A* gegenüber liegende ∠ die Schiefe (*e*) der Ekliptik ist. Man hat demnach

$$\sin \text{Rectasc.} = \frac{tg \text{ Abweichung}}{tg \text{ Schiefe der Ekl.}}$$

Der Ort eines Planeten wird mit Hülfe von Tafeln nach Länge und Breite angegeben (s. astr. Länge und astr. Breite), dagegen hat man es bei der Einrichtung der astr. Instrumente leichter und sicherer, die Gestirne nach Abweichung und gerader Aufsteigung anzugeben, und es geschieht dies jetzt mit den Fixsternen. Um nun aus Länge *l* und Breite *b* die Abweichung (*A*) und Rectascension (*R*) zu finden, hat man die Formeln:

$$\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin (k+e)}{\sin k}$$

$$tg\, R = \frac{tg\, l \cdot \cos (k+e)}{\cos k}$$

worin *k* durch $tg\, k = \frac{tg\, b}{\sin l}$ bestimmt wird und *e* die Schiefe der Ekliptik bedeutet.

Fig. 114.



In dem Art. Abweichung ist die erste Formel vorläufig schon angegeben; die Herleitung Beider geschieht wie folgt:

Ist *S* der Fixstern, *FQ* der Aequator, *FE* die Ekliptik, *F* der Frühlingspunkt, also $\angle EFQ = e$ die Schiefe der Ekliptik, so ist die Normale *SE* auf *FE* die Breite *b*, *FE* die Länge *l* von *S*, die Normale *SQ* auf *FQ* die Abweichung *A*, *FQ* die Rectascension *R* von *S*. Denkt man sich den gröfsten Kreisbogen *SF*, so hat man 2 rechtwinklig sphär. Dreiecke *SFE* und *SFQ*; bezeichnet man $\angle SFE$ mit *k*, so ist

1. $tg\, k = \frac{tg\, b}{\sin l}$

$\sin SF = \frac{\sin b}{\sin k}$

$\sin A = \sin SF \cdot \sin (k+e)$, also

2. $\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin (k+e)}{\sin k}$

Auch ist $tg\, S = \frac{tg\, l}{\cos k}$

und $tg\, R = tg\, S \cdot \cos (k+e)$

daher

3. $tg\, R = \frac{tg\, l \cdot \cos (k+e)}{\cos k}$

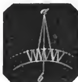
Die schiefe A. ist = gerader A. – Ascensional-Differenz.

**Aufsteigungs-Unterschied** s. Aufsteigung.

**Auge**, das Organ für das Sehvermögen der lebenden Geschöpfe, ist, soweit wir es wissen, von zweierlei wesentlich verschiedener Construction.

Das A. der Insecten und Crustaceen ist musivisch zusammengesetzt. Die Oberfläche der Hornhaut hat nach Aufsen die Form eines regelmäfsigen Polyeders, deren Tausende von Flächen oder Facetten durchsichtig sind; auf der convexen Netzhaut stehen eben so viele abgekürzte Kegel, deren Grundflächen durchsichtig und deren Mäntel undurchsichtig sind.

Fig. 115.



Der Lichtstrahl, welcher von *a* durch eine Facette auf die Oberfläche des Kegels *b* fällt, trifft die Netzhaut in *b*, die von demselben Punkt *a* rechts und links fallenden Lichtstrahlen treffen von aufsen und von innen die undurchsichtigen Seitenflächen der nebenstehenden Kegel, das Thier empfängt von dem Punkt *a* nur einen einzigen Licht-Eindruck in *b*, und so von jedem anderen leuchtenden Punkt nur einen Licht-Eindruck, so dafs ihm von dem Gegenstande ein mosaikartiges Bild erscheint.

2. Die Augen der Wirbelthiere bestehen in dem hauptsächlichsten Stück aus einer krystallartigen Linse, durch welche die von aufsen kommenden Lichtstrahlen aufgefangen und gebrochen auf die Netzhaut geführt werden.

Das A. des Menschen ist in Fig. 116 im Profil skizzirt: Aus dem Gehirn, dem alleinigen Sitz der Willenskraft und der Empfindung, welches mit allen Muskeln der beweglichen und mit allen empfindbaren Theilen des Körpers durch Nerven in Communication steht, entspringen auch starke, markige Sehnerven bis gegen die Augenhöhlen, vereinigen sich dort und theilen sich in zwei starke Nerven, die in die beiden Augapfel hineinreichen.

*a* ist einer dieser Sehnerven, er verbreitet sich als feine, weifse Markhaut, die Netzhaut, retina, über die innere hintere Kugelfläche des Augapfels, empfängt daselbst in jedem ihrer einzelnen Punkte den Licht-Eindruck von äufseren Gegenständen und bringt diese dem Gehirn zum Bewufstsein. Das bisher Gesagte vom Auge ist Physiologisches, und es ist auch nicht gut möglich, dieses von dem ferner folgenden Mathematisch-Physikalischen zu trennen. Die Construction des A. ist wie folgt:

3. Der Augapfel *cbdb'c'* ist kugelförmig, nur ist der Querdurchschnitt um etwa 0,05 kürzer als die Augenaxe *dc'*. Die äufsere Umschliefsung besteht in der Haut *bcb'c'* (das Weifse im Auge), die harte Haut, weifse Haut, tunica sclerotica, aus sehnigen Fasern gebildet, aber ohne Nerven, also unempfindlich, und als Fortsetzung derselben aus der vorderen mehr gewölbten Haut *bdb'*, der Hornhaut, t. cornea; diese ist gleichfalls sehr hart, elastisch, unempfindlich, aber farblos und durchsichtig; sie besteht aus über einander liegenden Blättchen, Lamellen genannt, die von einander durch wasserhelle Flüssigkeiten getrennt sind.

Der Augapfel liegt in der aus Knochen gebildeten Augenhöhle (orbita) in fettigen Zellgeweben, ist durch 6 Muskeln, die von den Knochen nach der sclerotica sich erstrecken, beweglich befestigt, so dafs, wenn einige angespannt werden, die gegenüber liegenden um so viel sich zusammenziehen; fixirt man einen Gegenstand scharf, so werden sämmtliche Muskeln angespannt.

Die innere Fläche der Sclerotica ist mit einer dünnen aus zarten Arterien und Adern netzartig gebildeten Haut (braune Haut, Gefäfshaut, Aderhaut, t. choroidea) überzogen. Hinten ist sie mit dem Sehnerven *a* durch Zellgewebe verbunden, vorn reicht sie bis zur cornea und ist hier mit einem, etwa eine Linie breiten, aus dichtem, aber zartem Zellgewebe bestehenden Ring (Strahlenband, circulus ciliaris) befestigt und wird auf der Oberfläche der weifsen Haut *bcb'c'* durch Gefäfse und Nerven ausgespannt erhalten. Die innere Oberfläche der choroidea ist mit einem schwarzen Schleim (pigmentum nigrum) überzogen, der jede Reflexion, welche aus den inneren Seitenwänden der Sclerotica herrühren könnte, und durch die also das auf der, über der Choroidea ausgebreiteten retina sich abspiegelnde Bild undeutlich werden würde, unmöglich macht.

Ueber der auf der Choroidea befindlichen Retina liegt der grofse Körper *e*, der Glaskörper, die Glasfeuchtigkeit (humor vitreus), eiweifsartig, farblos und vollkommen durchsichtig, in einer feinen durchsichtigen Haut (Glashaut), die aus vielen Zellen mit darin befindlicher Feuchtigkeit besteht, in welche Verzweigungen des Netzhautmarkes treten und darin sich ausbreiten. Vorn ist der Glaskörper mittelst des von dem Strahlenband aus sich verbreitenden strahlenförmigen Faltenkranzes befestigt.

Fig. 116.

Vorn an dieser Glasfeuchtigkeit befestigt, liegt die Krystall-Linse *f* (lens krystallina); sie ist hinten stärker gekrümmt als vorn, verflacht sich mit zunehmendem Alter, besteht aus blättrigen Schichten und ist vollkommen durchsichtig. Sie liegt in einer feinen durchsichtigen Haut (Linsenkapsel), doch so, dafs zwischen dieser und der Linse ein wenig Flüssigkeit sich befindet, in welcher die Linse schwimmt.

Zwischen der Linse *f* und der Hornhaut *bdb'* liegt die Regenbogenhaut *gg*, Iris, von deren Farbe so genannt, in der Mitte mit einer kreisrunden Oeffnung, die Sehe, Pupille. Die Iris besteht aus Blutgefäfsen und Nerven, sie ist sehr reizbar und zieht sich bei hellerem Lichte zusammen, so wie sie bei schwächer werdendem Lichte sich erweitert. Die Hinterfläche der iris ist ebenfalls, wie die Choroidea, mit schwarzem Pigment überzogen, damit keine Seiten-Reflexionen nach dem Innern des Auges veranlafst werden, und welcher zugleich, indem die Lichtstrahlen auf der äufseren Fläche der

Haut sich zerstreuen, die Regenbogenfarben erzeugt.

Der Raum zwischen der Hornhaut *bdb'* und der Linse *f* ist um die Iris herum mit der wässerigen Feuchtigkeit (humor aquens), dies sind 6 bis 7 Tropfen wasserhelle farblose Flüssigkeit, ausgefüllt.

4. Die 3 Feuchtigkeiten, die wässerige, die Krystall-Linse und der Glaskörper, brechen den eintretenden Lichtstrahl und führen ihn gebrochen auf die Netzhaut. Die wässerige Feuchtigkeit hat mit dem Wasser, die Linse mit dem Krystallglase ziemlich gleiche Brechbarkeit, die der Glasfeuchtigkeit liegt zwischen beiden in der Mitte.

Das Sehen besteht nun darin, dafs von jedem äufseren leuchtenden Punkt sämmtliche innerhalb der Pupille in's Auge fallende Strahlen, durch die 3 Feuchtigkeiten gebrochen, nach einem einzigen Punkt der Retina geführt werden. So z. B. die Strahlen des Punkts $\alpha$ sowohl in den gezeichneten Grenzstrahlen, als auch in den zwischen ihnen liegenden Strahlen nach dem Punkt $\beta$, wie die des Punkts $\gamma$ nach dem Punkt $\delta$. Die Punkte rechts werden also links, die Punkte links werden rechts, obere Punkte unterhalb und untere Punkte oberhalb auf der Retina abgespiegelt, und es erscheint auf derselben von jedem äufseren Gegenstande ein verkehrtes Spiegelbild.

5. (Physiologisches.) Dafs der Mensch dennoch die Gegenstände nicht verkehrt, sondern richtig sieht, liegt in der innerhalb des Gehirns befindlichen Vernunft, die durch das Sehnervenmark das verkehrte Bild zur Beurtheilung empfängt. Das Kind greift schon nach dem Monde, es weifs, dafs der Gegenstand aufserhalb seiner sich befindet, es hat nur noch keine Erfahrung über dessen Entfernung, allein es wirft schon im Geiste die inneren Spiegelbilder $\beta$ und $\delta$ nach $\alpha$ und $\gamma$, also auf dem gekommenen Wege zurück, also das Rechts nach Links u. s. w., so dafs das Linke wirklich links u. s. w. gesehen wird.

6. Die Optik lehrt (vergl. Ablenkung des Lichtstrahls), dafs die Vereinigung von Lichtstrahlen in einem Punkt, wie hier die aus $\alpha$ in $\beta$, aufser von den Brechbarkeitsgraden der 3 Feuchtigkeiten, noch abhängt von deren äufseren Krümmungen und von der Entfernung des Gegenstandes ($\alpha$) vom A. Wenn also Gegenstände von einer bestimmten Entfernung vom A. wie $\alpha$ ihre Strahlen in einem Punkt $\beta$ der Netzhaut vereinigen, so müfsten von ferneren Gegenständen die Vereinigungspunkte, wie $\beta$, vor die Retina fallen, sich dort durchkreuzen und auf der Retina als kleine Kreisflächen erscheinen, welche undentliche Bilder geben. Nähere Gegenstände würden hinter der Retina liegende Vereinigungspunkte, auf der Retina also unmittelbar Kreise und undeutliche Bilder geben.

Dafs gesunde Augen nahe wie ferne Gegenstände gleich scharf sehen, liegt nun darin, dafs die Willenskraft Muskeln in Bewegung setzt, welche je nach der Entfernung des zu sehenden Gegenstandes die gedachten Krümmungen ändert; ob dies mit der Hornhaut, welche die Form der wässerigen Feuchtigkeit bestimmt, allein geschieht, oder auch mit der Krystall-Linse, ist noch nicht ermittelt. Dies Vermögen zur Aenderung der Gestalt des menschlichen Auges hat seine Grenzen; bei Raubvögeln ist es in hohem Maafse vorhanden: In grofser Höhe vom Erdboden zieht der Vogel bei Beobachtung des Küchleins die Linse ganz flach, und während er auf dasselbe herabstürzt, wird sie immer gewölbter und zuletzt zur Kugelgestalt.

A., die das Vermögen zur Gestalt-Aenderung in nur geringem Maafse haben, sind entweder kurzsichtig (myops) oder fernsichtig, weitsichtig (presbyops). Erstere sehen nur nahe Gegenstände, letztere nur ferne Gegenstände deutlich.

7. Dafs das A. achromatisch ist, dafs es die Gegenstände also ohne farbige Ränder sieht, dafs also mit der Brechung des Lichtstrahls nicht dessen Zersetzung in Farben geschieht, liegt darin, dafs die Feuchtigkeiten und Flüssigkeiten, welche der Lichtstrahl durchdringt, von verschiedener Brechbarkeit sind, wie in dem Art.: Achromatisch speciell erklärt ist.

Fig. 117.




8. Dafs ein Gegenstand *P* mit zwei Augen nur einmal gesehen wird, hat eine physiologische Ursache. Die Vernunft nämlich findet, indem beide Augen mit ihren Axen auf *P* gerichtet sind, auf beiden Netzhäuten beide Bilder gleicher Weise angeordnet, sie wirft beide Bilder für die Beurtheilung hinaus, und beide müssen daher zu einerlei *P* wieder werden. Hat man *P* fixirt, sind also die Augenaxen nach *AP* und *A'P* gerichtet, so fällt von einem

ferner befindlichen $p$ der Lichtstrahl auf $A$ rechts, auf $A'$ links der Axe, beide Bilder sind also ungleicher Weise angeordnet, man sieht mit dem einfachen $P$ zugleich ein doppeltes $p$.

Ist $p$ kein Punkt, sondern eine Fläche, so sind deren Bilder beide in gleicher Weise auf der Netzhaut geordnet, nur, wie die von $p$ gegen die Axen, um etwas verschoben; diese von der Vernunft analog der Gewohnheit hinausgeworfenen Bilder überdecken sich in $p$ zum Theil, es entsteht ein Bild mit doppelten Rändern.

Aus dem Grunde des Doppeltsehens schliefst man wohl ein Auge, wenn man einen Gegenstand scharf fixiren will, damit das verlangte Bild durch undentliche Doppelbilder anderer Gegenstände in seiner Reinheit nicht beeinträchtigt werde, obwohl man einen fixirten Gegenstand mit beiden A. heller sieht als mit nur einem A.

**Augenaxe.** Die gerade Linie zwischen der Netzhaut und der Hornhaut, nach welcher das Auge gerichtet wird, wenn es einen Gegenstand fixirt. Die A. trifft durch die Mittelpunkte der Krystall-Linse, der Pupille und der vorderen Hornhaut (s. Auge, No. 3, 8).

**Augenglas, Ocularglas.** Das Glas am Fernrohr, durch welches unmittelbar das Auge sieht, während das dem Auge entferntere äufsere Glas das Objectivglas ist (s. astronomisches Fernrohr).

**Augenlinse** s. v. w. die Krystall-Linse des Auges (s. d. No. 3); oder s. v. w. Augenglas.

**Augenmaafs.** Die Beurtheilung von sichtbaren Gröfsen blofs mit Hülfe des Auges. Das A. ist ein Ergebnifs der Erfahrung, die Thätigkeit der Vernunft dabei ist augenblicklich, mit der Beschauung des Gegenstandes zugleich ist das Resultat da. Das A. für Längen ist Sache der einfachen Erfahrung, zusammengesetzter ist die für Flächen und Körper, allein das A. für diese mufs so geübt werden, dafs bei ihnen die einzelnen Abmessungen nicht erst zur Ueberlegung kommen. Bei Gewichten mufs noch die Gewichts-Einheit des Stoffs, die specifische oder absolute, bekannt sein; allein auch hier fallen die Beurtheilungen von Körpermaafs und Gewicht zusammen, nämlich bei Personen, die mit einerlei Stoff, als Eisen, Werkstücke u. s. w., täglich beschäftigt sind.

Das A. ist nur so weit möglich, als die Fähigkeit des Auges reicht. Im Art. Auge, No. 8, ist gezeigt, dafs auf einen fixirten Gegenstand die Axen beider Augen gerichtet sind; zur Fixirung von $P$ wird also von beiden Axen der $\angle APA'$ gebildet. Je näher $P$ dem Auge, desto gröfser wird $\angle APA'$; in der Nähe des Auges ändert sich dieser $\angle$ mit den Entfernungen von $P$ in einem wahrnehmbaren Verhältnifs; in einer sehr grofsen Weite vom Auge mufs für eine sehr geringe Abnahme des $\angle P$ bedeutend sich entfernen, die Axen nähern sich immer mehr der Parallelität, und die Entfernungen der Gegenstände vom Auge können nicht mehr beurtheilt werden, wie z. B. Niemand ein A. für die Entfernung der Gestirne hat. Die Entfernung der Gegenstände von bekannter Höhe, z. B. von Bäumen, kann aus der dem Auge verminderten Höhe geschätzt werden. (Vergl. den folg. Art.)

**Augenpunkt** (Perspective). Derjenige Punkt einer perspectivischen Zeichnung, in welchem sämmtliche, mit der verlängerten Axe des beschauenden Auges parallel laufende Linien verschwinden. In den meisten Fällen ist die Augenaxe horizontal gerichtet, so dafs also der A. in der durch den Standpunkt des beschauenden Auges (Distanspunkt, Entfernungspunkt) genommenen Horizontal-Ebene liegt.

Fig. 118.

1. Es sei Fig. 118 ein Grundrifs, $S$ sei der Standpunkt des Auges, $S\alpha$ die Richtung der Augenaxe, $GB$ und $FA$ normal auf derselben, $AD \mathrel{\#} BE \mathrel{\#} S\alpha$

Der Punkt $A$ macht mit $S\alpha$ den $\angle AS\alpha$, der Punkt $D$ den $\angle DS\alpha < AS\alpha$; je ferner die Punkte in $AD$ von $A$, desto kleiner werden deren $\angle$ mit $S\alpha$, und von einem $\infty$ fern gelegenen Punkt $D^x$ in $AD$ wird $\angle D^x S\alpha =$ Null, d. h. der Punkt $D^x$ fällt in $S\alpha$ oder, wenn $\alpha$ $\infty$ fern von $S$ gedacht wird, in $\alpha$ selbst.

Eben so ist $\angle ES\alpha < \angle BS\alpha$, die $\angle$ werden immer kleiner, je ferner $E$ von $B$ genommen wird, und ein $\infty$ ferner

Punkt in $BE$ fällt in $\alpha$, mithin ist $\alpha$ der Verschwindungspunkt, also der A. der horizontalen Linien $AD$, $BE$ und aller mit beiden parallelen Linien, es mögen diese nahe oder fern von $S\alpha$ sich befinden.

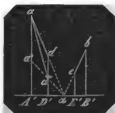
2. Gleich weit von $A$ und $B$ entfernte Punkte in $AD$ und $BE$, wie die Punkte $D$ und $E$, nähern sich perspectivisch im Verhältnifs zu $A\alpha$ und $B\alpha$. Denn es sind $ad$ und $ae$ die perspectivischen Entfernungen der Punkte $D$ und $E$ von $S\alpha$ und es ist

$$ad : ae = Dm : Em = A\alpha : B\alpha$$

Sind $D$ und $E$ die Endpunkte der Linien, so sind deren perspectivische Längen $Ad$ und $Be$.

Eine schräge Linie wie $AE$, also eine Linie, die nicht ∦ der Augenaxe ist, würde die perspectivische Länge und Lage $Ae$ haben; theilt man diese durch $S\alpha$ in $An$ und $En$, so fällt perspectivisch $n$ in $\alpha$, die perspectivische Länge von $An$ ist $A\alpha$, von $En$ ist sie $e\alpha$, und es ist $\alpha$ mithin der A. auch für jede schräge, mit $S$ horizontale Linie. Linien, die normal auf der Augenaxe sind, wie $AF$, $BG$, haben zur perspectivischen Länge ihre Länge selbst.

Fig. 119.




Es sei Fig. 119 der perspectivische Aufrifs des Grundrisses Fig. 120; $A'$, $\alpha$, $B'$ seien in der mit dem Auge horizontalen Ebene die Projectionen der Punkte $A$, $S$ (oder $\alpha$) und $B$; eben so $D'$, $E'$ die perspectivischen Lagen (nach No. 1) der Punkte $D$, $E$. Sind $AD$, $BE$ senkrechte Ebenen von den Höhen $A'a$, $B'b$, deren obere Längsseiten horizontal, also ∦ den unteren $AD$ und $BE$, so werden die Winkel, welche wie $\angle AS\alpha$ von $S$ aus gebildet werden, immer kleiner, je weiter die Punkte $D$ und $E$ von $S$ entfernt sind, in $\infty$ fernen Punkten = Null, d. h. die Höhen werden = Null, sie verschwinden; und da die Linien $DA$ und $BE$ in $\alpha$ verschwinden, so verschwinden auch deren senkrecht darüber befindlichen Parallelen in $\alpha$. Sind $D'd$ und $E'e$ die Endkanten der Ebenen, so sind die nach $\alpha$ gerichte-

Fig. 120.




ten Linien $ad$, $be$ die perspectivischen Lagen der oberen Grenzlinien.

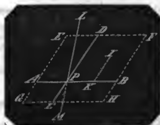
Ist $ad$ nicht ∦ $A'D'$, ist $D'd$ vielmehr ein bestimmter Theil von $A'a$, und man trägt diesen Theil auf $A'a$ als $A'a'$ ab, zieht $a'\alpha$, so ist $D'd'$ die perspectivische Höhe = $A'a'$ und $ad'$ die perspectivische Lage der Oberkante; Linien, die also nicht ∦ der Augenaxe sind, verschwinden nicht in dem A., sondern in einem anderen Punkt.

**Ausdehnung, Extension**, ist die Eigenschaft einer jeden Raumgröfse, dafs deren einzelne Theile in einerlei Zeit verschiedene Räume einnehmen können. Die äufsersten Theilchen der Gröfsen sind die Grenzen deren A. Denkt man sich diese von aufsen nach innen und in allen Richtungen immerfort abnehmend, bis sie im Verschwinden begriffen sind, dafs also innerhalb dieser letzten Grenzen kein noch so kleines Theilchen der Gröfse existirend zu denken ist, so hat man den Punkt, den Raumpunkt. Verfolgt man von diesem Punkt nach irgend einer, aber sich gleichbleibenden Richtung die ursprüngliche Grenze, und zwar nach rechts und links, so hat man in gerader Linie eine Längen-A. der Gröfse; verfolgt man von dem Punkt in einer anderen Richtung die ursprünglichen Grenzen der Gröfse, so hat man eine zweite Längen-A. der Gröfse, und so kann man von einer beliebigen Anzahl von Längen-A. der Gröfse Kenntnifs nehmen.

Es sei $P$ der gedachte Punkt, $AB$ die eine, $DE$ die zweite Richtungslinie, und beide so ausgedehnt, dafs aufserhalb der durch deren Endpunkte gezeichneten Parallelen kein Theilchen der Gröfse sich befindet, so hat man in dem # $EFGH$ die Grenzen aller Längen-A. der Gröfse

noch zweien Richtungen, und einen Grenzpunkt *I* z. B. findet man durch die Abmessungen der mit *DE* Parallelen *IK* und ihres Abstandes *PK* von *DE*.

Fig. 121.




Befinden sich Theile der Größe noch außerhalb der Ebene *EFGH*, also oberhalb oder unterhalb, oder beides, über und unter derselben, so kann man alle diese Theile einschließen, wenn man die Ebene *EFGH*, erforderlichen Falls in größeren Längen-A., als durch *DE AB* gegeben sind, nach irgend einer dritten Richtung, z. B. *LM* ‡ mit sich selbst auf- und abwärts bewegt, bis die äußersten Theilchen der Größe oben und unten von der Ebene *EFGH* berührt werden. Es seien *L* und *M* die Endpunkte der Bewegung, so hat die Ebene *EFGH* ein Parallelepiped als Grenzraum der Größe construirt.

Der Grenzraum irgend einer Raumgröße kann also nur 3 Hauptrichtungen haben, die sich zu einem Parallelepiped zusammensetzen, und wenn man die Richtungen normal auf einander nimmt, so heißen diese als Abmessungen: Länge, Breite und Höhe, oder rechtwinklige Coordinaten-Axen, wenn durch solche die A. unregelmäßig geformter Raumgrößen bestimmt werden soll (s. Abscissen.)

Jede 4te Coordinaten-Axe ist durch die ersten 3 vollkommen bestimmbar, folglich gehört jeder Punkt derselben in die Abmessungen, welche jene 3 Axen durch ihre Richtungen angeben, die A. hat also nur 3 normal auf einander befindliche Richtungen, denen man aber jede beliebige Lage geben kann.

Auch der Raum selbst, diese gegebene, unendliche und daher ganz formlose A., die von jedem beliebigen Punkt aus nach jeder beliebigen Richtung eine unendliche Längen-A. in sich schließt, die also von jedem beliebigen Punkt als Mittelpunkt aus als eine Kugel von unendlichem Halbmesser betrachtet werden kann, ist wie jede Kugel von endlichem Halbmesser als eine A. von 3 Dimensionen: Länge, Breite, Höhe, also zugleich als ein Parallelepiped von unendlich langen Seiten aufzufassen.

**Ausdehnung, Expansion, Dilatation, durch die Wärme.** Unter A. wird hier verstanden: Vergrößerung des Volums bei gleichbleibender Masse eines Körpers. Außer durch die Wärme kann man die A. eines Körpers bewirken, z. B. durch Aufhebung eines Drucks, mit welchem ein Körper vermöge seiner Elasticität verdichtet worden war, wonach er nun sein früheres größeres Volum wieder einnimmt; durch Zuführung von Feuchtigkeit, wodurch das sogenannte Quellen, also eine Volum-Vergrößerung hervorgebracht wird, wiewohl Feuchtigkeit aus einer Summe von Wassertheilchen besteht, und mithin die Vergrößerung des Volums beim Quellen mit dem Volum des Wassers, um welche das ursprüngliche Volum des Körpers ebenfalls vergrößert worden, in Verhältniß stehen wird, wenn nicht zugleich ein Chemismus dabei eine Rolle spielt.

Alle diese und überhaupt diejenigen A., welche durch andere Ursachen als durch die Wärme veranlaßt werden, gehören nicht hierher.

Die Wärme tritt überall als abstoßende Kraft auf, sie entfernt die Atome der Körper von einander und wirkt so auf Vergrößerung des Volums. Nur ein einziger Körper macht in dieser Beziehung eine Ausnahme, nämlich das Wasser, welches bei 4° C. am dichtesten ist, bei weiterer Wärme-Verminderung sich ausdehnt, bis es bei 0° C. gefriert, und nur von 4° C. ab folgt es mit Vermehrung von Wärme dem allgemeinen Gesetz der A.

Daß Leder durch Hitze zusammenschrumpft, liegt in dem dabei stattfindenden Austreiben der Feuchtigkeit aus demselben, so daß mit der Volum-Verminderung zugleich eine Massen-Verminderung verbunden ist. Dieselbe Ursach ist es, daß Thonstücke in größerer Hitze schwinden, indem die Wasser-Antheile im Thon mit desto größerer Hartnäckigkeit verbleiben, je weniger noch darin sich befinden, und die mit Abkühlung des Thons aus der Luft sich wieder ersetzen, eine Eigenschaft, auf welche Wedgwood seine Pyrometer-Construction gegründet hat.

1. Ausdehnung fester Körper.

Die A. der Körper, namentlich der fossilischen und besonders der Metalle,

**ist im Bereich der Wissenschaft sowohl, als für's bürgerliche Leben von sehr bedeutendem Einfluſs, wenngleich diese A. nur sehr gering ist, und z. B. beim Schmiedeeisen bei einem Temperatur-Unterschied von 0° bis 100° C. nur etwa $\frac{1}{800}$ der Länge beträgt. Zuerst beruht** auf der verschiedenen A. verschiedener Metalle die Construction der Metall-Thermometer, auf der A. des Quecksilbers und des Weingeistes die Construction der nach diesen Stoffen genannten Thermometer. Die A. hat Einfluſs auf die Aenderung der Metall-Maafsstäbe bei Gradvermessungen, während oft bedeutend verschiedener Temperatur-Unterschiede der Atmosphäre, und veranlaſst dabei fortdauernde Correctionen; Einfluſs auf die summarische Anzahl der Pendelschwingungen in längerer Zeit, also auch auf den richtigen Gang der Uhren; auf die Verlängerung und Verkürzung der Schienenstrecken von Eisenbahnen, welche bei nicht beobachteter Vorsicht der Baumeister den Reisenden Gefahr bringend sein würden; desgleichen auf die Verlängerung und Verkürzung von Röhrenstrecken für Gas- oder Wasserleitungen, weshalb hier hermetisch nachgebende Compensations-Muffen angebracht werden müssen, wenn nicht die Röhren und deren Verbindungen zerrissen oder zerquetscht werden sollen.

Die gedachten, verhältniſsmäſsig sehr kleinen A. verschiedener fester Körper sind gefunden worden, theils durch unmittelbare Beobachtung, indem das obere Ende einer frei hangenden längeren Stange fixirt und das untere Ende mit einem Fernrohr versehen worden, welches bei horizontal bleibender Axe vor und nach deren Erwärmung auf einen bestimmten höheren Grad nach einem sehr fern stehenden Maafsstab zeigte, oder indem das zweite freie Ende der erwärmten Stange auf den sehr kurzen Arm eines zusammengesetzten Hebelwerks wirkte, dessen letzterer längerer Arm als Zeiger auf einer gradnirten Scheibe einen wahrnehmbaren Bogen beschrieb, oder auch durch Zählung der Schwingungen eines Pendels bei verschiedenen Erwärmungen des Raums, in dem er sich befand.

**Die als Beispiel oben angegebene A.** von $\frac{1}{800}$ für Eisen ist die Längen-A., Linear-A. Ein Stab von der Länge $= 1$ bei der Temperatur von 0° C. erhält also bei einer Erwärmung um 100° C. die Länge $1 + \frac{1}{800}$, und da bei Erwärmungen von 0° bis 300° C. die A. mit wenig bemerkbaren Unterschieden den Wärmegraden proportional sind, so hat derselbe Stab bei 1° C. die Länge $1 + \frac{1}{80000}$

Bezeichnet man die A. $= \frac{1}{80000}$ mit $k$, so hat ein Stab bei 2° C. die Länge $1 + 2k$, bei $n$° C. die Länge $1 + nk$.

Hat der Stab eine Breite $= 1$, so geschieht die A. um gleich viel auch nach dieser Richtung, und der Flächen-Inhalt $= 1$ wird bei 1° C. $= (1+k)(1+k) = (1+k)^2$. Diese A. ist die Flächen-A., welche in der Praxis von seltener Anwendung ist.

**Hat ein Würfel die Seite $= 1$, so wird der Inhalt desselben bei 1° C. $= (1+k)^3$.**

**Wie gezeigt, ist $k$ gegen 1 sehr klein, und man läſst daher, ohne einen Fehler zu begehen, die Potenzen von $k$ weg, um die Flächen-A. und die Körper-A., die cubische A. zu bestimmen. Man nimmt also die Flächen-A. nicht $(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2$, sondern $1 + 2k$, und für die cubische A. nicht $1 + 3k + 3k^2 + k^3$, sondern $1 + 3k$.**

**Daſs die cubische A. das Dreifache der linearen A. ist, erklärt die hohe Aufsteigung des Quecksilbers in einer sehr engen Thermometerröhre aus einer verhältniſsmäſsig groſsen Kugel, und eben so, daſs beim Barometer der Höhen-Unterschied bei veränderter Luft-Temperatur nur äuſserst gering ist, und daſs für die Auffindung der richtigen Luftdruckhöhe eine nur unbedeutende thermometrische Correction erforderlich ist.**

**Folgende Tabelle zeigt die A. verschiedener fester Körper bei einer Wärme-Vermehrung von 100° C. nach den angegebenen Beobachtern in alphabetischer Ordnung.**

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| Blei | 0,00271900 | $\frac{1}{368}$ | Guyton-Morveau. |
| | 0,00278560 | $\frac{1}{359}$ | Daniel. |
| | 0,00284836 | $\frac{1}{351}$ | Lavoisier. |
| | 0,00286667 | $\frac{1}{349}$ | Smeaton. |
| | 0,00287300 | $\frac{1}{348}$ | Herbert. |
| | 0,00288200 | $\frac{1}{347}$ | Ellicot. |
| | 0,00290200 | $\frac{1}{345}$ | Horner. |
| | 0,00295400 | $\frac{2}{677}$ | Prinsep. |
| | 0,00308600 | $\frac{1}{324}$ | Berthoud. |
| Bronze. | | | |
| 8 Th. Kupfer, 1 Th. Zinn | 0,00181667 | $\frac{2}{1101}$ | Smeaton. |
| | 0,00184920 | $\frac{1}{541}$ | Daniel. |
| 16 Th. Messing, 1 Th. Zinn | 0,00190833 | $\frac{1}{524}$ | Smeaton. |
| Cement, römischer | 0,00143489 | $\frac{1}{695}$ | Adie. |
| Eis | 0,02451200 | $\frac{1}{41}$ | P. Heinrich. |
| Eisen. | | | |
| Schmiedeeisen | 0,00110000 | $\frac{1}{908}$ | Guyton-Morveau. |
| | 0,00111155 | $\frac{1}{900}$ | Augustin. |
| | 0,00111545 | $\frac{2}{1793}$ | do. |
| | 0,00112330 | $\frac{1}{890}$ | do. |
| | 0,00113475 | $\frac{1}{821}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00114550 | $\frac{1}{873}$ | Augustin. |
| | 0,00114560 | $\frac{1}{873}$ | Schwerd. |
| | 0,00114600 | $\frac{2}{1745}$ | Ellicot. |
| | 0,00115600 | $\frac{1}{865}$ | Borda. |
| | 0,00115600 | $\frac{1}{865}$ | Tralles. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| **Schmiedeeisen** . . . . . . . . | 0,00116800 | $\frac{1}{556}$ | Horner. |
| | 0,00117200 | $\frac{1}{853}$ | Herbert. |
| | 0,00118080 | $\frac{1}{847}$ | Daniel. |
| | 0,00118210 | $\frac{1}{846}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00119200 | $\frac{1}{839}$ | Berthoud. |
| | 0,00121500 | $\frac{1}{823}$ | Prinsep. |
| | 0,00122045 | $\frac{2}{1639}$ | Lavoisier. |
| | 0,00122045 | $\frac{2}{1639}$ | Destigny. |
| | 0,00122400 | $\frac{1}{817}$ | Horner. |
| | 0,00123504 | $\frac{1}{810}$ | Lavoisier. |
| | 0,00125343 | $\frac{1}{798}$ | Hassler. |
| | 0,00125833 | $\frac{1}{795}$ | Smeaton. |
| | 0,00126660 | $\frac{2}{1579}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00144600 | $\frac{2}{1383}$ | Hallström. |
| **Gufseisen** . . . . . . . . . . | 0,00098500 | $\frac{1}{1015}$ | Navier. |
| | 0,00107160 | $\frac{1}{933}$ | Daniel. |
| | 0,00110217 | $\frac{3}{2722}$ | Adie. |
| | 0,00110940 | $\frac{1}{901}$ | Roy. |
| „ **Prisma** . . . . . . . | 0,00111000 | $\frac{1}{901}$ | Roy. |
| | 0,00114676 | $\frac{1}{872}$ | Adie. |
| **Eisendraht** . . . . . . . . . . . . | 0,00123504 | $\frac{3}{2429}$ | Lavoisier. |
| | 0,00114010 | $\frac{1}{877}$ | Troughton. |
| **Glas.** | | | |
| **Kaliglas** . . . . . . . . . . . . | 0,00076170 | $\frac{1}{1313}$ | Rudberg. |
| **Englisches Flintglas** . . . . . . | 0,00081166 | $\frac{1}{1232}$ | Lavoisier. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| Französ. (bleihaltiges) Flintglas . | 0,00087199 | $\frac{1}{1147}$ | Lavoisier. |
| Weifses Glas . . . . . . . . . | 0,00083333 | $\frac{1}{1200}$ | Smeaton. |
| | 0,00086100 | $\frac{2}{2323}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00088446 | $\frac{3}{3392}$ | Muncke. |
| | 0,00088517 | $\frac{1}{1130}$ | do. |
| | 0,00099100 | $\frac{1}{1009}$ | Berthoud. |
| **Glasröhre** . . . . . . . . . . . . | 0,00077550 | $\frac{2}{2579}$ | Roy. |
| | 0,00077615 | $\frac{2}{2577}$ | do. |
| gewöhnliche . . . . . . . . . | 0,00087572 | $\frac{1}{1142}$ | Lavoisier. |
| von St. Gobain . . . . . . . . | 0,00089089 | $\frac{2}{2245}$ | do. |
| bleifreie . . . . . . . . . . . | 0,00089649 | $\frac{2}{2231}$ | do. |
| | 0,00089760 | $\frac{1}{1114}$ | do. |
| von 0,2 Linien Glasdicke . . . | 0,00091300 | $\frac{3}{3286}$ | Horner. |
| | 0,00091751 | $\frac{1}{1090}$ | Lavoisier. |
| dünne . . . . . . . . . . . . . | 0,00092100 | $\frac{4}{4343}$ | Horner. |
| Barometerröhre . . . . . . . . | 0,00094400 | $\frac{3}{3178}$ | Herbert. |
| **Glasstab** . . . . . . . . . . . . . | 0,00080787 | $\frac{1}{1238}$ | Roy. |
| | 0,00080833 | $\frac{1}{1237}$ | do. |
| | 0,00091900 | $\frac{1}{1088}$ | Horner. |
| | 0,00092500 | $\frac{1}{1081}$ | do. |
| | 0,00098800 | $\frac{1}{1012}$ | Dunn und Sang. |
| | 0,00124600 | $\frac{2}{1605}$ | Hallström. |
| **Gold** . . . . . . . . . . . . . . | 0,00123000 | $\frac{1}{813}$ | Daniel. |
| | 0,00131100 | $\frac{4}{3051}$ | Berthoud. |
| | 0,00140100 | $\frac{4}{2855}$ | Ellicot. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| fast rein . . . . . . . . . . . | 0,00143400 | $\frac{3}{2092}$ | Prinsep. |
| feines durch Quartirung . . . . | 0,00146606 | $\frac{1}{682}$ | Lavoisier. |
| | 0,00147500 | $\frac{1}{678}$ | Guyton-Morveau. |
| geglüht . . . . . . . . . . . | 0,00151361 | $\frac{3}{1982}$ | Lavoisier. |
| nicht geglüht . . . . . . . . . | 0,00155155 | $\frac{2}{1289}$ | do. |
| | 0,00156155 | $\frac{3}{1921}$ | do. |
| **Granit**, grauer von Aberdeen . . . | 0,00078943 | $\frac{4}{5067}$ | Adie. |
| gemeiner. . . . . . . . . . . | 0,00086850 | $\frac{2}{2303}$ | Bartlett. |
| rother von Peterhead . . . . . | 0,00089680 | $\frac{1}{1115}$ | Adie. |
| **Graphitwaare** (¾ Gr. + ¼ Thon) . . . | 0,00029280 | $\frac{3}{10246}$ | Daniel. |
| **Holz** . . . . . . . . . . . . . | 0,00030000 | $\frac{3}{10000}$ | Parry. |
| **Kalkspath** in der Hauptaxe. . . . . | 0,00286000 | $\frac{3}{1049}$ | Mitscherlich. |
| **Kalkstein**, weißer . . . . . . . . . | 0,00025100 | $\frac{1}{3984}$ | Vicat. |
| grüner vom Ratho . . . . . . | 0,00080890 | $\frac{4}{4945}$ | Adie. |
| **Kohle** von Eichenholz . . . . . . . | 0,0012000 | $\frac{3}{2500}$ | P. Heinrich. |
| von Tannenholz . . . . . . | 0,0010000 | $\frac{1}{1000}$ | do. |
| **Kupfer** . . . . . . . . . . . . . | 0,00170900 | $\frac{1}{585}$ | Horner. |
| | 0,00171000 | $\frac{4}{2339}$ | Ellicot. |
| | 0,00171222 | $\frac{1}{584}$ | Lavoisier. |
| | 0,00171600 | $\frac{4}{2331}$ | Daniel. |
| | 0,00171733 | $\frac{3}{1747}$ | Lavoisier. |
| | 0,00171820 | $\frac{1}{582}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00172244 | $\frac{1}{581}$ | Lavoisier. |
| | 0,00178400 | $\frac{2}{1121}$ | Borda. |
| | 0,00179000 | $\frac{3}{1676}$ | Guyton-Morveau. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| **Kupfer** . . . . . . . . . . . . . . | 0,00191880 | $\frac{1}{521}$ | Troughton. |
| gewalztes . . . . . . . . . | 0,00169100 | $\frac{3}{1774}$ | Prinsep. |
| | 0,00169900 | $\frac{2}{1177}$ | Edingb. Encycl. |
| geschlagenes . . . . . . . . . | 0,00170000 | $\frac{4}{2353}$ | Smeaton. |
| **Letternmetall** . . . . . . . . . . . | 0,00203520 | $\frac{3}{1474}$ | Daniel. |
| **Löthung.** | | | |
| Hartloth 1 Th. Zink 2 Th. Kupfer | 0,00205833 | $\frac{1}{486}$ | Lavoisier. |
| Klempnerloth od. Weichloth 1 Th. Zinn, 2 Th. Blei . . . . . . | 0,00250533 | $\frac{1}{399}$ | Smeaton. |
| Zinkloth 1 Th. Zink, 2 Th. Kupfer | 0,00205833 | $\frac{1}{486}$ | do. |
| **Marmor**, schwarzer . . . . . . . . | 0,00040000 | $\frac{1}{2500}$ | London. u. Paris. Observ. |
| von St. Beat . . . . . . . . . | 0,00041810 | $\frac{4}{9567}$ | Destigny. |
| schwarzer sicil. . . . . . . . . | 0,00042600 | $\frac{2}{4695}$ | Dunn und Sang. |
| „ von Galway . . . . . | 0,00044519 | $\frac{4}{8985}$ | do. |
| von Solst . . . . . . . . . . | 0,00056849 | $\frac{1}{1759}$ | Destigny. |
| carrarischer. . . . . . . . . . | 0,00065390 | $\frac{4}{6117}$ | Adie. |
| | 0,00084867 | $\frac{3}{3535}$ | Destigny. |
| weifser . . . . . . . . . . . . | 0,00100000 | $\frac{1}{1000}$ | London. n. Paris. Observ. |
| gemeiner . . . . . . . . . . . | 0,00102020 | $\frac{4}{3921}$ | Bartlett. |
| carrarischer . . . . . . . . . . | 0,00107200 | $\frac{4}{3731}$ | Dunn und Sang. |
| weifser sicil. . . . . . . . . . | 0,00110411 | $\frac{4}{3623}$ | do. |
| **Messing**, gegossen . . . . . . . . | 0,00176050 | $\frac{1}{568}$ | Sabine. |
| | 0,00182300 | $\frac{2}{1097}$ | Ellicot. |
| | 0,00186671 | $\frac{4}{2143}$ | Lavoisier. |
| | 0,00186760 | $\frac{2}{1071}$ | do. |
| | 0,00187500 | $\frac{3}{1600}$ | Smeaton. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| **Messing**, gegossen | 0,00188971 | $\frac{1}{529}$ | Lavoisier. |
| | 0,00193400 | $\frac{1}{517}$ | Berthoud. |
| Hamburger | 0,00185540 | $\frac{1}{539}$ | Roy. |
| englisches Stabmessing | 0,00189280 | $\frac{3}{1585}$ | do. |
| tyroler Tafelmessing | 0,00190300 | $\frac{2}{1051}$ | Horner. |
| geglühtes | 0,00189163 | $\frac{3}{1586}$ | Hassler. |
| | 0,00190600 | $\frac{3}{1574}$ | Prinsep. |
| ¼ Zink, ¾ Kupfer | 0,00214440 | $\frac{3}{1399}$ | Daniel. |
| **Palladium** | 0,0010000 | $\frac{1}{1000}$ | Wollaston. |
| **Pewter** | 0,00203520 | $\frac{3}{1474}$ | Daniel. |
| **Phosphor** von 0° bis 39,5° | 0,00142455 | $\frac{1}{702}$ | Erman. |
| **Platin** | 0,00085655 | $\frac{2}{2335}$ | Borda. |
| | 0,00085700 | $\frac{1}{1167}$ | Guyton-Morveau. |
| | 0,00088200 | $\frac{4}{4535}$ | Daniel. |
| | 0,00088420 | $\frac{1}{1131}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00090000 | $\frac{1}{1111}$ | Wollaston. |
| | 0,00098390 | $\frac{3}{3049}$ | Dulong und Petit. |
| | 0,00099180 | $\frac{4}{4033}$ | Troughton. |
| **Sandstein** von Liver-Roch | 0,00117430 | $\frac{2}{1703}$ | Adie. |
| gewöhnliche | 0,00171570 | $\frac{1}{583}$ | Bartlett. |
| **Silber** | 0,00190500 | $\frac{1}{525}$ | Berthoud. |
| | 0,00195120 | $\frac{2}{1425}$ | Daniel. |
| | 0,00197800 | $\frac{2}{1011}$ | Ellicot. |
| | 0,00198800 | $\frac{1}{503}$ | Guyton-Morveau. |
| | 0,00207000 | $\frac{1}{483}$ | Herbert. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| **Silber** | 0,00208260 | $\frac{1}{480}$ | Troughton. |
| Pariser | 0,00190868 | $\frac{1}{524}$ | Lavoisier. |
| Kapellensilber | 0,00190974 | $\frac{3}{1570}$ | do. |
| + $\frac{1}{12}$ Kupfer | 0,00190400 | $\frac{4}{2101}$ | Prinsep. |
| **Spiegelmetall** zu Teleskopen | 0,00193333 | $\frac{4}{2069}$ | Smeaton. |
| **Spiefsglanz** | 0,00108330 | $\frac{1}{923}$ | do. |
| **Stahl**, gehärtet | 0,00114450 | $\frac{4}{3495}$ | Roy. |
| | 0,00122500 | $\frac{3}{2449}$ | Smeaton. |
| | 0,00123956 | $\frac{4}{3227}$ | Lavoisier. |
| | 0,00137500 | $\frac{4}{2909}$ | Berthond. |
| Stahlstange | 0,00114470 | $\frac{2}{1747}$ | Roy. |
| | 0,00116000 | $\frac{1}{862}$ | de Luc. |
| bei 65° R. angelassen | 0,00123956 | $\frac{4}{3227}$ | Lavoisier |
| bei 30° R. angelassen | 0,00136900 | $\frac{2}{1461}$ | do. |
| | 0,00138600 | $\frac{2}{1443}$ | do. |
| weicher | 0,00107500 | $\frac{4}{3721}$ | Ellicot. |
| | 0,00107875 | $\frac{1}{927}$ | Lavoisier |
| | 0,00107915 | $\frac{3}{2780}$ | do. |
| | 0,00107956 | $\frac{3}{2779}$ | do. |
| | 0,00110400 | $\frac{1}{906}$ | Berthoud. |
| | 0,00115000 | $\frac{2}{1739}$ | Smeaton. |
| | 0,00118990 | $\frac{3}{2521}$ | Troughton. |
| Huntsmann's | 0,00107400 | $\frac{1}{931}$ | Horner. |
| Fischers aus Schaffhausen | 0,00111200 | $\frac{4}{3597}$ | do. |
| Steyrischer | 0,00115200 | $\frac{1}{868}$ | do. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| **Stein** (Baustein), v. St. Vernou sur Seine | 0,00043027 | $\frac{1}{2324}$ | Destigny. |
| von St. Leu . . . . . . . . . | 0,00064890 | $\frac{1}{1541}$ | do. |
| „ Caithness . . . . . . . . | 0,00089470 | $\frac{3}{3353}$ | Adie. |
| „ Arbroath. . . . . . . . . | 0,00089850 | $\frac{1}{1113}$ | do. |
| schiefrig von Penrhyn . . . . . | 0,00103760 | $\frac{4}{3855}$ | do. |
| **Tannenholz** . . . . . . . . . . . . | 0,00035200 | $\frac{1}{2841}$ | Struwe. |
| | 0,00049590 | $\frac{2}{4033}$ | Kater. |
| **Thon**, holländ. Pfeife . . . . . . . | 0,00045730 | $\frac{4}{8747}$ | Adie. |
| **Töpferzeug**, braun engl. . . . . . . | 0,00012 | $\frac{3}{25000}$ | Destigny. |
| durch Kohle porös . . . . . . | 0,00004 | $\frac{1}{25000}$ | do. |
| **Wedgwood-Stange** . . . . . . . . . | 0,00045294 | $\frac{1}{2208}$ | Adie. |
| „ **Waare** . . . . . . . . . | 0,00088200 | $\frac{4}{4535}$ | Daniel. |
| **Ziegel**, ord. . . . . . . . . . . . | 0,00055020 | $\frac{2}{3635}$ | Adie. |
| spröde . . . . . . . . . . . . . | 0,00049280 | $\frac{4}{8117}$ | do. |
| **Zink**, gegossen . . . . . . . . . . | 0,00294167 | $\frac{1}{340}$ | Smeaton. |
| | 0,00296800 | $\frac{1}{337}$ | Horner. |
| | 0,00297600 | $\frac{1}{336}$ | Daniel. |
| | 0,00305100 | $\frac{4}{1311}$ | Guyton-Morveau. |
| durch Hämmern um $\frac{1}{12}$ verlängert | 0,00310833 | $\frac{4}{1287}$ | Smeaton. |
| **Zinn**, gemeines . . . . . . . . . | 0,00176640 | $\frac{1}{566}$ | Daniel. |
| | 0,00248330 | $\frac{3}{1208}$ | Smeaton. |
| feines . . . . . . . . . . . . | 0,00209300 | $\frac{4}{1911}$ | Horner. |
| | 0,00216400 | $\frac{1}{462}$ | Guyton-Morveau. |
| | 0,00228330 | $\frac{1}{438}$ | Smeaton. |
| | 0,00232200 | $\frac{3}{1292}$ | Herbert. |

| Stoffe. | Ausdehnung von 0° bis 100° C. | | Beobachter. |
|---|---|---|---|
| Zinn, feines . . . . . . . . . . . | 0,00255700 | $\frac{1}{391}$ | Berthoud. |
| von Malakka . . . . . . . . . | 0,00193765 | $\frac{1}{516}$ | Lavoisier. |
| | 0,00217298 | $\frac{1}{460}$ | do. |

2. Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten.

Da Flüssigkeiten in Gefäfsen eingeschlossen sein müssen, so unterscheidet man absolute A. und relative oder scheinbare A. Erstere ist diejenige A., welche die Flüssigkeit wirklich erhält, letztere die, welche man durch Beobachtung findet, indem das Gefäfs ebenfalls sich ausdehnt; die erstere A. ist die, welche in Betracht kommt, und die man aus der letzteren mit Berücksichtigung der bekannten A. des Gefäfsstoffes oder wo möglich so bestimmt, dafs die A. der Gefäfse schon in dem Experiment ohne Einflufs ist.

Die einfachste Weise zur Ermittelung der A. von Flüssigkeiten geschieht in einem Gefäfs, dessen Obertheil in eine calibrirte Röhre endigt. Wägt man das Gefäfs ab, füllt es bis zum Anfang der Röhre mit irgend einer Flüssigkeit, wägt wieder, erfährt also das Gewicht der Flüssigkeit, giefst genau $\frac{1}{10}$ des Gewichts derselben hinzu, so hat man in der oberen Röhre auf die markirte Höhe $\frac{1}{10}$ des Volumens des zuerst Eingegossenen; theilt man diese Höhe in 100 gleiche Theile, so giebt jeder Theil $\frac{1}{1000}$ jenes Volumen. Füllt man nun bei einer Temperatur von 0° C. das Gefäfs bis zum untersten Theilstrich mit irgend einer Flüssigkeit, und erwärmt, so kann man die A. in Tausendteln des Ganzen ablesen. Mehrere andere Apparate und Verfahrungsweisen findet man in physikalischen Lehrbüchern beschrieben.

Das Gefäfs mufs durchsichtig, also von Glas sein; bei einer Temperatur-Erhöhung dehnen sich die Gefäfswandungen in der Länge und im Querschnitt, also cubisch aus. Ist daher die lineare A. des Glases bei 1° C. $= d$, so ist dessen cubische (s. pag. 188) $= 3d$, und das Volum $V$, welches den inneren cubischen Raum ausdrückt, wird bei Erhöhung der Temperatur um $n°$ C. $= V\,(1+3nd)$ ausgedehnt.

Liest man nun bei $n°$ C. die cubische A. der Flüssigkeit vom ursprünglichen Volum $V=\frac{m}{1000}$, so ist diese offenbar zu klein, denn das abgelesene Volum $V\left(1+\frac{m}{1000}\right)$ ist das ursprüngliche bei 0° C., jetzt beträgt dasselbe $V\left(1+\frac{m}{1000}\right)$ $(1+3nd)$.

Nennt man daher die wirkliche cubische A. der Flüssigkeit bei 1° C. $= D'$, so hat man

$$V(1+nD')=V\left(1+\frac{m}{1000}\right)(1+3nd)$$

$$\text{woraus } D'=3d+\frac{m}{1000}\left(\frac{1}{n}+3d\right)$$

und die lineare A. der Flüssigkeit bei 1° C.

$$=d+\frac{m}{1000}\cdot\frac{1+3nd}{3n}$$

Die A. der Flüssigkeiten sind gröfser als die der festen Körper und auch bei gleichen Temperatur-Unterschieden nicht so regelmäfsig, besonders nicht in der Nähe der Wärmegrade, bei welchen sie in Gasform übergehen.

Aus diesem Grunde ist man genöthigt, jede einzelne Flüssigkeit in ihrem Verhältnifs des Volums zu dem jedesmaligen Wärmegrade besonders zu untersuchen.

3. Ausdehnung des Quecksilbers.

Diese ist innerhalb des thermometrischen Fundamental-Abstandes für jeden Grad Wärme gleich grofs anzunehmen. Die Resultate der Versuche darüber weichen nur wenig von einander ab. Muschenbroek hat die geringste A. gefunden, nämlich von 0° bis 100° C. = 1,014; Dalton die gröfste = 1,02. Sämmtliche Physiker haben die beobachteten A. nach den resp. A. der Glasarten reducirt; nur

Dulong und Petit haben sie unabhängig von Gefäſswandungen gefunden, und daher hat ihre Angabe der A. des Quecksilbers das meiste Vertrauen. Sie beträgt

von $1^\circ - 100^\circ$ C. $= \frac{1}{55{,}50} = 0{,}018018$

„ $100^\circ - 200^\circ$ C. $= \frac{1}{54{,}25} = 0{,}018433$

„ $200^\circ - 300^\circ$ C. $= \frac{1}{53{,}00} = 0{,}018868$

Wegen des Quecksilber-Thermometers und der Correctionen des Barometers interessirt die A. zwischen 0° und 100° C. am meisten. Ist das Volum des Quecksilbers bei 0° C. = 1,
so ist es bei 1° C. = 1,00018
bei 100° C. $= 1 + 100 \times 0{,}00018 = 1{,}018018$

Ist die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° C. = 1,

so ist sie bei 1° C. $= \frac{1}{1{,}00018} = 0{,}99982$

bei 100° C. $= \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 1° C. ist mithin um $1 - 0{,}99982 = 0{,}00018$ kleiner als bei 0° C.; bei 100° C. um $1 - 0{,}98230 = 0{,}01770$ kleiner als bei 0° C.

Es ist aber $0{,}01770 = 98\tfrac{1}{3} \times 0{,}00018$, also beinahe $100 \times 0{,}00018$

Man kann daher ohne wahrnehmbaren Fehler die Abnahme der Dichtigkeiten ebenfalls proportional den Wärmegraden annehmen.

Der Grund hiervon ist leicht einzusehen: Lös't man nämlich den Bruch $\frac{1}{1{,}00018}$ in einen Kettenbruch auf, so erhält man

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5555+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}$$

und dieser ist sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{5555}} = \frac{5555}{5555+1} = 0{,}999820$$

bei 2° C. sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{5555}} = \frac{5555}{5555+2} = 0{,}999640$$

bei 100° C. sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{100}{5555}} = \frac{5555}{5555+100} = 0{,}982317$$

Bei der 100theiligen (Celsius) Scala ist hiernach sehr leicht für jeden Grad Wärme Volumen und Dichtigkeit zu finden.

Bei der 80theiligen (Réaumur) hat man die A. des Quecksilbers für jeden Grad

$$= 1 + \frac{0{,}018018}{80} = 1{,}000225225$$

Ist also das Volum des Quecks. bei 0° R. = 1, so ist es bei 1° R. = 1.000225
bei 80° R. = 1,018018

Ist die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° R. = 1,

so ist sie bei 1° R. $= \frac{1}{1{,}000225} = 0{,}999775$

bei 80° R. $= \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$

Die Dichtigkeit des Quecks. ist mithin kleiner als bei 0° R.
Bei 1° R. um 0,000225
„ 80° R. um 0,01770

Es ist aber $0{,}01770 = 78\tfrac{2}{3} \times 0{,}000225$, also beinahe $= 80 \times 0{,}000225$

Man kann also auch hier die Abnahme der Dichtigkeiten proportional den Wärmegraden annehmen, und zwar erhält man für 1° R. als Kettenbruch

$$\frac{1}{1{,}000225} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4444+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}}} = \text{sehr nahe}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4444}} = \frac{4444}{4444+1} = 0{,}999775$$

für 80° R. = sehr nahe $\frac{4444}{4444+80} = 0{,}982317$

Bei der 180theiligen Scala (Fahrenheit: 0° C. = 0° R. = 32° F.; 100° C. = 80° R. = 212° F.) hat man die A. des Quecksilbers für jeden Grad

$$= 1 + \frac{0{,}018018}{180} = 1{,}0001001$$

Ist also das Volum des Quecks. bei 32° F. = 1,
so ist es bei 1° F. = 1,0001001
bei 212° F. wieder = 1,018018

Ist die Dichtigkeit des Quecksilb. bei 32° F. = 1,

so ist sie bei 33° F. $= \frac{1}{1{,}0001} = 0{,}99990$

bei 212° F. $= \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$

Die Dichtigkeit des Quecks. ist mithin kleiner als bei 32° F.; bei 33° F. um 0,0001
bei 212° F. um 0,01770

Nun ist wieder $0{,}01770 = 177 \times 0{,}0001$; beinahe $= 180 \times 0{,}0001$; die Abnahme der Dichtigkeiten des Quecksilb. also wieder proportional den Wärmegraden.

Bei allen 3 Scalen kann man eben so für die Grade unter dem Gefrierpunkt des Wassers die Abnahme der Volume und die Zunahme der Dichtigkeiten des Quecks. proportional den Wärmegraden, und zwar in den oben aufgeführten Verhältnissen annehmen. In Schubarth's Tabellen etc. befindet sich unter No. 36, pag. 50 die Tabelle über Dichte und Volumen des Quecks. nach Dulong und Petit von − 20° bis 30° C. (aus Baumgartners Naturlehre, Suppl. S. 924, entnommen). Folgende Tabelle enthält dieselbe in mehreren Rechnungsfehlern corrigirt und bis 100° C. fortgesetzt.

## Tabelle

über Volumen und Dichtigkeit des Quecksilbers nach Dulong und Petit von − 20° C. bis + 100° C.

| Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. | Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. |
|---|---|---|---|---|---|
| − 20° C. | 0,99640 | 1,00362 | + 20° C. | 1,00360 | 0,99641 |
| 19 | 0,99658 | 1,00344 | 21 | 1,00378 | 0,99623 |
| 18 | 0,99676 | 1,00325 | 22 | 1,00396 | 0,99605 |
| 17 | 0,99694 | 1,00307 | 23 | 1,00414 | 0,99587 |
| 16 | 0,99712 | 1,00289 | 24 | 1,00432 | 0,99569 |
| 15 | 0,99730 | 1,00271 | 25 | 1,00450 | 0,99552 |
| 14 | 0,99748 | 1,00253 | 26 | 1,00468 | 0,99534 |
| 13 | 0,99766 | 1,00235 | 27 | 1,00486 | 0,99516 |
| 12 | 0,99784 | 1,00217 | 28 | 1,00504 | 0,99498 |
| 11 | 0,99802 | 1,00199 | 29 | 1,00522 | 0,99480 |
| 10 | 0,99820 | 1,00181 | 30 | 1,00541 | 0,99462 |
| 9 | 0,99838 | 1,00162 | 31 | 1,00559 | 0,99445 |
| 8 | 0,99856 | 1,00144 | 32 | 1,00577 | 0,99427 |
| 7 | 0,99874 | 1,00126 | 33 | 1,00595 | 0,99409 |
| 6 | 0,99892 | 1,00108 | 34 | 1,00613 | 0,99391 |
| 5 | 0,99910 | 1,00090 | 35 | 1,00631 | 0,99373 |
| 4 | 0,99928 | 1,00072 | 36 | 1,00649 | 0,99356 |
| 3 | 0,99946 | 1,00054 | 37 | 1,00667 | 0,99338 |
| 2 | 0,99964 | 1,00036 | 38 | 1,00685 | 0,99320 |
| 1 | 0,99982 | 1,00018 | 39 | 1,00703 | 0,99302 |
| 0 | 1,00000 | 1,00000 | 40 | 1,00721 | 0,99284 |
| + 1 | 1,00018 | 0,99982 | 41 | 1,00739 | 0,99267 |
| 2 | 1,00036 | 0,99964 | 42 | 1,00757 | 0,99249 |
| 3 | 1,00054 | 0,99946 | 43 | 1,00775 | 0,99231 |
| 4 | 1,00072 | 0,99928 | 44 | 1,00793 | 0,99213 |
| 5 | 1,00090 | 0,99910 | 45 | 1,00811 | 0,99196 |
| 6 | 1,00108 | 0,99892 | 46 | 1,00829 | 0,99178 |
| 7 | 1,00126 | 0,99874 | 47 | 1,00847 | 0,99160 |
| 8 | 1,00144 | 0,99856 | 48 | 1,00865 | 0,99143 |
| 9 | 1,00162 | 0,99838 | 49 | 1,00883 | 0,99125 |
| 10 | 1,00180 | 0,99820 | 50 | 1,00901 | 0,99107 |
| 11 | 1,00198 | 0,99802 | 51 | 1,00919 | 0,99089 |
| 12 | 1,00216 | 0,99784 | 52 | 1,00937 | 0,99072 |
| 13 | 1,00234 | 0,99766 | 53 | 1,00955 | 0,99054 |
| 14 | 1,00252 | 0,99748 | 54 | 1,00973 | 0,99036 |
| 15 | 1,00270 | 0,99730 | 55 | 1,00991 | 0,99019 |
| 16 | 1,00288 | 0,99713 | 56 | 1,01009 | 0,99001 |
| 17 | 1,00306 | 0,99695 | 57 | 1,01027 | 0,98983 |
| 18 | 1,00324 | 0,99677 | 58 | 1,01045 | 0,98966 |
| 19 | 1,00342 | 0,99659 | 59 | 1,01063 | 0,98948 |

| Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. | Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. |
|---|---|---|---|---|---|
| + 60° C. | 1,01081 | 0,98930 | + 80° C. | 1,01441 | 0,98579 |
| 61 | 1,01099 | 0,98913 | 81 | 1,01459 | 0,98562 |
| 62 | 1,01117 | 0,98895 | 82 | 1,01477 | 0,98544 |
| 63 | 1,01135 | 0,98878 | 83 | 1,01496 | 0,98527 |
| 64 | 1,01153 | 0,98860 | 84 | 1,01514 | 0,98510 |
| 65 | 1,01171 | 0,98842 | 85 | 1,01532 | 0,98492 |
| 66 | 1,01189 | 0,98825 | 86 | 1,01550 | 0,98474 |
| 67 | 1,01207 | 0,98807 | 87 | 1,01568 | 0,98457 |
| 68 | 1,01225 | 0,98790 | 88 | 1,01586 | 0,98439 |
| 69 | 1,01243 | 0,98772 | 89 | 1,01604 | 0,98422 |
| 70 | 1,01261 | 0,98754 | 90 | 1,01622 | 0,98404 |
| 71 | 1,01279 | 0,98737 | 91 | 1,01640 | 0,98387 |
| 72 | 1,01297 | 0,98719 | 92 | 1,01658 | 0,98369 |
| 73 | 1,01315 | 0,98702 | 93 | 1,01676 | 0,98352 |
| 74 | 1,01333 | 0,98684 | 94 | 1,01694 | 0,98335 |
| 75 | 1,01351 | 0,98667 | 95 | 1,01712 | 0,98317 |
| 76 | 1,01369 | 0,98649 | 96 | 1,01730 | 0,98300 |
| 77 | 1,01387 | 0,98632 | 97 | 1,01748 | 0,98282 |
| 78 | 1,01405 | 0,98614 | 98 | 1,01766 | 0,98265 |
| 79 | 1,01423 | 0,98597 | 99 | 1,01784 | 0,98247 |
| | | | 100 | 1,01802 | 0,98230 |

4. Ausdehnung des Wassers.

Diese ist so unregelmäfsig, dafs bis jetzt noch kein Gesetz aufgefunden worden, welches sich als allgemein gültig bewährt hätte. Bei 0° C. gefriert das Wasser, bei 100° C. ist dessen Siedepunkt, allein seine gröfste Dichtigkeit hat es einige Grade über 0, und auch dieser Punkt der gröfsten Dichtigkeit ist noch streitig: er wird von 3,75° C. bis 4,40° C. angegeben.

Nach den Beobachtungen von de Luc soll folgende Formel ziemlich genau die Ausdehnung des Wassers bei allen Graden von 0 bis 80° (Réaumur) angeben.

$$DT = -0,16\,t + 0,0185\,t^2 - 0,00005\,t^3$$

Mit dieser in Gehler's Wörterbuch, Bd. 1, pag. 609, angegebenen, aber dort unklar gelassenen Formel hat es folgende Bewandtnifs.

Man denke sich 2 Thermometer, das eine mit Quecksilber, das andere mit Wasser gefüllt; in beiden der Stand bei 0° und bei 80° Temperatur vermerkt, und in beiden die so erhaltenen Fundamental-Abstände in 80 gleiche Theile getheilt, so giebt $DT$ den Grad des Wasser-Thermometers an, wenn das Quecksilber-Thermometer den Grad $t$ zeigt. Die Formel giebt für $t=0$, auch $DT=0$, und für $t=80$, auch $DT=80$.

Das Minimum des Wasserstandes erhält man aus

$$\frac{\delta DT}{\Delta t} = 0 = -0,16 + 0,037\,t - 0,00015\,t^2$$

geordnet

$$t^2 - \frac{740}{3}\,t + \frac{3200}{3} = 0$$

woraus

$$t = +\frac{370}{3} - \frac{356,8}{3} = 4,3$$

Da das Quecksilber mit seinen gleichförmigen Ausdehnungen die gleichförmige Zunahme der Wärmemenge angiebt, so zeigt sich die unregelmäfsige Ausdehnung des Wassers wie folgt:

| Grade $t$ des Quecksilber-Therm. | Grade $DT$ des Wasser-Therm. | Differenz von $DT$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | − 0,14155 | 0,14155 |
| 2 | 0,2464 | 0,10485 |
| 3 | 0,31485 | 0,06845 |
| 4 | 0,3472 | 0,03235 |
| 4,3 | 0,34991 | 0,00271 |
| 5 | 0,34375 | 0,00616 |

| Grade $t$ des Quecksilber-Therm. | Grade $DT$ des Wasser-Therm. | Differenz von $DT$ |
|---|---|---|
| | | 0,03895 |
| 6 | − 0,30480 | |
| | | 0,07415 |
| 7 | 0,23065 | |
| | | 0,10905 |
| 8 | 0,1216 | |
| | | 0,09955 |
| 9 | + 0,02205 | |
| | | 0,17795 |
| 10 | 0,2 | |
| | | 3,6 |
| 20 | 3,8 | |
| | | 6,7 |
| 30 | 10,5 | |
| | | 9,5 |
| 40 | 20 | |
| | | 12 |
| 50 | 32 | |
| | | 14,2 |
| 60 | 46,2 | |
| | | 16,1 |
| 70 | 62,3 | |
| | | 17,7 |
| 80 | 80 | |

Gehler's Wörterbuch, Bd. X. 1, pag. 913, enthält eine von Hallström berechnete Tabelle für die Volumina und Dichtigkeiten, erstere ($V$) von 0° bis 30° C. berechnet nach der Formel:

$$V = 1 - 0{,}000057577 \cdot t + 0{,}0000075601 \cdot t^2 - 0{,}000000035091 \cdot t^3$$

nach welcher die gröfste Dichtigkeit bei 3,92° stattfinden soll. Um dies zu prüfen, hat man

$$\frac{\partial V}{\Delta t} = 0 = -0{,}000057577 + 0{,}0000151202\,t - 0{,}000000105273\,t^2$$

geordnet

$$t^2 - 143{,}628\,t + 546{,}93036 = 0$$

woraus

$$t = +71{,}814 - 67{,}899 = 3{,}915^\circ$$

Von 30 bis 100° ist nach den Versuchszahlen von Muncke die Formel angewendet:

$$V = 1 - 0{,}0000094178\,t + 0{,}00000533661\,t^2 - 0{,}0000000104086\,t^3$$

Eine Prüfung dieser Tabelle mittelst Differenzen ergab so auffallend unregelmäfsige Intervalle, dafs sie mir als unrichtig erscheinen mufste; sie ist auch nur bis zu 30°, mit Ausnahme der 3 Zahlen für 7°, 8° und 9°, von 30° bis 100° aber nur in den Zehnern richtig. Aus diesem Grunde habe ich die Hallström'sche Tabelle durchweg corrigirt und mit Differenzen versehen.

Das Volumen für 30° giebt

nach der ersten Formel 1,004129
" " zweiten " 1,004239

Gesetzt ist das Mittel 1,004184

| Temperatur $t$ | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 0° C. | 1,000000 | | 1,000000 | |
| | | 50 | | 50 |
| 1 | 0,999950 | | 1,000050 | |
| | | 35 | | 35 |
| 2 | 0,999915 | | 1,000085 | |
| | | 21 | | 21 |
| 3 | 0,999894 | | 1,000106 | |
| | | 12 | | 12 |
| 3,9 | 0,999882 | | 1,000118 | |
| | | 6 | | 6 |
| 4 | 0,999888 | | 1,000112 | |
| | | 9 | | 9 |
| 5 | 0,999897 | | 1,000103 | |
| | | 22 | | 22 |
| 6 | 0,999919 | | 1,000081 | |
| | | 36 | | 36 |
| 7 | 0,999955 | | 1,000045 | |
| | | 50 | | 50 |
| 8 | 1,000005 | | 0,999995 | |
| | | 64 | | 64 |
| 9 | 1,000069 | | 0,999931 | |
| | | 76 | | 76 |
| 10 | 1,000145 | | 0,999855 | |
| | | 90 | | 90 |
| 11 | 1,000235 | | 0,999765 | |
| | | 103 | | 103 |
| 12 | 1,000338 | | 0,999662 | |
| | | 115 | | 115 |
| 13 | 1,000453 | | 0,999547 | |

| Temperatur $t$ | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 14° C. | 1,000581 | 128 | 0,999419 | 128 |
| 15 | 1,000720 | 139 | 0,999281 | 138 |
| 16 | 1,000872 | 152 | 0,999128 | 153 |
| 17 | 1,001035 | 163 | 0,998966 | 162 |
| 18 | 1,001210 | 175 | 0,998792 | 174 |
| 19 | 1,001397 | 187 | 0,998605 | 187 |
| 20 | 1,001594 | 197 | 0,998409 | 196 |
| 21 | 1,001802 | 208 | 0,998201 | 208 |
| 22 | 1,002022 | 220 | 0,997982 | 219 |
| 23 | 1,002251 | 229 | 0,997754 | 228 |
| 24 | 1,002491 | 240 | 0,997515 | 239 |
| 25 | 1,002741 | 250 | 0,997266 | 249 |
| 26 | 1,003001 | 260 | 0,997008 | 258 |
| 27 | 1,003271 | 270 | 0,996740 | 268 |
| 28 | 1,003549 | 278 | 0,996463 | 277 |
| 29 | 1,003837 | 288 | 0,996178 | 285 |
| 30 | 1,004184 | 347 | 0,995833 | 345 |
| 31 | 1,004526 | 342 | 0,995494 | 339 |
| 32 | 1,004822 | 296 | 0,995201 | 293 |
| 33 | 1,005127 | 305 | 0,994899 | 302 |
| 34 | 1,005440 | 313 | 0,994589 | 310 |
| 35 | 1,005761 | 321 | 0,994272 | 317 |
| 36 | 1,006092 | 331 | 0,993945 | 327 |
| 37 | 1,006430 | 338 | 0,993611 | 334 |
| 38 | 1,006777 | 347 | 0,993269 | 342 |
| 39 | 1,007132 | 355 | 0,992919 | 350 |
| 40 | 1,007496 | 364 | 0,992560 | 359 |
| 41 | 1,007867 | 371 | 0,992195 | 365 |
| 42 | 1,008247 | 380 | 0,991820 | 375 |
| 43 | 1,008635 | 388 | 0,991439 | 381 |
| 44 | 1,009031 | 396 | 0,991050 | 389 |
| 45 | 1,009434 | 403 | 0,990654 | 396 |
| 46 | 1,009846 | 412 | 0,990250 | 404 |
| 47 | 1,010265 | 419 | 0,989839 | 411 |
| 48 | 1,010691 | 426 | 0,989422 | 417 |
| 49 | 1,011127 | 436 | 0,988995 | 427 |
| 50 | 1,011570 | 443 | 0,988562 | 433 |

| Temperatur $t$ | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 51° C. | 1,012020 | 450 | 0,988123 | 439 |
| 52 | 1,012477 | 457 | 0,987677 | 446 |
| 53 | 1,012942 | 465 | 0,987223 | 454 |
| 54 | 1,013414 | 472 | 0,986764 | 459 |
| 55 | 1,013894 | 480 | 0,986297 | 467 |
| 56 | 1,014380 | 486 | 0,985824 | 473 |
| 57 | 1,014874 | 494 | 0,985344 | 480 |
| 58 | 1,015375 | 501 | 0,984858 | 486 |
| 59 | 1,015883 | 508 | 0,984365 | 493 |
| 60 | 1,016398 | 515 | 0,983867 | 498 |
| 61 | 1,016920 | 522 | 0,983362 | 505 |
| 62 | 1,017449 | 529 | 0,982850 | 512 |
| 63 | 1,017985 | 536 | 0,982333 | 517 |
| 64 | 1,018527 | 542 | 0,981810 | 523 |
| 65 | 1,019076 | 549 | 0,981281 | 529 |
| 66 | 1,019632 | 556 | 0,980746 | 535 |
| 67 | 1,020194 | 562 | 0,980206 | 540 |
| 68 | 1,020763 | 569 | 0,979659 | 547 |
| 69 | 1,021338 | 575 | 0,979108 | 551 |
| 70 | 1,021920 | 582 | 0,978550 | 558 |
| 71 | 1,022508 | 588 | 0,977988 | 562 |
| 72 | 1,023102 | 594 | 0,977420 | 568 |
| 73 | 1,023702 | 600 | 0,976847 | 573 |
| 74 | 1,024309 | 607 | 0,976268 | 579 |
| 75 | 1,024921 | 612 | 0,975685 | 583 |
| 76 | 1,025539 | 618 | 0,975097 | 588 |
| 77 | 1,026164 | 625 | 0,974503 | 594 |
| 78 | 1,026794 | 630 | 0,973905 | 598 |
| 79 | 1,027430 | 636 | 0,973302 | 603 |
| 80 | 1,028072 | 642 | 0,972694 | 608 |
| 81 | 1,028719 | 647 | 0,972083 | 611 |
| 82 | 1,029372 | 653 | 0,971466 | 617 |
| 83 | 1,030031 | 659 | 0,970845 | 621 |
| 84 | 1,030695 | 664 | 0,970219 | 626 |
| 85 | 1,031364 | 669 | 0,969590 | 629 |
| 86 | 1,032039 | 675 | 0,968956 | 634 |
| 87 | 1,032719 | 680 | 0,968318 | 638 |

| Temperatur $t$ | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 88° C. | 1,033405 | 686 | 0,967675 | 643 |
| 89 | 1,034096 | 691 | 0,967028 | 647 |
| 90 | 1,034791 | 695 | 0,966379 | 649 |
| 91 | 1,035492 | 701 | 0,965725 | 654 |
| 92 | 1,036198 | 706 | 0,965067 | 658 |
| 93 | 1,036908 | 710 | 0,964406 | 661 |
| 94 | 1,037624 | 716 | 0,963740 | 666 |
| 95 | 1,038344 | 720 | 0,963072 | 668 |
| 96 | 1,039069 | 725 | 0,962400 | 672 |
| 97 | 1,039799 | 730 | 0,961724 | 676 |
| 98 | 1,040533 | 734 | 0,961046 | 678 |
| 99 | 1,041272 | 739 | 0,960364 | 682 |
| 100 | 1,042016 | 744 | 0,959678 | 686 |

Despretz hat die Volume des Wassers bestimmt, indem er zwischen den Temperaturen von 4° C. (den er als Punkt der größten Dichtigkeit annimmt) bis 100° C. 19 eigene Beobachtungen zu Grunde legte und die für die zwischen liegenden Temperaturen mit Hülfe graphischer Interpolation auffand.

Folgende Tabelle enthält diese Volume mit den von mir berechneten Dichtigkeiten und den Differenzen.

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 4° C. | 1,0000000 | 82 | 0,0000000 | 83 |
| 5 | 1,0000082 | 227 | 0,9999917 | 226 |
| 6 | 1,0000309 | 399 | 0,9999691 | 399 |
| 7 | 1,0000708 | 508 | 0,9999292 | 508 |
| 8 | 1,0001216 | 663 | 0,9998784 | 664 |
| 9 | 1,0001879 | 805 | 0,9998120 | 804 |
| 10 | 1,0002684 | 914 | 0,9997316 | 913 |
| 11 | 1,0003598 | 1125 | 0,9996403 | 1123 |
| 12 | 1,0004723 | 1139 | 0,9995280 | 1138 |
| 13 | 1,0005862 | 1284 | 0,9994142 | 1282 |
| 14 | 1,0007146 | 1605 | 0,9992860 | 1604 |
| 15 | 1,0008751 | 1464 | 0,9991256 | 1461 |
| 16 | 1,0010215 | 1852 | 0,9989795 | 1846 |
| 17 | 1,0012067 | | 0,9987949 | |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| | | 1833 | | 1849 |
| 18° C. | 1,00139 | | 0,99861 | |
| | | 19 | | 19 |
| 19 | 1,00158 | | 0,99842 | |
| | | 21 | | 21 |
| 20 | 1,00179 | | 0,99821 | |
| | | 21 | | 21 |
| 21 | 1,00200 | | 0,99800 | |
| | | 22 | | 22 |
| 22 | 1,00222 | | 0,99778 | |
| | | 22 | | 21 |
| 23 | 1,00244 | | 0,99757 | |
| | | 27 | | 27 |
| 24 | 1,00271 | | 0,99730 | |
| | | 22 | | 22 |
| 25 | 1,00293 | | 0,99708 | |
| | | 28 | | 28 |
| 26 | 1,00321 | | 0,99680 | |
| | | 24 | | 24 |
| 27 | 1,00345 | | 0,99656 | |
| | | 29 | | 29 |
| 28 | 1,00374 | | 0,99627 | |
| | | 29 | | 28 |
| 29 | 1,00403 | | 0,99599 | |
| | | 30 | | 30 |
| 30 | 1,00433 | | 0,99569 | |
| | | 30 | | 30 |
| 31 | 1,00463 | | 0,99539 | |
| | | 31 | | 31 |
| 32 | 1,00494 | | 0,99508 | |
| | | 31 | | 30 |
| 33 | 1,00525 | | 0,99478 | |
| | | 30 | | 30 |
| 34 | 1,00555 | | 0,99448 | |
| | | 38 | | 38 |
| 35 | 1,00593 | | 0,99410 | |
| | | 31 | | 30 |
| 36 | 1,00624 | | 0,99380 | |
| | | 37 | | 37 |
| 37 | 1,00661 | | 0,99343 | |
| | | 38 | | 37 |
| 38 | 1,00699 | | 0,99306 | |
| | | 35 | | 35 |
| 39 | 1,00734 | | 0,99271 | |
| | | 39 | | 38 |
| 40 | 1,00773 | | 0,99233 | |
| | | 39 | | 38 |
| 41 | 1,00812 | | 0,99195 | |
| | | 41 | | 41 |
| 42 | 1,00853 | | 0,99154 | |
| | | 41 | | 40 |
| 43 | 1,00894 | | 0,99114 | |
| | | 44 | | 43 |
| 44 | 1,00938 | | 0,99071 | |
| | | 47 | | 46 |
| 45 | 1,00985 | | 0,99025 | |
| | | 35 | | 35 |
| 46 | 1,01020 | | 0,98990 | |
| | | 47 | | 46 |
| 47 | 1,01067 | | 0,98944 | |
| | | 42 | | 41 |
| 48 | 1,01109 | | 0,98903 | |
| | | 48 | | 47 |
| 49 | 1,01157 | | 0,98856 | |
| | | 48 | | 47 |
| 50 | 1,01205 | | 0,98809 | |
| | | 43 | | 42 |
| 51 | 1,01248 | | 0,98767 | |
| | | 49 | | 47 |
| 52 | 1,01297 | | 0,98720 | |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 53° C. | 1,01345 | 48 | 0,98673 | 47 |
| 54 | 1,01395 | 50 | 0,98624 | 49 |
| 55 | 1,01445 | 50 | 0,98576 | 48 |
| 56 | 1,01495 | 50 | 0,98527 | 49 |
| 57 | 1,01547 | 52 | 0,98477 | 50 |
| 58 | 1,01597 | 50 | 0,98428 | 49 |
| 59 | 1,01647 | 50 | 0,98380 | 48 |
| 60 | 1,01698 | 51 | 0,98330 | 50 |
| 61 | 4,01752 | 54 | 0,98278 | 52 |
| 62 | 1,01809 | 57 | 0,98223 | 55 |
| 63 | 1,01862 | 53 | 0,98172 | 51 |
| 64 | 1,01913 | 51 | 0,98123 | 49 |
| 65 | 1,01967 | 54 | 0,98071 | 52 |
| 66 | 1,02025 | 58 | 0,98015 | 56 |
| 67 | 1,02085 | 60 | 0,97958 | 57 |
| 68 | 1,02144 | 59 | 0,97901 | 57 |
| 69 | 1,02200 | 56 | 0,97847 | 54 |
| 70 | 1,02255 | 55 | 0,97795 | 52 |
| 71 | 1,02315 | 60 | 0,97737 | 58 |
| 72 | 1,02375 | 60 | 0,97680 | 57 |
| 73 | 1,02440 | 65 | 0,97618 | 62 |
| 74 | 1,02509 | 69 | 0,97552 | 66 |
| 75 | 1,02562 | 53 | 0,97502 | 50 |
| 76 | 1,02631 | 69 | 0,97436 | 66 |
| 77 | 1,02694 | 63 | 0,97377 | 59 |
| 78 | 1,02761 | 67 | 0,97313 | 64 |
| 79 | 1,02823 | 62 | 0,97255 | 58 |
| 80 | 1,02885 | 62 | 0,97196 | 69 |
| 81 | 1,02954 | 69 | 0,97131 | 65 |
| 82 | 1,03022 | 68 | 0,97067 | 64 |
| 83 | 1,03090 | 68 | 0,97003 | 64 |
| 84 | 1,03156 | 66 | 0,96941 | 62 |
| 85 | 1,03225 | 69 | 0,96876 | 65 |
| 86 | 1,03293 | 68 | 0,96812 | 64 |
| 87 | 1,03361 | 68 | 0,96748 | 64 |
| 88 | 1,03430 | 69 | 0,96684 | 64 |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| 89° C. | 1,03500 | | 0,96618 | |
| | | 70 | | 66 |
| 90 | 1,03566 | | 0,96557 | |
| | | 66 | | 61 |
| | | 73 | | 68 |
| 91 | 1,03639 | | 0,96489 | |
| | | 71 | | 66 |
| 92 | 1,03710 | | 0,96423 | |
| | | 72 | | 67 |
| 93 | 1,03782 | | 0,96356 | |
| | | 70 | | 65 |
| 94 | 1,03852 | | 0,96291 | |
| | | 73 | | 68 |
| 95 | 1,03925 | | 0,96223 | |
| | | 74 | | 68 |
| 96 | 1,03999 | | 0,96155 | |
| | | 78 | | 72 |
| 97 | 1,04077 | | 0,96083 | |
| | | 76 | | 70 |
| 98 | 1,04153 | | 0,96013 | |
| | | 75 | | 69 |
| 99 | 1,04228 | | 0,95944 | |
| | | 87 | | 81 |
| 100 | 1,04315 | | 0,95863 | |

5. **Ausdehnung des Weingeistes.**

Diese zu bestimmen, ist deshalb von großer Wichtigkeit, weil der W. zu Thermometern angewendet wird und zur Bestimmung hoher Kältegrade nicht entbehrt werden kann, denn er gefriert erst bei − 56° C., aber er siedet schon bei 78,4° C. und ist also zur Bestimmung hoher Wärmegrade nicht anwendbar.

Zu Thermometern wird der W. nicht absolut genommen, er ist immer mit wenigem Wasser und auch mit Farbestoff vermischt, und der Gefrierpunkt des absoluten W. scheint noch tiefer zu liegen.

Gehler's physik. Wörterbuch, Bd. X. 1, pag. 921, erwähnt der Versuche von Muncke mit W., dessen spec. Gew. bei 20° C. (statt 0,791 für abs. W.) 0,801 betrug, von 5° zu 5° C., denen die Formel für die Volume entsprach:

$$V = 1 + 0{,}000989666\,t + 0{,}00000303489\,t^2 - 0{,}0000000395924\,t^3 + 0{,}000000000036364\,t^4$$

wonach $t$ für die größte Dichtigkeit des W. − 56,5 betragen soll. Um dies zu prüfen, hat man für's Minimum des $V$, also für's Maximum der Dichtigkeit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 = 0{,}000989666 + 0{,}00000606978\,t - 0{,}0000001187772\,t^2 + 0{,}000000000145456\,t^3$$

und geordnet:

$$t^3 - 81{,}6585\,t^2 + 4172{,}932\,t + 680388{,}6 = 0$$

Um das zweite Glied fortzuschaffen, verwandelt man die Gleichung in

$$(t - 27{,}2195)^3 + 1950{,}228\,(t - 27{,}2195) + 753639{,}8 = 0$$

woraus nach der Cardanischen Formel

$$t - 27{,}2195 = -91{,}0174 + 7{,}1400 = -83{,}8774$$

woraus $t = -56{,}658°$ C.

Die vorstehende, auf Versuchsreihen gegründete Formel ist auch wohl der Grund, daß der Gefrierpunkt des W. auf 56,5° C. angegeben wird, denn es hat zu viel Schwierigkeiten, so hohe Kältegrade mit Sicherheit angeben zu können. Nach jener Formel ist im Gehler, Bd. X, das. pag. 922, eine Tabelle der A. des gedachten, **nicht** absol. W. von − 50° bis + 50° C. von 2 zu 2° berechnet, welche hier folgt, und der ich die Differenzen zugefügt habe.

## Tabelle

der Volume und Dichtigkeiten des Weingeistes von dem spec. Gew. 0,801 bei + 20° C.

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| − 50° C. | 0,965326 | | 1,035920 | |
| | | 471 | | 506 |
| 48 | 0,965797 | | 1,035414 | |
| | | 582 | | 624 |
| 46 | 0,966379 | | 1,034790 | |
| | | 686 | | 734 |
| 44 | 0,967065 | | 1,034056 | |
| | | 787 | | 841 |
| 42 | 0,967852 | | 1,033215 | |
| | | 882 | | 941 |
| 40 | 0,968734 | | 1,032274 | |
| | | 972 | | 1034 |
| 38 | 0,969706 | | 1,031240 | |
| | | 1057 | | 1123 |
| 36 | 0,970763 | | 1,030117 | |
| | | 1139 | | 1207 |
| 34 | 0,971902 | | 1,028910 | |
| | | 1215 | | 1285 |
| 32 | 0,973117 | | 1,027625 | |
| | | 1288 | | 1358 |
| 30 | 0,974405 | | 1,026267 | |
| | | 1356 | | 1426 |
| 28 | 0,975761 | | 1,024841 | |
| | | 1421 | | 1490 |
| 26 | 0,977182 | | 1,023351 | |
| | | 1482 | | 1550 |
| 24 | 0,978664 | | 1,021801 | |
| | | 1539 | | 1604 |
| 22 | 0,980203 | | 1,920197 | |
| | | 1592 | | 1654 |
| 20 | 0,981795 | | 1,018543 | |
| | | 1643 | | 1701 |
| 18 | 0,983438 | | 1,016840 | |
| | | 1690 | | 1744 |
| 16 | 0,985128 | | 1,015096 | |
| | | 1734 | | 1783 |
| 14 | 0,986862 | | 1,013313 | |
| | | 1775 | | 1819 |
| 12 | 0,988637 | | 1,011494 | |
| | | 1813 | | 1852 |
| 10 | 0,990450 | | 1,009642 | |
| | | 1849 | | 1881 |
| 8 | 0,992299 | | 1,007761 | |
| | | 1881 | | 1907 |
| 6 | 0,994180 | | 1,005854 | |
| | | 1912 | | 1931 |
| 4 | 0,996092 | | 1,003923 | |
| | | 1941 | | 1952 |
| 2 | 0,998033 | | 1,001971 | |
| + 2° C. | 1,001991 | | 0,998013 | |
| | | 2014 | | 2002 |
| 4 | 1,004005 | | 0,996011 | |
| | | 2034 | | 2014 |
| 6 | 1,006039 | | 0,993997 | |
| | | 2054 | | 2025 |
| 8 | 1,008093 | | 0,991972 | |
| | | 2071 | | 2034 |
| 10 | 1,010164 | | 0,989938 | |
| | | 2088 | | 2042 |
| 12 | 1,012252 | | 0,987896 | |
| | | 2103 | | 2048 |
| 14 | 1,014355 | | 0,985848 | |
| | | 2118 | | 2054 |
| 16 | 1,016473 | | 0,983794 | |
| | | 2131 | | 2059 |
| 18 | 1,018604 | | 0,981735 | |
| | | 2145 | | 2062 |
| 20 | 1,020749 | | 0,979673 | |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| + 22° C. | 1,022905 | 2156 | 0,977608 | 2065 |
| 24 | 1,025073 | 2168 | 0,975540 | 2068 |
| 26 | 1,027253 | 2180 | 0,973470 | 2070 |
| 28 | 1,029444 | 2191 | 0,971398 | 2072 |
| 30 | 1,031647 | 2203 | 0,969324 | 2074 |
| 32 | 1,033861 | 2214 | 0,967248 | 2076 |
| 34 | 1,036087 | 2226 | 0,965170 | 2078 |
| 36 | 1,038325 | 2238 | 0,963090 | 2080 |
| 38 | 1,040575 | 2250 | 0,961007 | 2083 |
| 40 | 1,042839 | 2264 | 0,958920 | 2087 |
| 42 | 1,045118 | 2279 | 0,956830 | 2090 |
| 44 | 1,047411 | 2293 | 0,954735 | 2095 |
| 46 | 1,049721 | 2310 | 0,952634 | 2101 |
| 48 | 1,052048 | 2327 | 0,950527 | 2107 |
| 50 | 1,054394 | 2346 | 0,948412 | 2115 |

Auch in dieser Tabelle haben die **Dichtigkeiten** für die Temperaturen − 26 bis − 20 so auffallende Intervalle in den Differenzen gezeigt, dafs ich dieselben, als unrichtig sich erweisend, berichtigt habe.

Der vollkommen absolute W. verhält sich offenbar ganz anders, Gehler, Bd. X, pag. 923, giebt für solchen (spec. Gew. bei 20° C. = 0,791108) die Formel:

$$V = 1 + 0{,}0010151148\,t + 0{,}0000030884\,t^2 - 0{,}0000000192458\,t^3$$

für das Minimum der Volume hat man wieder:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 = 0{,}0010151148 + 0{,}0000061768\,t - 0{,}0000000577374\,t^2$$

oder geordnet:

$$t^2 - 106{,}981\,t - 17581{,}58 = 0$$

woraus $t = +53{,}49 - 142{,}98 = -89{,}49°$ C., wie im Gehler mit − 89,5 richtig angegeben ist.

Nach der vorstehenden Formel ist in Gehler's phys. Wörterb., Bd. X, pag. 923, eine Tabelle der Volumina von − 100° bis + 66° von 2 zu 2° berechnet, der ich hier die Dichtigkeiten und die Differenzen anfüge, wobei ich noch bemerke, dafs das Volumen für + 14°, dort unrichtig angegeben, von mir berichtigt worden ist.

## Tabelle

der Volumina und Dichtigkeiten des absoluten Weingeistes von − 100° bis + 66° C.

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| − 100° C. | 0,948618 | 325 | 1,054165 | 361 |
| 98 | 0,948293 | 254 | 1,054526 | 283 |
| 96 | 0,948039 | 185 | 1,054809 | 206 |
| 94 | 0,947854 | | 1,055015 | |

14

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| − 92° C. | 0,947736 | 118 | 1,055146 | 131 |
| 90 | 0,947686 | 50 | 1,055202 | 56 |
| 88 | 0,947702 | 16 | 1,055184 | 18 |
| 86 | 0,947783 | 81 | 1,055094 | 90 |
| 84 | 0,947929 | 146 | 1,054931 | 163 |
| 82 | 0,948138 | 209 | 1,054699 | 232 |
| 80 | 0,948411 | 273 | 1,054395 | 304 |
| 78 | 0,948744 | 333 | 1,054025 | 370 |
| 76 | 0,949138 | 394 | 1,053588 | 437 |
| 74 | 0,949592 | 454 | 1,053084 | 504 |
| 72 | 0,950105 | 513 | 1,052515 | 569 |
| 70 | 0,950676 | 571 | 1,051883 | 632 |
| 68 | 0,951304 | 628 | 1,051189 | 694 |
| 66 | 0,951988 | 684 | 1,050433 | 756 |
| 64 | 0,952728 | 740 | 1,049618 | 815 |
| 62 | 0,953521 | 793 | 1,048745 | 873 |
| 60 | 0,954368 | 847 | 1,047814 | 931 |
| 58 | 0,955267 | 899 | 1,046828 | 986 |
| 56 | 0,956218 | 951 | 1,045787 | 1041 |
| 54 | 0,957220 | 1002 | 1,044692 | 1095 |
| 52 | 0,958271 | 1051 | 1,043546 | 1146 |
| 50 | 0,959371 | 1100 | 1,042350 | 1196 |
| 48 | 0,960518 | 1147 | 1,041105 | 1245 |
| 46 | 0,961713 | 1195 | 1,039811 | 1294 |
| 44 | 0,962953 | 1240 | 1,038472 | 1339 |
| 42 | 0,964239 | 1286 | 1,037087 | 1385 |
| 40 | 0,965568 | 1329 | 1,035660 | 1427 |
| 38 | 0,966941 | 1373 | 1,034190 | 1470 |
| 36 | 0,968356 | 1415 | 1,032678 | 1512 |
| 34 | 0,969813 | 1457 | 1,031127 | 1551 |
| 32 | 0,971309 | 1496 | 1,029538 | 1589 |
| 30 | 0,972846 | 1537 | 1,027912 | 1626 |
| 29 | 0,973628 | 782 | 1,027086 | 826 |
| 28 | 0,974421 | 793 | 1,026250 | 838 |
| 27 | 0,975222 | 801 | 1,025408 | 842 |
| 26 | 0,976033 | 811 | 1,024556 | 852 |
| 25 | 0,976853 | 820 | 1,023695 | 861 |
| 24 | 0,977682 | 829 | 1,022828 | 867 |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| | | 838 | | 876 |
| − 23° C. | 0,978520 | | 1,021952 | |
| | | 847 | | 884 |
| 22 | 0,979367 | | 1,021068 | |
| | | 856 | | 892 |
| 21 | 0,980223 | | 1,020176 | |
| | | 864 | | 898 |
| 20 | 0,981087 | | 1,019278 | |
| | | 873 | | 907 |
| 19 | 0,981960 | | 1,018371 | |
| | | 881 | | 912 |
| 18 | 0,982841 | | 1,017459 | |
| | | 889 | | 920 |
| 17 | 0,983730 | | 1,016539 | |
| | | 898 | | 927 |
| 16 | 0,984628 | | 1,015612 | |
| | | 905 | | 933 |
| 15 | 0,985533 | | 1,014679 | |
| | | 913 | | 939 |
| 14 | 0,986446 | | 1,013740 | |
| | | 922 | | 946 |
| 13 | 0,987368 | | 1,012794 | |
| | | 929 | | 952 |
| 12 | 0,988297 | | 1,011842 | |
| | | 936 | | 958 |
| 11 | 0,989233 | | 1,010884 | |
| | | 944 | | 964 |
| 10 | 0,990177 | | 1,009920 | |
| | | 951 | | 969 |
| 9 | 0,991128 | | 1,008951 | |
| | | 958 | | 974 |
| 8 | 0,992086 | | 1,007977 | |
| | | 966 | | 980 |
| 7 | 0,993052 | | 1,006997 | |
| | | 973 | | 986 |
| 6 | 0,994025 | | 1,006011 | |
| | | 979 | | 990 |
| 5 | 0,995004 | | 1,005021 | |
| | | 986 | | 995 |
| 4 | 0,995990 | | 1,004026 | |
| | | 993 | | 1000 |
| 3 | 0,996983 | | 1,003026 | |
| | | 999 | | 1004 |
| 2 | 0,997982 | | 1,002022 | |
| | | 1006 | | 1009 |
| 1 | 0,998988 | | 1,001013 | |
| | | 1012 | | 1013 |
| 0 | 1,000000 | | 1,000000 | |
| | | 1018 | | 1017 |
| + 1 | 1,001018 | | 0,998983 | |
| | | 1024 | | 1021 |
| 2 | 1,002042 | | 0,997962 | |
| | | 1031 | | 1026 |
| 3 | 1,003073 | | 0,996936 | |
| | | 1036 | | 1028 |
| 4 | 1,004109 | | 0,995908 | |
| | | 1041 | | 1032 |
| 5 | 1,005150 | | 0,994876 | |
| | | 1048 | | 1036 |
| 6 | 1,006198 | | 0,993840 | |
| | | 1052 | | 1038 |
| 7 | 1,007250 | | 0,992802 | |
| | | 1059 | | 1043 |
| 8 | 1,008309 | | 0,991759 | |
| | | 1063 | | 1044 |
| 9 | 1,009372 | | 0,990715 | |
| | | 1069 | | 1048 |
| 10 | 1,010441 | | 0,989667 | |
| | | 1073 | | 1050 |
| 11 | 1,011514 | | 0,988617 | |
| | | 1079 | | 1053 |
| 12 | 1,012593 | | 0,987564 | |
| | | 1083 | | 1055 |
| 13 | 1,013676 | | 0,986509 | |

| Temperatur. | Volumen. | Differenz. | Dichtigkeit. | Differenz. |
|---|---|---|---|---|
| | | 1088 | | 1058 |
| + 14° C. | 1,014764 | | 0,985451 | |
| | | 1093 | | 1060 |
| 15 | 1,015857 | | 0,984391 | |
| | | 1097 | | 1062 |
| 16 | 1,016954 | | 0,983329 | |
| | | 1101 | | 1064 |
| 17 | 1,018055 | | 0,982265 | |
| | | 1105 | | 1065 |
| 18 | 1,019160 | | 0,981200 | |
| | | 1110 | | 1067 |
| 19 | 1,020270 | | 0,980133 | |
| | | 1114 | | 1069 |
| 20 | 1,021384 | | 0,979064 | |
| | | 1117 | | 1070 |
| 21 | 1,022501 | | 0,977994 | |
| | | 1121 | | 1071 |
| 22 | 1,023622 | | 0,976923 | |
| | | 1125 | | 1072 |
| 23 | 1,024747 | | 0,975851 | |
| | | 1129 | | 1074 |
| 24 | 1,025876 | | 0,974777 | |
| | | 1131 | | 1074 |
| 25 | 1,027007 | | 0,973703 | |
| | | 1135 | | 1075 |
| 26 | 1,028142 | | 0,972628 | |
| | | 1139 | | 1076 |
| 27 | 1,029281 | | 0,971552 | |
| | | 1141 | | 1076 |
| 28 | 1,030422 | | 0,970476 | |
| | | 1144 | | 1076 |
| 29 | 1,031566 | | 0,969400 | |
| | | 1147 | | 1077 |
| 30 | 1,032713 | | 0,968323 | |
| | | 1150 | | 1077 |
| 31 | 1,033863 | | 0,967246 | |
| | | 1153 | | 1077 |
| 32 | 1,035016 | | 0,966169 | |
| | | 1154 | | 1076 |
| 33 | 1,036170 | | 0,965093 | |
| | | 1158 | | 1078 |
| 34 | 1,037328 | | 0,964015 | |
| | | 1159 | | 1076 |
| 35 | 1,038487 | | 0,962939 | |
| | | 1162 | | 1076 |
| 36 | 1,039649 | | 0,961863 | |
| | | 2329 | | 2150 |
| 38 | 1,041978 | | 0,959713 | |
| | | 2336 | | 2147 |
| 40 | 1,044314 | | 0,957566 | |
| | | 2343 | | 2143 |
| 42 | 1,046657 | | 0,955423 | |
| | | 2348 | | 2139 |
| 44 | 1,049005 | | 0,953284 | |
| | | 2352 | | 2132 |
| 46 | 1,051357 | | 0,951152 | |
| | | 2356 | | 2127 |
| 48 | 1,053713 | | 0,949025 | |
| | | 2358 | | 2119 |
| 50 | 1,056071 | | 0,946906 | |
| | | 2360 | | 2111 |
| 52 | 1,058431 | | 0,944795 | |
| | | 2360 | | 2102 |
| 54 | 1,060791 | | 0,942693 | |
| | | 2361 | | 2094 |
| 56 | 1,063152 | | 0,940599 | |
| | | 2359 | | 2082 |
| 58 | 1,065511 | | 0,938517 | |
| | | 2357 | | 2072 |
| 60 | 1,067868 | | 0,936445 | |
| | | 2354 | | 2059 |
| 62 | 1,070222 | | 0,934386 | |
| | | 2350 | | 2048 |
| 64 | 1,072572 | | 0,932338 | |
| | | 2345 | | 2034 |
| 66 | 1,074917 | | 0,930304 | |

6. **Ausdehnung der Gase.**

Die A. der atmosphärischen Luft und der Gasarten ist den Versuchen der Physiker zufolge von − 36° C. bis 360° C. ganz gleichmäſsig; auch ist die Gröſse der A. aller Gase so sehr wenig unterschieden, daſs man sie mit der von Rudberg gefundenen, allgemein als richtig geltenden A. der trocknen atmosph. Luft = 0,00365 für jeden Grad C. gleich groſs annehmen kann. Die zu Flüssigkeiten comprimirbaren Gase haben eine etwas gröſsere, aber ebenfalls gleichmäſsige A.

Folgende von mir berechnete Tabelle zeigt die Volume und die Dichtigkeiten der trockenen atm. Luft und der permanenten Gase von − 30° bis + 100° nach Rudberg.

| Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. | Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. |
|---|---|---|---|---|---|
| − 30° C. | 0,89050 | 1,12296 | + 17° C. | 1,06205 | 9,94158 |
| 29 | 0,89415 | 1,11838 | 18 | 1,06570 | 0,93835 |
| 28 | 0,89780 | 1,11383 | 19 | 1,06935 | 0,93515 |
| 27 | 0,90145 | 1,10932 | 20 | 1,07300 | 0,93197 |
| 26 | 0,90510 | 1,10485 | 21 | 1,07665 | 0,92881 |
| 25 | 0,90875 | 1,10041 | 22 | 1,08030 | 0,92567 |
| 24 | 0,91240 | 1,09601 | 23 | 1,08395 | 0,92255 |
| 23 | 0,91605 | 1,09164 | 24 | 1,08760 | 0,91946 |
| 22 | 0,91970 | 1,08731 | 25 | 1,09125 | 9,91638 |
| 21 | 0,92335 | 1,08301 | 26 | 1,09490 | 0,91333 |
| 20 | 0,92700 | 1,07875 | 27 | 1,09855 | 0,91029 |
| 19 | 0,93065 | 1,07452 | 28 | 1,10220 | 0,90728 |
| 18 | 0,93430 | 1,07032 | 29 | 1,10585 | 0,90428 |
| 17 | 0,93795 | 1,06615 | 30 | 1,10950 | 0,90131 |
| 16 | 0,94160 | 1,06202 | 31 | 1,11315 | 0,89835 |
| 15 | 0,94525 | 1,05792 | 32 | 1,11680 | 0,89542 |
| 14 | 0,94890 | 1,05385 | 33 | 1,12045 | 0,89250 |
| 13 | 0,95255 | 1,04981 | 34 | 1,12410 | 0,88960 |
| 12 | 0,95620 | 1,04581 | 35 | 1,12775 | 0,88672 |
| 11 | 0,95985 | 1,04183 | 36 | 1,13140 | 0,88386 |
| 10 | 0,96350 | 1,03788 | 37 | 1,13505 | 0,88102 |
| 9 | 0,96715 | 1,03397 | 38 | 1,13870 | 0,87819 |
| 8 | 0,97080 | 1,03008 | 39 | 1,14235 | 0,87539 |
| 7 | 0,97445 | 1,02622 | 40 | 1,14600 | 0,87260 |
| 6 | 0,97810 | 1,02239 | 41 | 1,14965 | 0,86983 |
| 5 | 0,98175 | 1,01859 | 42 | 1,15330 | 0,86708 |
| 4 | 0,98540 | 1,01482 | 43 | 1,15695 | 0,86434 |
| 3 | 0,98905 | 1,01107 | 44 | 1,16060 | 0,86162 |
| 2 | 0,99270 | 1,00735 | 45 | 1,16425 | 0,85892 |
| 1 | 0,99635 | 1,00366 | 46 | 1,16790 | 0,85624 |
| 0 | 1,00000 | 1,00000 | 47 | 1,17155 | 9,85357 |
| + 1 | 1,00365 | 0,99636 | 48 | 1,17520 | 0,85092 |
| 2 | 1,00730 | 0,99275 | 49 | 1,17885 | 0,84828 |
| 3 | 1,01095 | 0,98917 | 50 | 1,18250 | 0,84567 |
| 4 | 1,01460 | 0,98561 | 51 | 1,18615 | 0,84306 |
| 5 | 1,01825 | 0,98208 | 52 | 1,18980 | 0,84048 |
| 6 | 1,02190 | 0,97857 | 53 | 1,19345 | 0,83791 |
| 7 | 1,02555 | 0,97509 | 54 | 1,19710 | 0,83535 |
| 8 | 1,02920 | 0,97163 | 55 | 1,20075 | 0,83281 |
| 9 | 1,03285 | 0,96819 | 56 | 1,20440 | 0,83029 |
| 10 | 1,03650 | 0,96479 | 57 | 1,20805 | 0,82778 |
| 11 | 1,04015 | 0,96140 | 58 | 1,21170 | 0,82529 |
| 12 | 1,04380 | 0,95804 | 59 | 1,21535 | 0,82281 |
| 13 | 1,04745 | 0,95470 | 60 | 1,21900 | 0,82034 |
| 14 | 1,05110 | 0,95138 | 61 | 1,22265 | 0,81790 |
| 15 | 1,05475 | 0,94809 | 62 | 1,22630 | 0,81546 |
| 16 | 1,05840 | 0,94482 | 63 | 1,22995 | 0,81304 |

| Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. | Temperatur. | Volumen. | Dichtigkeit. |
|---|---|---|---|---|---|
| + 64° C. | 1,23360 | 0,81064 | + 83° C. | 1,30295 | 0,76749 |
| 65 | 1,23725 | 0,80824 | 84 | 1,30660 | 0,76535 |
| 66 | 1,24090 | 0,80587 | 85 | 1,31025 | 0,76321 |
| 67 | 1,24455 | 0,80350 | 86 | 1,31390 | 0,76109 |
| 68 | 1,24820 | 0,80115 | 87 | 1,31755 | 0,75898 |
| 69 | 1,25185 | 0,79882 | 88 | 1,32120 | 0,75689 |
| 70 | 1,25550 | 0,79650 | 89 | 1,32485 | 0,75480 |
| 71 | 1,25915 | 0,79419 | 90 | 1,32850 | 0,75273 |
| 72 | 1,26280 | 0,79189 | 91 | 1,33215 | 0,75067 |
| 73 | 1,26645 | 0,78961 | 92 | 1,33580 | 0,74862 |
| 74 | 1,27010 | 0,78734 | 93 | 1,33945 | 0,74658 |
| 75 | 1,27375 | 0,78508 | 94 | 1,34310 | 0,74455 |
| 76 | 1,27740 | 0,78284 | 95 | 1,34675 | 0,74253 |
| 77 | 1,28105 | 0,78061 | 96 | 1,35040 | 0,74052 |
| 78 | 1,28470 | 0,77839 | 97 | 1,35405 | 0,73853 |
| 79 | 1,28835 | 0,77619 | 98 | 1,35770 | 0,73654 |
| 80 | 1,29200 | 0,77399 | 99 | 1,36135 | 0,73456 |
| 81 | 1,29565 | 0,77181 | 100 | 1,36500 | 0,73260 |
| 82 | 1,29930 | 0,76965 | | | |

**Ausdehnungs-Coefficient** (gewöhnlich mit $a$ bezeichnet) für einen bestimmten Körper, ist das Maafs seiner Linear-Ausdehnung (s. pag. 188), wenn er erwärmt wird (s. Ausdehnung pag. 187). Dieses Maafs besteht meistens in der Zahl, welche angiebt, um den wievielsten Theil seiner Länge bei 0° C. ein Körper sich ausdehnt, wenn er bis zu 100° C. erwärmt wird; aber auch in dem Theil seiner Länge, um welchen er bei seiner Erwärmung bis 1° C. ausgedehnt wird.

In der Tabelle pag. 189 wären also zugleich die A. der festen Körper angegeben, wenn sie von 0° bis 100° C. gelten. Der A. für Blei = 0,002719. Soll A. von 0° bis 1° C. gelten, dann ist A. für Blei = 0,00002719.

Das Quecksilber dehnt sich von 0° bis 100° C. gleichförmig aus; da nun in der Tabelle pag. 199 die Ausdehnung

bei 0° C. = 1,00000
bei + 1° C. = 1,00018
und bei + 100° C. = 1,01802

angegeben worden, so hat man den A. für Quecksilber entweder = 0,01802 oder 0,00018.

Die Ausdehnung des Wassers (s. pag. 200) geschieht äufserst unregelmäfsig: Aus der Tabelle pag. 201 entnimmt man den A. desselben von 0° C. bis 100° C. = 0,042016, also für 0° bis 1° (aber nur im Mittel) = 0,00042016.

Aus der Tabelle pag. 204 hat man den A. von + 4° C., dem Punkt der gröfsten Contraction des Wassers, bis 100° C. = 0,04315.

Für Wasser kann also seiner Natur nach eigentlich kein A. angegeben werden; ein Gleiches gilt vom Weingeist (s. pag. 207), der schon unter dem Temperaturgrade 100° C. in Dampfform übergeht.

Die Gase haben wieder eine gleichförmige Ausdehnung (s. pag. 213) und für alle Gase ziemlich dieselbe. Die Tabelle pag. 213 zeigt den A. der trockenen atmosphärischen Luft und der übrigen Gase nach Rudberg

von 0° bis 1° C. = 0,00365
von 0° bis 100° C. = 0,365

**Ausdruck.** Jede aus mehreren allgemeinen oder aus allgemeinen und bestimmten Zahlen bestehende und in solchen dargestellte Gröfse. Z. B. $a^2 - x^2$ ist ein A. und zwar der A. für das Product $(a+x)(a-x)$. Der A. ist algebraisch, wenn er in algebraischen Verbindungen besteht (wie $a^2 - x^2$); transcendent, wenn er logarithmische oder trigonometrische Functionen enthält, wie $n \cdot \log x$; $m \cdot \sin x$. Jeder A. ist analytisch; A., welche der höheren Analysis angehören, sind Differenziale und Integrale.

**Auseinanderlaufende Linien** sind gerade, nicht parallele, in einer Ebene befindliche Linien, nach der der Lage ihres Durchschnittspunkts entgegengesetzten Richtung; nach der Richtung der Lage des Durchschnittspunkts hin betrachtet, heifsen sie zusammenlaufende Linien.

**Ausflufs** ist das Heraustreten einer in einem Behälter eingeschlossenen Flüssig-

keit aus einer oder mehreren, in den Wandungen befindlichen Oeffnungen.

Die Gröfse und Form der Oeffnungen, die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit daraus fliefst, die Zeit des Ausfliefsens und die Menge der ausfliefsenden Flüssigkeiten stehen in einem Zusammenhang, welchen die mechanischen Wissenschaften untersuchen und als Gesetze feststellen. Mit dem A. der tropfbaren Flüssigkeiten beschäftigt sich die Hydrodynamik, mit dem der gasförmigen die Pneumatik.

**Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten.** In einem Gefäfs befinde sich eine Flüssigkeit, so erleidet der horizontale Boden einen Druck, der von der Höhe der Flüss. abhängt, der Art, dafs wenn deren Höhe $H=2h$ beträgt, jener Druck doppelt so grofs ist, als wenn die Höhe $h$ betrüge; die Druckwirkungen auf den Boden verhalten sich also wie die Höhen $H$ und $h$ derselben Flüss., und jede Flächen-Einheit desselben erhält einen gleich grofsen Druck $=h\gamma$, wenn $h$ die Höhe der Flüss. und $\gamma$ das Gewicht der Körper-Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Befindet sich nun in dem Boden eine Oeffnung von dem Querschnitt $a$, so wirkt auf dieselbe ein Druck $=ah\gamma$. Denkt man sich als Bodenstärke die sehr kleine Höhen-Einheit $=1$ und innerhalb $a$ nur diese mit der Flüss. angefüllt, also weiter keine Flüss. im Gefäfs, so fällt nach Lehren der Mechanik die innerhalb der Oeffnung befindliche Masse $a\gamma$ in der ersten Secunde vermöge der Schwerkraft der Erde um den Weg $g=15\frac{1}{8}$ Fufs. Hierbei ist die bewegte Masse $=a\gamma$, die auf dieselbe wirkende bewegende Kraft die Masse selbst $=a\gamma$, die beschleunigende Kraft $=\frac{a\gamma}{a\gamma}=1$ und die Beschleunigung ist $=g$.

Hat aber die Flüss. im Gefäfs die Höhe $h$, dann ist die bewegende Kraft als Wirkung auf die sehr kleine untere Schicht $a\gamma =$ dem Gewicht $ha\gamma$, die bewegte Masse $a\gamma$, die beschleunigende Kraft $=\frac{ha\gamma}{a\gamma}=h$, also $h$mal gröfser als beim freien Fall, und die Beschleunigung $=G=gh$

Nun lehrt die Mechanik, dafs ein Körper, wenn er von der Höhe $h$ frei herabfällt, die Endgeschwindigkeit erreicht $=2\sqrt{gh}$; für $h=1$, also die Geschwindigkeit $=2\sqrt{g}$, und bei nicht freiem, bei beschränktem oder verstärktem Fall $=2\sqrt{G}$. Beim Ausflufs von der Höhe $h$ ist $G=gh$, mithin dessen Geschwindigkeit $c$ beim Fall durch die sehr kleine Höhe $=1$ innerhalb der Bodenstärke $=2\sqrt{G}=2\sqrt{gh}$; mithin ist die Ausflufsgeschwindigkeit $c$ einer Flüss. bei der Druckhöhe $h=$ derjenigen Geschw., die ein Körper erreichen würde, wenn er vom Wasserspiegel bis zur Ausflufsöffnung frei herabfiele; dies Gesetz heifst das Torricelli'sche Gesetz.

2. Wenngleich die bei der Entwickelung des Torricelli'schen Gesetzes angewendeten Begriffe: Beschleunigung, Geschwindigkeit u. s. w., der reinen Mechanik angehören, und in dem dieser gewidmeten Art. ihre Erklärung finden, so ist, wie ich aus Erfahrung weifs, der Anfänger nicht oft genug auf den Unterschied zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit aufmerksam zu machen, besonders hier, wo beide Begriffe Wege in der ersten Secunde bezeichnen:

Die Einwirkung der bewegenden Kraft $ha\gamma$ auf die kleine Masse $a\gamma$, also auch die beschleunigende Kraft $h$ auf das Massen-Element 1 veranlafst die Beschleunigung $G$ des Elements, d. h. dafs das Element in der ersten Sec. den Weg $G$ zurücklegt. Bei diesem Wege ist die Anfangsgeschwindigkeit = Null, der Weg in dem ersten $n$tel Sec. sehr klein, in dem zweiten $n$tel Sec. etwas gröfser, in dem letzten $n$tel Sec. am gröfsten, und alle diese $n$ immer gröfser werdenden Wege in Summa machen die Beschleunigung $G$ aus.

Die Geschwindigkeit $c$ der ersten kleinen Masse $a\gamma$ und aller auf einander folgend in die Oeffnung $a$ tretenden kleinen Massen von der Gröfse $a\gamma$ ist der Weg, den jede dieser einzelnen Massen in der ersten Secunde durch alle $n$ $n$tel derselben gleichförmig zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft der Erde zu wirken aufhörte, sobald die Masse $a\gamma$ die Oeffnung $a$ verlassen hat. Denkt man sich daher die gesammte, in der ersten Sec. ausfliefsende Wassermenge $M$ in Zusammenhang, so bildet diese ein Prisma von dem Querschnitt $a$ und der Länge $c$.

Bleibt die Höhe $h$ im Gefäfs dieselbe, wie z. B. in einer oberschlächtigen Arche, so ist auch in jeder folgenden Sec. $c$ dieselbe.

3. Ist in einem Gefäfs die Höhe des Wasserspiegels über der Ausflufs-Oeffnung $=h$ und wird mittelst einer Scheibe mit darauf gelegtem Gewicht auf die obere Wasserfläche noch ein Druck $p$ ausgeübt, so ist dies Gewicht $p$ auf eine Säule von derselben Flüssigkeit zu reduciren, welche den Querschnitt der oberen Wasserfläche zum Querschnitt hat; findet man die Höhe dieser Säule $=H$, so ist die Druck-

höhe $H+h$ und die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit ausströmt, $= 2\sqrt{g(H+h)}$

Es sei z. B. die Flüssigkeit Wasser, der Querschnitt des Wasserspiegels im Gefäfs = 30 □″, die Höhe desselben über der Ausflufs Oeffnung = 2 Fufs, und dessen Belastung durch ein aufgelegtes Gewicht 5 Pfund, so findet man die Höhe $x$ der 5 Pfund schweren Wassersäule, weil 30 □″ = $\frac{5}{24}$ □′ und 1 cub.′ Wasser = 66 Pfund wiegt, aus der Proportion:

$\frac{5}{24} \cdot x$ cub.′ : 1 cub.′ = 5 Pfund : 66 Pfund, woraus

$$x = \tfrac{4}{11} \text{ Fufs},$$

daher die Ausflufsgeschwindigkeit

$$= 2\sqrt{2\tfrac{4}{11}\, g}$$

4. Die Beschleunigung $G$ und die Geschwindigkeit $c$ sind, wie aus No. 1 hervorgeht, unabhängig von dem spec. Gew. der Flüssigkeiten, und z. B. beim Quecksilber wie beim Weingeist dieselben. Vorausgesetzt wird aber die vollkommene Flüssigkeit, so dafs keine Cohärenz das Zerfliefsen der Masse hindert; Oele, Fette, Syrupe haben dasselbe $G$, allein ein geringeres $c$. Auch Wasser, Quecksilber, Weingeist haben nicht eine vollkommene Zerfliefsbarkeit und es wird auch bei diesen $c$ um etwas geringer, als die obige Formel ergiebt.

Eine Verminderung erfährt $c$ ferner durch die Adhäsion der Flüss. an den Wandungen: Wasser in sehr engen Röhren fliefst nicht mehr aus, weil die Adhäsion, hier Capillarität genannt, die Wirkung der Schwerkraft übertrifft, und die also mit derselben, wenn auch nur geringen Kraft dem Ausfliefsen einer Wassermasse aus grofsen Oeffnungen widersteht.

Fig. 122.




Ein noch gröfseres Hindernifs bildet die Reibung des Wassers an den Gefäfs-Wandungen, und das gröfste sind scharfe Ecken und Kanten an der inneren Seite der Ausflufsöffnung, indem die Wasserstrahlen sich daran brechen, und eine Richtung nach der Mitte der Oeffnung annehmen und den Ausflufs-Querschnitt vermindern. Die Strahlen aus $a$ und $b$, welche durch den von den Gefäfswandungen her erhaltenen gröfseren Wasserdruck ebenfalls ausfliefsen wollen, nehmen die Richtungen $ac$ und $bc$ an; die innerhalb $d$ und $e$ senkrecht herabfliefsenden Strahlen treiben $ac$ und $bc$ wieder zum Theil aus einander und es entspringt daraus ein Ausflufs-Querschnitt $fg$, welcher geringer ist als die zwischen den Wänden befindliche Ausflufsöffnung.

Man nennt diese Erscheinung die Zusammenziehung oder die Contraction des Wasserstrahls, und die kleinere abstracte Zahl, welche in jedem besonderen Falle je nach Gröfse und Form der Ausflufs-Oeffnung statt $2\sqrt{g}$ in den Ausdruck $2\sqrt{gh} = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{h}$ gesetzt werden mufs, um die Ausflufsgeschwindigkeit zu erhalten, den Contractions-Coefficient. Dieser wird in allen Fällen mit $\alpha$ bezeichnet, und die Ausflufsgeschwindigkeit ist dann $\alpha\sqrt{h}$

In den Coeff. $\alpha$ werden übrigens zugleich alle Hindernisse, die, wie oben bemerkt, in Reibung, Adhäsion etc. bestehen, mit eingeschlossen, so dafs die Formel $\alpha\sqrt{h}$ jedesmal die wirkliche Ausflufsgeschwindigkeit angiebt, während die Gröfse $2\sqrt{g}\sqrt{h}$ die theoretische, angemessener (mit Eytelwein) die hypothetische Ausflufs-Geschwindigkeit genannt wird.

5. Es ist oft zweckmäfsig, für besondere Fälle die hypothetische Geschw. zu ermitteln, und dann für $2\sqrt{g}$ das angemessene $\alpha$ einzusetzen.

Werthe für $\alpha$ giebt Eytelwein in seiner Hydraulik, pag. 115, wie folgt:

1) Freier Fall der Körper . . $\alpha = 7{,}91$
2) Mündungen von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls . . . . . . . . . . . . $\alpha = 7{,}646$
3) Breite Gerinne. Freischleusen mit Flügel-Wänden. Schräge Einbaue. Spitze Brückenpfeiler . . . . . . . $\alpha = 7{,}54$
4) Schmale Gerinne. Schützöffnungen mit Flügelwänden. Steile Einbaue. Gerade Brückenpfeiler . . . . . . . $\alpha = 6{,}76$
5) Kurze Ansatzröhren . . . . $\alpha = 6{,}42$
6) Schützöffnungen ohne Flügelwände . . . . . . . . . . $\alpha = 5{,}00$
7) Oeffnungen in dünnen Wänden. . . . . . . . . . . . . . $\alpha = 4{,}89$

Ein Näheres über den Contractions-Coefficient in: Contraction des Wasserstrahls.

## Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen bei unveränderlicher Druckhöhe.

1. Die Hydrostatik lehrt, dafs eingeschlossenes Wasser auf jedes Element $e$ senkrechter oder schiefer Seitenwandungen einen Druck ausübt $= eh\gamma$, mithin ist die Ausflufsgeschw. aus Oeffnungen in Seitenwänden gleich der in horizontalem Boden, wenn in beiden Fällen die Druckhöhe $h$ dieselbe ist.

In horizontalem Boden kann die Oeff-

nung jede Form und Gröſse haben, die Höhe $h$ ist für jedes Flächen-Element der Oeffnung dieselbe; in Seitenwänden dagegen ist in dem untersten Punkt der Oeffnung die Geschw. am gröſsten, in dem obersten am kleinsten, und es ist hier die mittlere Geschw. zu finden, d. h. diejenige, welche für alle durch die Oeffnung ausflieſsenden Strahlen angenommen, dieselbe Wassermenge per Sec. giebt, welche bei den verschiedenen Geschwindigkeiten der einzelnen Strahlen wirklich ausflieſst, und man sieht, daſs jene mittlere Geschw. auch von der Form der Oeffnung, ob rund, drei- oder mehreckig u. s. w., abhängt.

Bezeichnet man diese mittlere Geschw. mit $c$, die Oeffnung mit $a$, die Wassermenge, welche in einer Secunde ausflieſst, mit $M$, so ist allgemein

$$M = ac$$

Hierbei ist hypothetisch $c = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$

$$\text{und} \quad h = \frac{c^2}{4g}$$

$$\text{wirklich} \quad c = \alpha \cdot \sqrt{h}$$

$$\text{und} \quad h = \frac{c^2}{\alpha^2}$$

also $M = 2a\sqrt{g}\sqrt{h}$ oder $\alpha a \sqrt{h}$

2. Ist die Ausfluſsöffnung ($a$) gegen den Querschnitt ($A$) des Wasserbehälters sehr gering (als beim Sammelteich), so kann das Wasser vor $a$ als stillstehend betrachtet werden. Ist dagegen der Unterschied zwischen $A$ und $a$ wahrnehmbar (wie bei schmalen Gerinnen), so muſs durch $A$ und durch $a$ eine gleiche Wassermenge $M$ flieſsen; sinkt nun der Wasserspiegel nicht, bleiben also $A$ und $h$ constant, so hat man, wenn $C$ die Geschw. in $A$ bezeichnet:

$$M = CA = ca$$

$$\text{woraus} \quad C = c\frac{a}{A}$$

Die hierzu gehörige Druckhöhe, d. h. diejenige, welche bei stillstehendem Wasser die Geschw. $C$ veranlassen würde, sei $H$, so wirkt auf die Geschw. des Wassers in $a$ die Druckhöhe $h + H$ und es ist hypothetisch

$$\text{I.} \quad c = 2\sqrt{g}\sqrt{h + H} = 2\sqrt{gh + \frac{C^2}{4}}$$

wirklich

$$\text{II.} \quad c = \alpha\sqrt{h + H} = \alpha\sqrt{h + \frac{C^2}{\alpha^2_1}}$$

Das erste $\alpha$ bezieht sich auf die Ausfluſsöffnung, das zweite auf die Bewegung des Wassers im Gerinne, beide haben also verschiedene Werthe, weshalb das zweite $\alpha$ mit $\alpha_1$ bezeichnet worden.

Drückt man $C$ durch $c$ aus, so erhält man

$$\text{III.} \quad c = \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{\left(1 - \left[\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{a}{A}\right]^2\right)}}$$

**Beispiel.** In einem Gerinne von 4 Fuſs Breite sei der Wasserstand von der im Boden befindlichen Schützöffnung für ein oberschlächtiges Wasserrad = 2′ 6″, die Schützöffnung 3 Fuſs lang, 3 Zoll breit.

In Anwendung kommt (pag. 216)
für die Schützöffnung $\alpha$ No. 6 = 5
für's Gerinne $\alpha_1$ No. 4 = 6,76

**Ohne Rücksicht auf die Geschw.** des Wassers im Gerinne ist $c = 5\sqrt{2\frac{1}{2}} = 7{,}9057$

Diese Geschw. ist also zu gering; um sie nach Formel III. zu berechnen, hat man

das Gerinneprofil $A = 4' \times 2\frac{1}{4}' = 7\,\square'$
die Schützöffnung $a = 3' \times 3'' = 0{,}75\,\square'$

$$\text{mithin} \quad \frac{a}{A} = \frac{0{,}75}{7} = \frac{3}{28}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{5}{6{,}76}$$

folglich

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{a}{A}\right)^2 = \left(\frac{5}{6{,}76} \cdot \frac{3}{28}\right)^2 = 0{,}0062802$$

$$c = \frac{7{,}9057}{\sqrt{0{,}9937198}} = 7{,}9306 \text{ Fuſs.}$$

Der Unterschied ist also in allen ähnlichen Fällen der Praxis so gering, daſs man die Geschw. $C$ des Wassers im Gerinne auſser Acht lassen kann.

3. Es sei in der senkrechten Seitenwand eines Behälters von dem Wasserspiegel $A$ herab bis zur Tiefe $H$ eine rechtwinklige Oeffnung, so ist in der untersten horizontalen Wasserschicht $B$ die Geschw.

$$C = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$$

in der horizontalen Schicht $D$ von der Tiefe $h$ die Geschw.

$$c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$$

$$\text{mithin} \quad C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}$$

$$\text{oder} \quad C^2 : c^2 = H : h$$

und eben so verhalten sich alle vom Wasserspiegel $A$ aus genommenen Tiefen wie die Quadrate der zu ihrer Schicht gehörenden Geschwindigkeiten. Denkt man sich sämmtliche Geschwindigkeiten von der in $A = 0$ bis zu der in $B = C$ als gerade Linien senkrecht auf $AB$ aufgetragen und verbindet deren Endpunkte, so erhält man eine Curve, deren Abscissen, z. B. $AD$, $AB$, wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten $DE$, $BG$ sich verhalten, also eine Parabel, und die Fläche $ABEG$ drückt in der Summe

sämmtlicher Geschwindigkeiten zugleich den Querschnitt der per Secunde ausfliefsenden Wassermenge $M$ aus. Diese

Fig. 123.




als Parabelfläche ist aber $= \frac{2}{3} AB \cdot BG = \frac{2}{3} H \cdot C$. Setzt man die Breite der Oeffnung $= B$, so hat man die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} BHC$$

also die hypothetische Wassermenge

$$M = \tfrac{4}{3}\sqrt{g} \cdot BH \cdot \sqrt{H}$$

und die wirkliche

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha BH \cdot \sqrt{H}$$

Ist $AD$ geschlossen, hat also die Oeffnung die Höhe $H - h$, so wäre

$$M' \text{ aus } AB = \tfrac{4}{3}\sqrt{g} \cdot BH \cdot \sqrt{H}$$
$$M'' \text{ aus } AD = \tfrac{4}{3}\sqrt{g}B \cdot h\sqrt{h}$$

folglich ist die aus $DB$ ausfliefsende Wassermenge

hypothetisch $= \frac{4}{3}\sqrt{g} \cdot B(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$
wirklich $= \frac{2}{3}\alpha B(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$

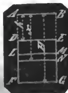
4. Bezeichnet man die Höhe $H - h$ der Oeffnung mit $E$, so erhält man einen einfachen Näherungswerth für $M$, wenn man die Höhe $H - \frac{1}{2}E$ bis zum Schwerpunkt der Oeffnung als mittlere Geschwindigkeitshöhe annimmt. Alsdann ist

$$M' \text{ (hypothetisch)} = 2\sqrt{g} \cdot BE\sqrt{H - \tfrac{1}{2}E}$$
$$\text{wirklich } \alpha BE\sqrt{H - \tfrac{1}{2}E}$$

und dieser Werth kommt dem wirklichen um so näher, je kleiner $E$ gegen $H$ ist.

5. Die ad 3 gedachten und noch andere interessante Aufgaben lassen sich mit Hülfe der höheren Analysis lösen. Bezeichnet man nämlich eine zwischen $H$ und $h$ befindliche Höhe mit $x$, so ist die Geschw. in der zu $x$ gehörenden horizontalen Linie $LM$ von der Breite $B = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$

Fig. 124.




Daher die Wassermenge, welche durch den Streifen von der sehr kleinen Höhe $MN = \triangle x$ fliefst $\triangle M_x = 2\sqrt{g} \cdot B\triangle x \cdot \sqrt{x}$ und folglich die Wassermenge aus der Oeffnung $DELM =$

$$M_x = 2\sqrt{g} \cdot B \cdot \int \sqrt{x}\,\partial x + C$$

Nun ist allgemein $\int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

folglich $\int \sqrt{x}\,\partial x = \int x^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$

mithin $M_x = \frac{4}{3}\sqrt{g} \cdot Bx\sqrt{x} + C$

Zur Bestimmung der Constante $C$ hat man $M = 0$ für $x = h$

also $M^0_h = 0 = \frac{4}{3}\sqrt{g}\,Bh\sqrt{h} + C$

woraus $C = -\frac{4}{3}\sqrt{g}Bh\sqrt{h}$

und $M^h_x = \frac{4}{3}\sqrt{g} \cdot B(x\sqrt{x} - h\sqrt{h})$

für $x = H$ gesetzt, hat man die Wassermenge aus der Oeffnung $DEFG$

$$M^h_H \text{ (hypothetisch)} = \tfrac{4}{3}\sqrt{g} \cdot B(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$$

$$M^h_H \text{ (wirklich)} = \tfrac{2}{3}\alpha B(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$$

6. Setzt man $h = 0$, so hat man die Wassermenge aus der Oeffnung $ABFG$

$$M^0_H \text{ (hypothetisch)} = \tfrac{4}{3}\sqrt{g} \cdot BH\sqrt{H}$$
$$\text{wirklich } \tfrac{2}{3}\alpha BH\sqrt{H}$$

7. Besteht die Ausflufsöffnung aus einem Dreieck mit horizontaler Grundlinie $B$, deren Tiefe unter dem Wasserspiegel $= H$, die Tiefe deren Spitze $= h$, so hat man, wie in No. 5, die Geschw. in der Tiefe $x$ zwischen $h$ und $H = 2\sqrt{g}\sqrt{x}$; die zu $x$ gehörende, mit $B$ parallele Linie ist

Fig. 125.




$$= \frac{x - h}{H - h} \cdot B$$

das unter derselben befindliche Trapez von der sehr kleinen Höhe $\triangle x$ kann im Verschwinden als Rectangel angesehen werden, dann ist der Flächen-Inhalt des Streifens

$$= \frac{x - h}{H - h} B \cdot \triangle x$$

die Wassermenge durch den sehr niedrigen Streifen

$$\triangle M_x = 2\sqrt{g}\sqrt{x} \cdot \frac{x - h}{H - h} B \cdot \triangle x$$

und die Wassermenge durch das über $x$ befindliche Dreieck

$$M_x = \frac{2\sqrt{g} \cdot B}{H - h} \int (x - h)\sqrt{x}\,\partial x + C$$

$$= \frac{2\sqrt{g} \cdot B}{H - h} \left(\tfrac{2}{5} x^2\sqrt{x} - \tfrac{2}{3} hx\sqrt{x}\right) + C$$

für $x = h$ wird $M = 0$

daher $C = +\frac{4}{15} \frac{2\sqrt{g} \cdot B}{H - h} h^2 \cdot \sqrt{h}$

und $M^h_x = \frac{2\sqrt{g}\cdot B}{H-h}[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}hx\sqrt{x} + \frac{4}{15}h^2\sqrt{h}]$

für $x = H$ hat man die Wassermenge durch das ganze Dreieck

$$M^h_H = \frac{2\sqrt{g}B}{H-h}(\frac{2}{5}H^2\sqrt{H} - \frac{2}{3}H\cdot h\sqrt{H} + \frac{4}{15}h^2\sqrt{h})$$

$$= \frac{4\sqrt{g}B}{15(H-h)}(3H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{H} + 2h^2\sqrt{h})$$

8. Setzt man $h=0$, liegt also die Dreiecksspitze im Wasserspiegel, so ist die Wassermenge

$$M^0_B \text{ (hypothetisch)} = \frac{4}{5}\sqrt{g}\cdot B\cdot H\sqrt{H}$$
$$\text{(wirklich)} = \frac{2}{5}\alpha BH\cdot\sqrt{H}$$

9. Liegt das Dreieck mit der horizon-

Fig. 126.



talen Grundlinie $B$ oben, die Spitze unten, so ist die zu $x$ gehörige Horizontale

$$= \frac{H-x}{H-h}B$$

der Flächen-Inhalt des Streifens

$$= \frac{H-x}{H-h}B\cdot\triangle x$$

die Wassermenge durch den Streifen

$$\triangle M_x = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{H-x}{H-h}\cdot B\cdot\triangle x$$

durch das über $x$ liegende Trapez

$$M_x = \frac{2\sqrt{g}}{H-h}B\int(H-x)\sqrt{x}\cdot\partial x + C$$

hieraus

$$M^h_H = \frac{4\sqrt{g}\cdot B}{15(H-h)}(2H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{h} + 3h^2\sqrt{h})$$

Dieses Resultat erhält man, wenn man in $M^h_H$, No. 7, $H$ mit $h$ vertauscht, weil beide Aufgaben allgemein in die Eine zusammen gefafst werden können: die Wassermenge zu bestimmen, welche durch eine dreieckige Oeffnung fliefst, deren horizontale Grundlinie um die Tiefe $H$ und deren Spitze um die Tiefe $h$ unter dem Wasserspiegel liegt.

10. Für $h=0$, wenn also $B$ im Wasserspiegel liegt, erhält man

$$M^0_H = \begin{cases}\frac{8}{15}\sqrt{g}B\cdot H\cdot\sqrt{H}\\ \frac{4}{15}\alpha BH\cdot\sqrt{H}\end{cases}$$

11. Um die Wassermengen $M^0_H$ in No. 8 und 10 zu finden, kann man unmittelbar verfahren, also in No. 8 die Spitze, in No. 10 die Basis in den Wasserspiegel legen. Dann ist der zu $x$ gehörende Streifen

$$\text{ad } 8 = \frac{B}{H}x\triangle x;\ \text{ad } 10 = \frac{B}{H}(H-x)\triangle x$$

$$\triangle M_x = \begin{cases}2\sqrt{g}\sqrt{x}\frac{B}{H}x\cdot\triangle x\\ 2\sqrt{g}\sqrt{x}\frac{B}{H}(H-x)\triangle x\end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases}2\sqrt{g}\cdot\frac{B}{H}\int x\sqrt{x}\partial x + C\\ 2\sqrt{g}\frac{B}{H}\int(H-x)\sqrt{x}\partial x + C\end{cases}$$

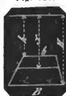
$$M_x = \begin{cases}\frac{4}{5}\sqrt{g}\frac{B}{H}x^2\sqrt{x} + C\\ \frac{4}{15}\sqrt{g}\frac{B}{H}(5H-3x)x\sqrt{x} + C\end{cases}$$

In beiden Fällen wird die Constante (mit $x=0$) $=0$

$$\text{Daher } M^0_H = \begin{cases}\frac{4}{5}\sqrt{g}BH\sqrt{H}\\ \frac{8}{15}\sqrt{g}B\cdot H\sqrt{H}\end{cases}$$

12. Ist die Ausflufsöffnung ein Trapez, dessen horizontale Grundlinien $b$ und $B$

Fig. 127.



in den Tiefen $h$ und $H$ unter dem Wasserspiegel, so ist die zu der Höhe $x$ gehörige Länge

$$= \frac{B(x-h)+b(H-x)}{H-h}$$

$$\text{daher } \triangle M_x = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{x}\frac{B(x-h)+b(H-x)}{H-h}\cdot\triangle x$$

$$M^h_x = \frac{2\sqrt{g}}{H-h}\int[B(x-h)+b(H-x)]\times\sqrt{x}\partial x + C$$

$$= \frac{4}{15}\frac{\sqrt{g}}{H-h}[3x(B-b)+5(bH-Bh)]x\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{4}{15}\frac{\sqrt{g}}{H-h}([3x(B-b)+5(bH-Bh)]x\sqrt{x} - [5bH-3bh-2Bh]h\sqrt{h})$$

für $x=H$ erhält man

$$M_H^h=\tfrac{4}{15}\frac{\sqrt g}{H-h}[(3BH+2bH-5Bh)H\sqrt H$$
$$-(5bH-3bh-2Bh)h\sqrt h]$$

für $h=0$, wenn also $b$ im Wasserspiegel liegt

$$M_H^0=\tfrac{4}{15}\sqrt g(3B+2b)H\cdot\sqrt H$$

13. Liegt in dem Beispiel No. 12 die gröfsere Grundlinie $B$ über der kleineren $b$, so ist die zu $x$ gehörige horizontale mittlere Länge

$$=\frac{b(x-h)+B(H-x)}{H-h}$$

Es ist also hier gegen No. 12 nur $b$ mit $B$ vertauscht, und so entstehen auch $M_H^h$ und $M_H^0$, wenn man in den Formeln dafür $b$ mit $B$ vertauscht.

Auch in No. 11, 12 und 13 wird $\alpha$ für $2\sqrt g$ gesetzt, wenn statt der hypothetischen die wirkliche Ausflufsgeschw. gefunden werden soll.

14. In No. 4 ist eines Näherungswerthes für die Ausflufsgeschw. $c$ gedacht worden, der darin besteht, dafs man als mittlere Geschwindigkeitshöhe die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt der Ausflufsöffnung nimmt.

Multiplicirt man diese Geschw. $c'$ mit dem Querschnitt der Ausflufsöffnung, so erhält man die Wassermenge $M'$.

Folgende Beispiele sollen den Grad der Annäherung darlegen:

1) Das Beispiel No. 6, wenn $h=0$ gesetzt wird, giebt offenbar die gröfste Differenz der Wassermenge.

Nach der richtigen Formel ist

$$M=\tfrac{2}{3}\sqrt g\cdot BH\sqrt H$$

nach der Näherungsformel, weil der Schwerpunkt auf der Höhe $\frac{1}{2}H$ liegt, ist

$$c'=2\sqrt g\sqrt{\tfrac{1}{2}H}$$

und $M'=2\sqrt g\sqrt{\tfrac{1}{2}H}\cdot B\cdot H$

also $M:M'=1:\tfrac{3}{4}\sqrt 2=1:1{,}0605$

so dafs näherungsweise die Wassermenge höchstens $0{,}0605=\frac{3}{50}$ zu grofs berechnet wird.

2) **Beispiel** 2, No. 5, sei $B=1$; $H=10'$; $h=8'$; $2\sqrt g$ ist immer $=2\sqrt{15\frac{5}{8}}'=7{,}91'$; so ist nach der Formel

$$M=\tfrac{2}{3}7{,}91\cdot 1(10\sqrt{10}-8\sqrt 8)=47{,}4389$$

Näherungsweise

$$M'=7{,}91\sqrt{10-\tfrac{1}{2}2}\cdot 1\cdot 2=47{,}4600$$

3) Beispiel No. 7 sei $B=20'$; $h=10'$; $H=18'$; so ist nach der Formel:

$$M=\frac{2\cdot 7{,}91\cdot 20}{15(18-10)}(3\cdot 18^2\sqrt{18}-5\cdot 18\cdot 10\sqrt{18}$$
$$+2\cdot 10^2\sqrt{10})=2467{,}00\text{ cub.}'$$

Näherungsweise hat man die Höhe bis zum Schwerpunkt

$$=h+\tfrac{2}{3}(H-h)=10+\tfrac{2}{3}(18-10)=15\tfrac{1}{3}'$$

den Inhalt des Dreiecks $=\frac{1}{2}B(H-h)$ $=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(18-10)=80\,\square'$, also die Wassermenge näherungsweise

$$M'=7{,}91\cdot 80\sqrt{15\tfrac{1}{3}}=2477{,}89\text{ cub.}'$$

4) Wenn in dem vorigen Beispiel $h=0$ ist, wenn also die Spitze des Dreiecks im Wasserspiegel liegt, und $H=18'$ bleibt, so ist nach der Formel No. 8:

$$M=\tfrac{2}{5}\cdot 7{,}91\cdot 20\cdot 18\sqrt{18}=4832{,}49\text{ cub.}'$$

Näherungsweise aus dem 18' hohen Dreieck:

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}18}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot 18=4932{,}19\text{ cub.}'$$

5) In dem Beispiel No. 9 soll eben so $h=10'$; $H=18'$; $B=20'$ sein. Dann ist nach der Formel

$$M=\frac{2\cdot 7{,}91\cdot 20}{15(18-10)}(2\cdot 18^2\sqrt{18}-5\cdot 18\cdot 10\sqrt{10}$$
$$+3\cdot 10^2\sqrt{10})=2245{,}98\text{ cub.}'$$

Näherungsweise, weil die Höhe bis zum Schwerpunkt des Dreiecks

$$=h+\tfrac{1}{3}(H-h)=10+\tfrac{8}{3}=12\tfrac{2}{3}\text{ Fufs ist.}$$

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{12\tfrac{2}{3}}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot 8=2252{,}15\text{ cub.}'$$

6) Wenn in dem vorigen Beispiel $h=0$ ist, die Basis des Dreiecks also im Wasserspiegel liegt, $H=18'$ bleibt, ist nach der Formel

$$M=\tfrac{4}{15}\cdot 7{,}91\cdot 20\cdot 18\sqrt{18}=3221{,}66\text{ cub.}'$$

Näherungsweise aus dem 18' hohen Dreieck:

$$M'=7{,}91\times\sqrt{\tfrac{1}{3}18}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot 18=3487{,}60\text{ cub.}'$$

7) In dem Beispiel No. 12 sei $H=18'$; $h=10'$; $B=20'$; $b=12'$; dann ist nach der Formel:

$$M=\frac{2\cdot 7{,}91}{15(18-10)}[(3\cdot 20\cdot 18+2\cdot 12\cdot 18$$
$$-5\cdot 20\cdot 10)18\cdot\sqrt{18}-(5\cdot 12\cdot 18-3\cdot 12\cdot 10$$
$$-2\cdot 20\cdot 10)10\sqrt{10}]=3820{,}59\text{ cub.}'$$

Näherungsweise, da der Schwerpunkt des Trapezes von der Basis $B$ entfernt ist um

$$\tfrac{1}{3}(H-h)\frac{B+2b}{B+b}$$

die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt, also

$$H-\tfrac{1}{3}(H-h)\frac{B+2b}{B+b}$$

$$=18'-\tfrac{1}{3}(18-10)\frac{20+2\cdot 12}{20+12}=14\tfrac{1}{3}'$$

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{14\tfrac{1}{3}}\cdot\frac{20+12}{2}(18-10)$$
$$=3833{,}18\text{ cub.}'$$

8) Wenn $h=0$ ist, wenn also die obere Grundlinie des Trapezes im Wasserspiegel liegt, sei $H=12'$, die obere Grundlinie

$b=6'$, die untere $B=15'$, dann ist nach der Formel:

$$M=\tfrac{2}{15}\cdot 7{,}91\cdot(3\cdot 15'+2\cdot 6')\cdot 12\sqrt{12}$$
$$=2498{,}74 \text{ cub.}'$$

Für das näherungsweise $M'$ hat man die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt:

$$h=\tfrac{1}{3}H\cdot\frac{b+2B}{b+B}=\tfrac{1}{3}12\cdot\frac{6+2\cdot 15}{6+15}=6\tfrac{6}{7}'$$

also

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{6\tfrac{6}{7}}\cdot\tfrac{1}{2}(6+15)12=2609{,}87 \text{ cub.}'$$

9) Liegt die längere Grundlinie $B=15'$ im Wasserspiegel, so ist

$$M=\tfrac{2}{15}\cdot 7{,}91(3\cdot 6+2\cdot 15)\cdot 12\sqrt{12}=2104{,}40$$

das näherungsweise

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{5\tfrac{1}{7}}\cdot\tfrac{1}{2}(6+15)\cdot 12=2260{,}25$$

15. In den Beispielen No. 14, ad 2, 3, 5 und 7, sind die Unterschiede swischen der richtigen und der näherungsweise berechneten Wassermenge nur gering, und überall, wo die Ausflufsöffnungen ganz unter Wasser liegen.

No. 14, ad 1, ist allgemein gezeigt, dafs die näherungsweise $M'$ höchstens $1{,}0605\cdot M$ betragen kann, wenn die Ausflufsöffnung bis zum Wasserspiegel reicht; dies gilt aber nur für rechtwinklige Oeffnungen.

Ad 4 ist die Oeffnung ein Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel liegt,

$$M=\tfrac{4}{5}\sqrt{g}\,BH\sqrt{H}$$
$$M'=2\sqrt{g}\sqrt{\tfrac{2}{3}H}\cdot\frac{BH}{2}$$

also $M:M'=1:\tfrac{5}{12}\sqrt{6}=1:1{,}0206$

In diesem Fall ist also $M'$ in noch geringerem Verhältnifs unterschieden als ad 1 bei rechtwinkligen Oeffnungen.

In dem Beispiel ist auch

$$M'=4932{,}19 \text{ cub.}'=1{,}0206\cdot M$$
$$=1{,}0206\cdot 4832{,}49 \text{ cub.}'$$

No. 14, ad 6, liegt die Grundlinie des Dreiecks im Wasserspiegel. Es ist

$$M=\tfrac{8}{15}\sqrt{g}\cdot B\cdot H\sqrt{H}$$
$$M'=2\sqrt{g}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{3}H}\,\frac{BH}{2}$$

hieraus $M:M'=1:\tfrac{5}{8}\sqrt{3}=1:1{,}08256$ also $M'$ in gröfserem Verhältnifs als ad 1 bei rechtwinkligen Oeffnungen, und es findet dies überall statt, wo die Ausflufsöffnungen nach oben sich verbreitern.

In dem ad 6 angeführten Beispiel ist auch

$$M'=3487{,}60 \text{ cub.}'=1{,}08256\cdot M$$
$$=1{,}08256\cdot 3221{,}66 \text{ cub.}'$$

16. Dafs die näherungsweise Wassermenge $H'$ um so gröfser wird, als die nach der jedesmaligen Formel richtig berechnete $M$, je mehr sich die Oeffnung nach oben erweitert, zeigt sich ganz allgemein aus dem Beispiel No. 14, ad 8 und 9.

Die Wassermenge aus dem Trapez ist

$$M=\tfrac{4}{15}\sqrt{g}(3B+2b)H\cdot\sqrt{H}$$

die näherungsweise

$$M'=2\sqrt{g}\sqrt{\tfrac{1}{3}H\cdot\frac{b+2B}{b+B}}\cdot\tfrac{1}{2}(b+B)H$$

also $M:M'=1:\dfrac{5\sqrt{3}}{8}\sqrt{1-\left(\dfrac{B}{3B+2b}\right)^2}$

Je gröfser $b$ wird, desto kleiner wird der Subtrahend der Wurzel, desto gröfser die Wurzel und mit ihr die Wassermenge $M'$.

Für $B=0$, also bei einem Dreieck, dessen Basis $b$ im Wasserspiegel liegt, ist $M'$ am gröfsten; man hat nämlich

$$\sqrt{1-\left(\frac{B}{3B+2b}\right)^2}=\sqrt{\frac{(3B+2b)^2-B^2}{(3B+2b)^2}}$$

wenn $B=0$ gesetzt wird $=\sqrt{\dfrac{4b^2}{4b^2}}=1$

mithin $M:M'=1:\tfrac{5}{8}\sqrt{3}$ wie ad 6 schon ermittelt worden.

17. Bei kreisförmigen und elliptischen Ausflufsöffnungen ist es also gerechtfertigt, die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Mittelpunkt der Oeffnung als Geschwindigkeitshöhe anzunehmen.

**Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.**

1. Ein Gefäfs sei auf seine Höhe $H$ mit Wasser gefüllt, so geschieht der Ausflufs desselben aus einer im Boden befindlichen Oeffnung nach No. 1 des vor. Art. mit der Geschwindigkeit $=2\cdot\sqrt{g}\cdot\sqrt{H}$

Erhält das Wasser keinen Zuflufs, so sinkt der Wasserspiegel, die Höhe wird immer geringer; ist sie noch $h$, so ist die Geschw. des Wassers noch $2\sqrt{g}\sqrt{h}$, und zuletzt, in dem Augenblick der gänzlichen Ausleerung, wird die Geschw. $=2\sqrt{g}\sqrt{0}=$ Null.

Die Geschwindigkeiten nehmen also gleichförmig ab, und zwar gerade so, wie wenn, nach Lehren der Mechanik, ein Körper mit der Anfangsgeschw. $c=2\sqrt{g}\sqrt{H}$ senkrecht in die Höhe geworfen wird, wobei er ebenfalls, zur gröfsten Höhe $H$ gelangend, die Endgeschwindigkeit = Null hat. Oder es ist auch der umgekehrte Fall von dem, wenn ein Körper von der Höhe $H$ ab mit der Anfangsgeschw. $=0$ frei herabfällt, wo er die Endgeschw. $=2\sqrt{g}\sqrt{H}$ erhält; und Fallen und Steigen geschieht in einerlei Zeit.

Setzt man diese Zeit des Fallens oder des Steigens $=t$ Secunden, so ist

$$t=\frac{c}{2g}$$

und die Höhe $H = gt^2$

Aus $t = \frac{c}{2g}$ hat man $c = 2gt$

Wenn also ein Körper $t$ Sec. lang mit unveränderter Geschw. $c$ fiele, so würde er die Höhe $H' = ct = 2gt \cdot t = 2gt^2$ also die Höhe $2H$ fallen.

Bleibt nun in einem prismatischen Gefäfs vom Querschnitt $A$ die Wasserhöhe $H$, also auch die Geschwindigkeitshöhe für eine im Boden des Gefäfses befindliche Oeffnung $a$ unverändert, und fliefst die Wassermenge $M = A \cdot H$ in $t$ Sec. aus, so fliefst dieselbe Wassermenge $AH$ in $2t$ Sec. aus, wenn während des Ausfliefsens kein Zuflufs stattfindet, oder, was dasselbe ist, das Gefäfs wird in $2t$ Secunden entleert.

Bei gleichbleibender Höhe $H$ ist die Ausflufsgeschwindigkeit $c = 2\sqrt{g}\sqrt{H}$ der Ausflufsquerschnitt $= a$ mithin die Wassermenge per Secunde

$$M = 2a\sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$$

die Gesammt-Wassermenge $= A \cdot H$ mithin die Zeit, in der $M$ ausfliefst

$$t = \frac{A \cdot H}{2a\sqrt{g}\sqrt{H}} = \frac{A \cdot \sqrt{H}}{2a\sqrt{g}}$$

folglich die Zeit der Entleerung des Gefäfses

$$T = 2t \text{ (hypothetisch)} = \frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}}$$

$$\text{(wirklich)} = \frac{2A \cdot \sqrt{H}}{\alpha a}$$

Wäre die Wasserhöhe im Gefäfs $= h$, so wäre die Zeit des Entleerens

$$T'' = \frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{g}} \text{ oder } \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

mithin die Zeit, in welcher so viel Wasser ausfliefst, dafs die Höhe $H$ auf die Höhe $h$ herabsinkt:

$$T' \text{ (hypothetisch)} = \frac{A}{a\sqrt{g}}[\sqrt{H} - \sqrt{h}]$$

$$\text{(wirklich)} = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{H} - \sqrt{h}]$$

2. Die vorstehenden Formeln erhält man mit Hülfe der höheren Analysis (wie vor. Art. No. 5) folgender Art:

Wenn das Wasser von der Höhe $H$ auf die Höhe $x$ gesunken ist, so ist die im Gefäfs vorhandene Wassermenge $= Ax$. Denkt man sich die Höhe $x$ um die sehr kleine Höhe $\triangle x$ vermehrt, so ist die Wassermenge in dem Gefäfs $= A(x + \triangle x)$.

Fig. 128.



War nun die Zeit, in welcher die Höhe $H$ auf die Höhe $x$ herabging, $= t$, so hat man $t$ um eine sehr kleine Zeit $\triangle t$ zu vermindern, um die Zeit $t = \triangle t$ zu erhalten, in der die Wasserhöhe $H$ auf die Höhe $x + \triangle x$ und die Wassermenge $AH$ auf die Menge $A(x + \triangle x)$ herabgegangen ist.

Daher beträgt in der Verminderung der Zeit $t$ um die sehr kleine Zeit $\triangle t$ oder innerhalb des kleinen Wachsthums der Zeit $t$ um $(-\triangle t)$ der Wachsthum der Wassermenge $A \triangle x$.

Während der sehr kleinen Zeit $(-\triangle t)$ aber und erst recht im Verschwinden desselben kann die Wasserhöhe als unveränderlich angesehen werden. Dann ist die Wassermenge, welche per Sec. ausfliefsen würde, $= 2\sqrt{g} \cdot a \cdot \sqrt{x}$ und die in der sehr kleinen Zeit $(-\triangle t)$ ausfliefsende Wassermenge

$$A \triangle x = 2\sqrt{g} \cdot a\sqrt{x}(-\triangle t)$$

woraus

$$\triangle t = -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a\sqrt{x}} \triangle x$$

und die Zeit, in welcher die Höhe $H$ auf die Höhe $x$ herabgesunken ist,

$$t_x = -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a} \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x + \text{Const.}$$

$$= -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a} 2\sqrt{x} + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ ist der Wasserstand $= H$, d. h. $x = H$, mithin

$$t_H = 0 = -\frac{A\sqrt{H}}{\sqrt{g} \cdot a} + \text{Const.}$$

woraus $C = +\frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}}$

folglich $t_x = \frac{A}{a\sqrt{g}} \cdot (\sqrt{H} - \sqrt{x})$

$$t = \left(t_h^H\right) = \frac{A}{a\sqrt{g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}) \text{od.} \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

und die Zeit des gänzlichen Entleerens für $h = 0$

$$T = t_0^H = \frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}} \text{ oder } \frac{2A\sqrt{H}}{\alpha a}$$

Beispiel. Ist der Querschnitt des prismatischen Gefäfses . . . . . $A = 30\square'$
die Ausflufsöffnung . . . . . . . . $a = \frac{1}{4}\square'$
die ganze Höhe des Gefäfses . $H = 10'$
und nach pag. 216, No. 7 . . . $\alpha = 4{,}89$
so hat man für die gänzliche Entleerung des Gefäfses

$$T = \frac{2 \cdot 30\sqrt{10}}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}} = 155{,}20 \text{ Secunden}$$

die Zeit, in welcher das Wasser zur Hälfte, also bis auf 5 Fufs Höhe ausfliefst

$$T' = \frac{2 \cdot 30}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}}(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 45{,}45 \text{ Secunden,}$$

so dafs zum Ausflufs der zweiten Hälfte 109,65 Secunden gehören.

Denkt man sich in der Aufgabe die Zeit $T$ der völligen Entleerung in $m$ gleiche Theile getheilt, so hat man die Höhe $h'$ des Wassers im Gefäfs, welches darin zurückgeblieben, nachdem der Ausflufs $\frac{n}{m}T$ gedauert hat, aus

$$\frac{n}{m}\frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}} = \frac{A}{a\sqrt{g}}(\sqrt{H}-\sqrt{h'})$$

$$\text{woraus } h' = \left(1-\frac{n}{m}\right)^2 H$$

Nach $\frac{1}{10}$ der Zeit $T$ ist $h = (\frac{9}{10})^2 H = 0{,}81 \cdot H$
„ $\frac{2}{10}$ „ „ $T$ „ $h = (\frac{8}{10})^2 H = 0{,}64 \cdot H$
. . . . . . . . . . . . .
„ $\frac{9}{10}$ „ „ $T$ „ $h = (\frac{1}{10})^2 H = 0{,}01 \cdot H$

4. Denkt man sich in der vorigen Aufgabe die Höhe $H$ in $m$ gleiche Theile getheilt, so erhält man die Zeit $t'$, nach deren Ausflufs das Wasser im Gefäfs noch die Höhe $\frac{n}{m}H$ einnimmt.

$$t' = \frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}}\left(1-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

$$\text{oder } \frac{2A\sqrt{H}}{\alpha a}\left(1-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

5. In der verticalen Seitenwand eines prismatischen Gefäfses vom horizontalen Querschnitt $A$ und der Höhe $H$ befindet sich eine von oben bis unten offene rechtwinklige Oeffnung von der Breite $b$; die Zeit $t$ in Secunden zu bestimmen, in welcher das Wasser im Gefäfs noch die Höhe $h$ hat, in welcher also der Wasserspiegel um die Höhe $H-h$ gesunken ist.

In der Zeit $t_x$ sei der Wasserspiegel bis auf die Höhe $x$ herabgesunken, so ist nach pag. 217, No. 3, die Wassermenge, die in der nächsten Secunde ausfliefsen würde, wenn der Wasserspiegel ungeändert bliebe,

$$M_x = \tfrac{2}{3}\alpha b x \sqrt{x}$$

Geschieht nun in der nächstfolgenden

Fig. 129.



sehr kleinen Zeit $\triangle t$ die Senkung des Wasserspiegels um die sehr kleine Höhe $\triangle x$, so dafs mit der Zeit $t+\triangle t$ der Wasserspiegel auf die Höhe $x-\triangle x$ gekommen ist, so ist für das Verschwinden von $\triangle t$ und $\triangle x$ der Wasserspiegel als unverändert zu betrachten; die während der Zeit $\triangle t$ ausfliefsende Wassermenge ist (s. No. 3):

$$\triangle M_x = A(-\triangle x) = \tfrac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}\cdot\triangle t$$

$$\text{woraus } \triangle t_x = \frac{3A}{2\alpha b}\cdot\frac{-\triangle x}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{und } t_x = \frac{3A}{2\alpha b}\int\frac{-\partial x}{x^{\frac{3}{2}}} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{3A}{2\alpha b}\int x^{-\frac{3}{2}}\cdot\partial x + C$$

$$= +\frac{3A}{\alpha b\sqrt{x}} + C$$

Für $t=0$ ist das Wasser auf der ursprünglichen Höhe $H$ geblieben, $x=h$ und

$$t_H = 0 = +\frac{3A}{\alpha b\sqrt{H}} + C$$

$$\text{woraus } C = -\frac{3A}{\alpha b\sqrt{H}}$$

$$\text{und } t_h = \frac{3A}{\alpha b}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}-\frac{1}{\sqrt{H}}\right)$$

und wenn man die Klammergröfse mit $Hh$ multiplicirt und dividirt

$$t_h = \frac{3A}{\alpha b}\cdot\frac{H\sqrt{h}-h\sqrt{H}}{Hh}$$

Setzt man in die vorletzte, für $t_h$ gefundene Formel $h=0$, so entsteht

$$t_h = \frac{3A}{\alpha b}\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{\sqrt{H}}\right) = \infty$$

Denn mit der Abnahme der Druckhöhe bis zu der Höhe = Null, bei welcher die gänzliche Ausleerung erst geschieht, nimmt auch die Geschwindigkeit immer mehr ab, wird in der Nähe von Null Höhe unendlich klein, mithin auch die ausfliefsende Wassermenge unendlich klein, und somit findet eigentlich eine vollkommene Leerung des Gefäfses durch blofses Ausfliefsen in keiner noch so grofsen Zeit statt; die letzten Antheile von Wasser verschwinden durch Verdunstung.

Beispiel. Ein Bassin hat einen Flächenraum $A$ von 10000 □Fufs, einen Wasserstand $H$ von 10 Fufs, die Ausflufsschleuse hat 4 Fufs Breite mit Flügeln, diese wird auf die ganze Höhe $H = 10$ Fufs geöffnet, so ist die Zeit, in welcher das Wasser 4 Fufs tief abgelassen wird, weil hier $\alpha$ (pag. 216, No. 4) = 6,76 ist,

$$t = \frac{3\cdot 10000}{6{,}76\cdot 4}\cdot\frac{10\sqrt{10-4}-(10-4)\sqrt{10}}{10\cdot(10-4)}$$

$$= 101{,}86 \text{ Sec.}$$

Wenn das Bassin 8 Fufs tief, also bis auf 2 Fufs Wasserstand abgelassen werden soll

$$t = \frac{30000}{27{,}04} \cdot \frac{10\sqrt{2} - 2\sqrt{10}}{10 \cdot 2} = 433{,}66 \text{ Sec.}$$

so dafs die folgenden 4 Fufs Tiefe erst in 331,8 Sec. ausfliefsen.

6. Theilt man die Höhe $H$ des Behälters No. 5 in $m$ gleiche Theile, so findet man die Zeit $T$, nach welcher der Wasserstand noch $\frac{n}{m} H$ beträgt, aus

$$T' = \frac{3A}{a\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{m} H}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right)$$

$$= \frac{3A}{a\,b\sqrt{\frac{n}{m} H}} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

Setzt man, um das Verfahren für Berechnung der gänzlichen Entleerung zu finden, $n = 1$, so hat man

$$T = \frac{3A\sqrt{m}}{\alpha b \sqrt{H}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

Je gröfser man $m$ setzt, desto gröfser wird $T$, desto kleiner aber zugleich $1 - \sqrt{\frac{1}{m}}$ und man hat daher für ein beliebig grofses $m$

$$T = \frac{3A}{\alpha b \sqrt{H}} \cdot \sqrt{m}$$

In dem Beispiel No. 5 ist $H = 10$ Fufs $= 120$ Zoll $= 1440$ Linien.

Man findet demnach die Zeit, in welcher das Wasser bis auf eine Linie Höhe ausgeflossen ist

$$T = \frac{3 \cdot 10000}{6{,}76 \cdot 4\sqrt{10}} \sqrt{1440} = 13314 \text{ Sec.}$$

$= 3$ Stunden 41 Min. 54 Sec.

Setzt man die in dem Bassin verbleibende Höhe $= 2$ Linien, also $m = 720$, so erhält man

$T_1 = 9414$ Sec. $= 2$ Std. 36 Min. 54 Sec.

so dafs der Ausflufs des Wassers auf die zweite Linie Höhe allein 1 Std. 5 Min. gedauert hat.

7. Hat in der Aufgabe No. 1 und No. 2 die in dem Gefäfs befindliche Wassermenge $AH$ in jeder Secunde einen Zuflufs $m$, welcher kleiner ist als die in der ersten Zeit per Secunde ausfliefsende Wassermenge $M$, so sei wieder in der Zeit $t$ der Wasserstand von der Höhe $H$ auf die Höhe $x$ gesunken, mit der Abnahme von $t$ und $\triangle t$ entsteht die Zunahme von $x$ um $\triangle x$, welche während des Verschwindens die Höhe $x$ unverändert läfst. Die per Secunde bei constantem $x$ ausfliefsende Wassermenge würde sein

$$\alpha a \sqrt{x} = M$$

und in der Zeit $\triangle t$

$$\alpha a \sqrt{x} \triangle t = M_{\triangle x}$$

Diese Wassermenge würde $= A \cdot \triangle x$ sein, wenn kein Zuflufs stattfände, sie ist aber wirklich $A \triangle x + m \triangle t$

daher

$$\alpha a \sqrt{x} \cdot \triangle t = A \triangle x + m \triangle t$$

woraus, mit Berücksichtigung, dafs

$\triangle x$ zu $(-\triangle t)$ gehört

$$\triangle t = -\frac{A}{\alpha a \sqrt{x} - m} \triangle x$$

und $t = -A \cdot \int \frac{\partial x}{\alpha a \sqrt{x} - m} + \text{Const.}$

Man setze des leichteren Integrirens wegen

$$\alpha a \sqrt{x} - m = s$$

so ist $x = \left(\frac{s+m}{\alpha a}\right)^2$

und $\partial x = 2 \frac{s+m}{\alpha^2 a^2} \partial s$

folglich $\int \frac{\partial x}{\alpha a \sqrt{x} - m} = \int 2 \cdot \frac{s+m}{\alpha^2 a^2} \cdot \frac{\partial s}{s}$

$$= \frac{2}{\alpha^2 a^2} \int \left(\partial s + m \frac{\partial s}{s}\right)$$

$$t_x = -\frac{2A}{\alpha^2 a^2} (s + m \log n\, s) + \text{Const.}$$

für $s$ den ursprünglichen Werth gesetzt

$$t_x = -\frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{x} + \frac{m}{\alpha a}\left(1 + ln(\alpha a \sqrt{x} - m)\right)\right] + C$$

Für $x = H$ beginnt der Ausflufs, also $t = 0$, woher

$$C = +\frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{H} + \frac{m}{\alpha a}\left(1 + ln(\alpha a \sqrt{H} - m)\right)\right]$$

und

$$t_h^H = \frac{2A}{\alpha a}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h} + \frac{m}{\alpha a} ln \frac{\alpha a \sqrt{H} - m}{\alpha a \sqrt{h} - m}\right)$$

findet kein Zuflufs statt, so ist $m = 0$ und

$$t_h^H = \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

wie No. 1 entwickelt worden. Die Auflösung ist nur möglich, wenn $\alpha a\sqrt{h} > m$; denn für $\alpha a\sqrt{h} = m$ entsteht

$ln(\alpha a\sqrt{H} - m) - ln\,0$, und

$log\,0$ ist unmöglich.

Wird $\alpha a\sqrt{H} < m$, so entsteht der *log* einer negativen Gröfse, der ebenfalls unmöglich ist. Beides geht aus der Natur der Aufgabe hervor, denn wenn $H$ auf diejenige Höhe $h'$ gesunken ist, dafs

$$\alpha a\sqrt{h'} = m$$

so bleibt der Wasserspiegel constant auf $h'$ stehen, es geschieht also keine weitere Entleerung des Gefäfses.

Eben so geschieht keine Senkung des Wasserspiegels, wenn

$$m \overline{\gtrless} \alpha a\sqrt{H}$$

Beispiel. In dem Beispiel ad No. 3, pag. 222, wird das Gefäfs in 155,2 Secunden gänzlich entleert. Bei 10 Fufs anfänglicher Druckhöhe würde die Wassermenge per Sec. sein

$$M = 4{,}89 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{10} = 3{,}866 \text{ cub.}'$$

Erhält das Gefäfs Zuflufs, so kann eine theilweise Entleerung desselben nur geschehen, wenn er weniger als 3,866 cub.' per Sec. beträgt. Der Zuflufs per Sec. sei $m = 2$ cub.', so hat man diejenige Höhe $h$, bei welcher der Ausflufs 2 cub.' Wasser beträgt, aus der Gleichung

$$2 = 4{,}89 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{x}$$

woraus $x = 2{,}67647$ Fufs.

Auf dieser Höhe also bleibt das Wasser im Gefäfs stehen, weil Zuflufs und Abflufs sich gleich sind.

Um nun zu erfahren, in welcher Zeit $t$ das Wasser bis auf die Höhe 4 Fufs sinkt, hat man

$$t = \frac{2 \cdot 30}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}}\left(\sqrt{10} - \sqrt{4} + \frac{2}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}}\,logn\,\frac{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10} - 2}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{4} - 2}\right) = 57{,}0454 + 80{,}294 \cdot ln\,\frac{1{,}865912}{0{,}445}$$

Nun ist *log brig* 1,865912 = 0,2708912
„ „ 0,445 = 0,6483600 − 1
mithin „ „ Quotient = 0,225312
Es ist aber $log\,n\,Z = 2{,}302585 \times log\,brig\,Z$

mithin $ln\,\dfrac{1{,}865912}{0{,}445} = 2{,}302585 \times 0{,}225312$

Man rechne nun

*log* 80,294 = 1,9046831
„ 2,302585 = 0,3709073
„ 0,225312 = 0,3527843 − 1
*log* Product = 1,5283747

das Product = 33,7575
hierzu = 57,0454
$t$ = 90,803 Secunden.

8. Die Bedingung in der Aufgabe No. 7, dafs nur Ausflufs möglich ist, wenn $\alpha a\sqrt{h} > m$, liegt, wie auch dort erwähnt, schon in der Formel, indem die *log* für Null oder für eine negative Gröfse beide unmöglich sind.

Es ist aber doch eine natürliche Frage, welches die Zeit $t$ sei, in der der Wasserspiegel auf die Höhe $h'$ als Grenzwerth, nämlich wo

$$\alpha a\sqrt{h'} = m$$

wird (im Beispiel No. 7; $h' = 2{,}6765$ Fufs), herabsinkt.

Für diese Frage findet dasselbe Verhältnifs No. 6 statt: die Zeit $t$ ist $\infty$ grofs, indem die letzten sehr kleinen Höhen über $h'$ eine immer gröfsere Zeit zum Sinken erfordern, je näher sie $h'$ kommen.

Man setze in die Formel für $t$ (No. 7) den Nenner von *log nat*

$$\alpha a\sqrt{h} - m = \alpha a\sqrt{h' + \frac{1}{n}h'} - m$$

$$= \alpha a\sqrt{h'}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - m$$

$$= m\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$$

da nun

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} - \ldots$$

für ein beliebig grofses $n$ aber die Glieder mit den Potenzen von $n$ als unbedeutend fortgelassen werden können, so ist

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{2n}$$

zu setzen; und man hat für $h'$

$$t = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{H} - \sqrt{h'} + \frac{m}{\alpha a}\,ln\,\frac{\alpha a\sqrt{H} - m}{\frac{m}{2n}}\right]$$

$$= \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{H} - \sqrt{h'} + 2{,}302585 \cdot \frac{m}{\alpha a}\,log\,\frac{\alpha a\sqrt{H} - m}{m} \cdot 2n\right]$$

Nun berechne man für einen speciellen Fall den ganzen Ausdruck bis auf das beliebig zu nehmende $n$.

Für das Beispiel No. 7 ist die Höhe

$$h' = 2{,}6765 \text{ Fufs}$$

$$\frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{H}-\sqrt{h}] = \frac{2\cdot 30}{4,89\cdot\frac{1}{4}}[\sqrt{10}-\sqrt{2,6765}] = 74,9106$$

$$\frac{2A}{\alpha a}\cdot 2,302585\cdot\frac{m}{\alpha a} = \frac{2\cdot 30\cdot 2}{(4,89\cdot\frac{1}{4})^2}\cdot 2,302585 =$$

$$(log = 2,2668991)\ 184,8839$$

$$log\, 2\,\frac{\alpha a\sqrt{H}-m}{m} = log\, 2\,\frac{4,89\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10}-2}{2} = 0,2708651$$

$$184,8839\times 0,2708651 = 50,0786$$

Man hat demnach

$$t = 74,9106 + 50,0786 + 184,8830\ log\, n$$

Für $n$ kann jede beliebige Zahl genommen werden; soll aber $\frac{1}{n}$ ein aliquoter Theil von $h' = 2,6765$ Fufs $= 32,118$ Zoll $= 385,4$ Linien werden, so erhält man für $\frac{1}{n}h' = \frac{1}{10}$ Linie, $n = 3854$

$log\, 3854 = 3,5859117$
$log\, 3,5859117 = 0,5545996$
$log\, 184,8839 = 2,2668991$
$log$ Product $= 2,8214987$

letzter Summand $= 662,9773$
$74,9106 + 50,0786 = 124,9892$

Summa 787,9665 Sec.
= 13 Min. 8 Sec.

Die letzte Formel für $t$ mit Einführung des $n$ hat nur den Vortheil, dafs man schneller die Zeit für den Unterschied sehr kleiner Höhen berechnen kann; es ist jedoch zu bemerken, dafs dabei der Subtrahend $\sqrt{h'}$ statt $\sqrt{h}$ um $\frac{1}{n}h$ zu klein in Rechnung gestellt wird.

In dem vorstehenden Beispiel ist statt
$\sqrt{2,6765}$ . . . . . . . . . . $= 1,636001$
die richtige Zahl $\sqrt{2,6765' + \frac{1}{10}'''}$
$= \sqrt{2,6772}$ . . . . . . . . . . $= 1,636215$
zu klein um 0,000214

Der Werth von $t$ also zu klein um

$$\frac{2\cdot 30}{4,89\cdot\frac{1}{4}}\,0,000214 = 0,0105 \text{ Secunden}$$

welches ohne Einflufs ist.

9. Die vorstehende Aufgabe ist die einfachste unter der Bedingung, dafs Zuflufs stattfindet. Bei anderen ist die Auflösung schwierig und langwierig.

Wenn z. B. in der Aufgabe No. 5 ein Zuflufs an Wasser $= m$ per Secunde stattfindet, dann ist dort

$$\triangle M_x = A(-\triangle x) + m\triangle t = \tfrac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}\cdot\triangle t$$

woraus

$$\triangle t = -\frac{A}{\frac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m}\triangle x$$

$$\text{und } t_x = -A\int\frac{\partial x}{\frac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m} + C$$

Setzt man des leichteren Integrirens wegen

$$\tfrac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m = s$$

$$\text{so ist } x = \sqrt[3]{\left(\frac{s+m}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^2}$$

$$\partial x = \frac{1}{\alpha b}\sqrt[3]{\frac{\frac{2}{3}\alpha b}{s+m}}\,\partial s$$

$$t_x = -\sqrt[3]{\frac{\frac{2}{3}\alpha b}{\alpha b}}\,A\int\frac{\partial s}{s\sqrt[3]{s+m}} + C$$

Setzt man nochmals

$\sqrt[3]{s+m} = y$
so ist $s = y^3 - m$
$\partial s = 3y^2\,\partial y$

$$\text{und } t_x = -\frac{3\sqrt[3]{\frac{2}{3}\alpha b}}{\alpha b}\cdot A\int\frac{y\,\partial y}{y^3-m} + C$$

Dies Integral besteht aus 2 Summanden, von welchen der eine ein *logn*, der andere ein *arc tg* ist. Hierzu die Rücksubstitution von $y$ auf $s$ und auf $x$, die Einführung der Constante bei $t = 0$ für $x = H$ giebt einen sehr weitläufigen Ausdruck für $t$.

**Ausflufs des Wassers aus zusammengesetzten Behältern.**

Es seien mehrere Gefäfse $A, A', A''$... durch Scheidewände von einander getrennt, in diesen aber befinden sich dicht über dem gemeinschaftlichen horizontalen Boden Oeffnungen von den Querschnitten $a, a', a''$...; es sind demnach die Gefäfse $A$ und $A'$ durch die Oeffnung $a$, die Gefäfse $A'$ und $A''$ durch die Oeffnung $a'$ u. s. w. communicirend verbunden, die letzte Oeffnung $a''$ aus dem letzten Gefäfs $A''$ münde frei aus.

Fliefst nun in das Gefäfs $A$ per Secunde $M$ Kubikfufs Wasser und ist $a$ nicht im Stande, diese Wassermenge durchzulassen, so steigt das Wasser in $A$ und es würde auf eine Höhe $x$ steigen, bei welcher $\alpha a\sqrt{x} = M$ durch $a$ ausfliefst, und das Wasser würde in $A$ auf der Höhe $x$ stehen bleiben, wenn $a$ in's Freie mündete.

Allein $a$ mündet in das Gefäſs $A'$; $a'$ ist zu klein, um $M$ ohne Druckhöhe durchzulassen, das Wasser steigt also in $A'$,

Fig. 130.




und wenn $a'$ in's Freie mündet, bis zu einer Höhe $x_1$, daſs $\alpha a' \sqrt{x_1} = M$.

So wie aber das Wasser in $A'$ steigt, wird die Wirkung der Druckhöhe $x$ in $A$ vermindert, und die Steigung des Wassers in $A$ muſs gleichfalls zunehmen, damit der Ueberschuſs der Höhe in $A$ über die in $A$ die zum Ausfluſs von $M$ aus $a$ erforderliche Höhe $x$ verbleibe, und erst, wenn die Höhe in $A$ von $x$ auf $x + x_1$ gestiegen ist, dann verbleiben beide Höhen $x + x_1$ in $A$; $x_1$ in $A'$ und aus jeder der beiden Oeffnungen $a$ und $a'$ flieſst $M$ aus.

Mündet $a'$ in ein drittes Gefäſs, dessen Ausfluſs-Oeffnung $a''$ ist, so steigt das Wasser darin bis zu der Höhe $x_2$, bei welcher $\alpha a \sqrt{x_2} = M$; in $A'$ steigt das Wasser auf die Höhe $x' + x''$, in $A$ auf die Höhe $x + x_1 + x_2$ u. s. w. Bei $n$ Gefäſsen ist die Wasserhöhe

$$\text{in } A = x + x_1 + x_2 + \ldots x_n$$

$$\text{„ } A' = x_1 + x_2 + \ldots x_n$$

. . . . . . . . . . .

$$\text{„ } A_n = x_n$$

Bei diesem letzten Gefäſs $A_n$ ist also

$$\alpha a_n \sqrt{x_n} = M, \text{ woraus}$$

$$x_n = \left(\frac{M}{\alpha a_n}\right)^2$$

Eben so ist für

$$A_{n-1}\; x_{n-1} = \left(\frac{M}{\alpha a_{n-1}}\right)^2$$

. . . . . . . . . . .

$$\text{und für } A \quad x \quad = \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2$$

Die in dem ersten Gefäſs $A$ erforderliche Gesammt-Druckhöhe

$H = x + x_1 + x_2 + \ldots x_n$ ist demnach

$$H = \frac{M^2}{\alpha^2}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \ldots \left(\frac{1}{a_n}\right)^2\right]$$

Sind alle Oeffnungen gleich groſs, $a = a' = a'' \ldots$, so hat man $H = n\dfrac{M^2}{\alpha^2 a^2}$

Beispiel 1. Bei 3 mit einander verbundenen Gefäſsen hat die erste Oeffnung 5 □", die zweite 6 □", die dritte 8 □" Querschnitt, der Zufluſs in's erste Gefäſs beträgt per Sec. 400 Kubikzoll. Welches sind die 3 Wasserhöhen, nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist?

Setzt man (nach pag. 216, No. 7) $\alpha = 4{,}89$; so hat man die dritte Druckhöhe

$$= x_2 = \left(\frac{400(\text{cub.}'')}{4{,}89 \cdot 8\,(\square'')}\ \text{Zoll}\right)^2 = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} = -'\ 8''\ 8{,}55'''$$

$$\text{die zweite } x_1 = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 6 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} \qquad = 1'\ 3''\ 5{,}87'''$$

$$\text{der Wasserstand im zweiten Gefäſs} \qquad = 2'\ -''\ 2{,}42'''$$

$$\text{die erste } x = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 5 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} \qquad = 1'\ 10''\ 3{,}65'''$$

$$\text{der Wasserstand im ersten Gefäſs} \qquad = 3'\ 10''\ 6{,}07'''$$

Beispiel 2. Die Ausfluſsöffnungen der 3 Gefäſse (Beispiel 1) 5 □", 6 □" und 8 □" sind gegeben, es wird gefragt, wie groſs der Zufluſs per Secunde in das erste Gefäſs sein müsse, damit das Wasser darin $3'\ 10\frac{1}{2}''$ hoch steige und für den Beharrungszustand so hoch darin verbleibe.

Man hat

$$3'\ 10\tfrac{1}{2}'' = \frac{M^2}{4{,}89^2}\left[\left(\frac{1}{5\,\square''}\right)^2 + \left(\frac{1}{6\,\square''}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\,\square''}\right)^2\right]$$

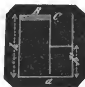
$$\text{also } M = 4{,}89 \sqrt{\frac{3\frac{7}{8}}{\left(\frac{144}{5}\right)^2 + \left(\frac{144}{6}\right)^2 + \left(\frac{144}{8}\right)^2}} \text{ cub.}'$$

$$= 4{,}89 \cdot 1728 \sqrt{\frac{3\frac{7}{8}}{1729{,}44}} = 399{,}9776 \text{ Kubikzoll}$$

oder die im Beispiel 1 gegebenen 400 Kubikzoll.

2. Sind zwei Gefäfse, *B*, *C*, durch eine Scheidewand von einander getrennt, befindet sich in derselben am Boden eine Oeffnung vom Querschnitt $a$, und wird das eine Gefäfs *B* auf die Höhe $h$ voll Wasser erhalten, so findet man die Zeit $t$, in welcher das Gefäfs *B* auf die ganze Höhe $h$ oder auf eine kleinere Höhe $h'$ mit Wasser sich anfüllt, wenn dessen Querschnitt *A* gegeben ist, unter derselben Betrachtung wie pag. 222 die Entleerung eines Gefäfses gefunden worden ist, wenn man statt des dortigen Fallens des Wassers hier Steigen sagt.

Fig. 131.




Die Zeit also, in welcher das Wasser in *C* auf die Höhe $h$ steigt, ist

$$t=\frac{2A\sqrt{h}}{\alpha\cdot a}$$

die Zeit, in welcher es auf eine Höhe $h'$ steigt

$$t'=\frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h}-\sqrt{h-h'}\right]$$

**Beispiel über die Füllung und Leerung einer Schleusenkammer.**

Die preufsischen Schleusen haben jetzt in den Häuptern 17 Fufs, in den Kammern am Boden 30 Fufs, in den Oberkanten 32 Fufs lichte Breite, von Drempel zu Drempel 131 Fufs Länge, in der Kammer also im Mittel 4030 □Fufs Grundfläche, und bei 10 Fufs Entfernung des Ober- vom Unterwasserspiegel 40300 cub.' Inhalt; die Füllung und Leerung geschieht meistens durch gemauerte Umläufe, deren Ausflufsöffnungen ganz unter Wasser liegen. Früher hatten die Schleusen gröfsere Dimensionen, breitere Häupter und die Füllung und Leerung der Kammern geschah durch Oeffnungen in den Schleusenthoren, die durch Anfzugvorrichtungen geöffnet und geschlossen wurden, wie dies in Eytelwein's Wasserbaukunst, Heft 4, speciell gezeichnet und beschrieben worden, und ein Beispiel zur Berechnung der Zeit, zur Füllung und Leerung der Kammer in dessen Hydraulik, pag. 144. Aus Pietät gegen diesen ausgezeichneten Mann und seine uns hinterlassenen Werke soll dasselbe Beispiel hier angeführt werden.

*BC* ist das Oberthor, *AB* der vor der Kammer stehende Oberwasserspiegel, *OQ* der Unterwasserspiegel, das Unterthor *IM* wird geschlossen, das in der Kammer befindliche Schiff soll von *OP* nach *AB* gehoben werden; die Oeffnung *EF* des Oberthors wird geöffnet und die Kammer bis zur Höhe *ABI* gefüllt. Die Höhe *OB*, der Unterschied zwischen beiden

Fig. 132.




Wasserspiegeln ist 10', die Höhe der Schützöffnung 4', ihre Breite $2\frac{1}{2}'$, ihr Querschnitt ($a$) also $4'\times 2\frac{1}{2}'=10$□', ihr Schwerpunkt *G* liegt 5' unter dem Oberwasserspiegel, also auch 5' über dem Unterwasserspiegel, der Raum *GHCP* beträgt 23000 cub.', die Länge *GH* der Schleusenkammer 200 Fufs, deren Breite 24 Fufs, deren Grundfläche also 4800□' und der Raum *BIGH* bei 5' Höhe, mithin 24000 cub.'

Der untere Raum *GHOP* wird also eben so gefüllt, als wenn das Wasser durch *EF* frei ausströmte, mithin die Wassermenge per Secunde nach der Formel (pag. 217) $M=\alpha a\sqrt{h}$

Hier ist $a=10$□'; $h=5'$; $\alpha=5$ (nach Eytelwein), daher

$$M=5\cdot 10\sqrt{5}=50\sqrt{5}\text{ cub.}'$$

Die Wassermenge 23000 cub.' fliefst also aus in $T$ Secunden, wo

$$T=\frac{23000}{50\sqrt{5}}=205{,}72\text{ Secunden.}$$

Die Füllung des über *GH* befindlichen Raums von 24000 cub.' bei 5' Höhe wird berechnet nach der letzten Formel

$$T'=\frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

Hier ist $A=4800$□', $h=5'$, $a=10$□', $\alpha=5$, daher

$$T'=\frac{2\cdot 4800\cdot\sqrt{5}}{5\cdot 10}=429{,}33\text{ Secunden.}$$

Beide Zeiten $T+T'=205{,}72+429{,}33$ geben die Zeit zur Füllung der Schleusenkammer = 635,05 Secunden = 10 Minuten 35 Secunden.

Behält man die von Eytelwein gegebenen Dimensionen bei, setzt aber gemauerte Umläufe statt der Thoröffnungen,

deren Ein- nnd Ausflnfsöffnnngen auch bei dem niedrigsten Wasserstande nnter Wasser liegen, kreis- oder ellipsenförmig sind nnd deren Mündungen in Form einer Trompetenstürze Erweiterungen haben, damit die Contraction möglichst vermindert werde, so hat die Ausflufsöffnung $a$ bei 10 □' Querschnitt etwa 3½' Durchmesser, und deren Mittelpnnkt mag 2' tief unter Wasser liegen. Dann findet die Formel

$$t = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

einmal, und die Formel

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h - h'}\right]$$

dreimal Anwendung. Denn der untere Ranm bis $GH$ hat bei 23000 cub.' Inhalt nnd 5' Höhe die Grundfläche $A = \frac{1}{5} \cdot 23000 = 4600$ □'; da nun der Schwerpnnkt der Ausflnfsöffnung 2' unter dem Wasserspiegel liegt, so erhält man die Zeit der Füllung des nnteren Raums, wenn man die Zeit der Füllnng auf 7' Höhe berechnet nnd von dieser die Zeit der Füllung anf 2' Höhe, die schon stattfindet, abzieht; und hierauf berechnet man für den über $GH$ belegenen Theil der Kammer, wo $A = 4800$ □' ist, die Zeit, in welcher die Kammer anf 12' Höhe gefüllt wird, und zieht von dieser die Zeit ab, in welcher die Kammer anf die schon vollen 7' Höhe gefüllt wird.

Die oben gedachten 4fachen Formel-Anwendnngen lassen sich für die Praxis abkürzen: Es sei die Höhe vom Schwerpnnkt der Ausflufsöffnung bis znm Unterwasserspiegel $OP = h''$, von $OP$ bis $GH = h'$, von $GH$ bis $BI = h$; die Grundfläche der Schlensenkammer über $GH = A$, unter $GH = A'$. Dann hat man die Zeit znr Füllnng bis $OP$

$$t'' = \frac{2A'}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h + h'}\right]$$

bis $GH$

$$t' = \frac{2A'}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h}\right]$$

und in Beziehnng anf den oberen Theil

$$t_1 = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h}\right]$$

bis $BI$

$$t = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h + h' + h''}$$

die Zeit zur Füllung des nnteren Kammerraums ist

$$t' = t'' = T = \frac{2A'}{\alpha a}\left(\sqrt{h + h'} - \sqrt{h}\right)$$

die Zeit znr Füllnng des oberen Kammerraums

$$t - t_1 = T' = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}$$

woraus zugleich zu ersehen, dafs die Zeiten der Kammerfüllnng von der Tiefe $h''$ der Ausflufsöffnung unter dem Wasserspiegel unabhängig ist.

Setzt man nnn die Werthe $A' = 4600$, $A = 4800$, $h = 5$, $h' = 5$, $\alpha = 5$, $a = 10$, so hat man

$$T = \frac{2 \cdot 4600}{5 \cdot 10}(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 170{,}42 \text{ Sec.}$$

$$T' = \frac{2 \cdot 4800}{5 \cdot 10}\sqrt{5} \qquad = 429{,}33 \text{ „}$$

$$T + F' \qquad = 599{,}75 \text{ Sec.}$$

$T$ ist bei dem Umlanf also geringer als bei einer Thoröffnung, und natürlich weil die Druckhöhe bei der ersteren Construction von Anfang bis Ende der Füllung gröfser ist als bei der letzten, während $T'$ für beide Constructionen gleich grofs ist, weil die Art der Füllnng einerlei bleibt.

Die Umläufe, besonders bei der oben beschriebenen Form deren Mündnngen, gewähren aber noch den Vortheil, dafs $\alpha$ gröfser und zwar nach pag. 216, No. 4, für Schützöffnungen mit Flügelwänden $= 6{,}76$ gesetzt werden kann. Es ist demnach die Zeit der ganzen Kammerfüllung

$$= \frac{5}{6{,}76} \times 599{,}75 = 443{,}60 \text{ Secunden}$$
$$= 7 \text{ Min. } 23{,}6 \text{ Secund.}$$

Die Ausleerung der Schlensenkammer dnrch eine Oeffnung in dem Unterthor, welche ganz unter dem Unterwasserspiegel liegt, geschieht bei einerlei $\alpha$ in derselben Zeit, in welcher die Kammer durch Umläufe ausgeleert wird; in Wirklichkeit geschieht sie durch Umläufe in $\frac{5}{6{,}76}$ der Zeit durch Thoröffnnngen.

Nach Eytelwein beträgt die Schützöffnung $5 \cdot 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ □', demnach die Zeit der Ausleerung durch eine Thoröffnung von $BI$ bis $GH$

$$= \frac{2 \cdot 4800}{5 \cdot 12\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 142{,}26 \text{ Sec.}$$

von $GH$ bis $OP$

$$= \frac{2 \cdot 4600}{5 \cdot 12\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} \qquad = 329{,}15 \text{ „}$$

die Zeit der Entleernng $= 471{,}41$ Sec.
$= 7$ Min. $51\frac{1}{2}$ Sec.

die Zeit der Entleerung durch Umläufe

$$\frac{5}{6{,}76} \times 471{,}41 = 348{,}68 \text{ Sec.}$$
$$= 5 \text{ Min. } 48\frac{3}{4} \text{ Sec.}$$

Die Vortheile, welche die Umläufe für die längere Daner und die geringeren

Unterhaltungskosten des Schleusenbauwerks gewähren, gehören nicht hierher.

**Ausfluſs der Luft.** Es wird hier Bezug genommen auf die Artikel: Aërostatik, pag. 39, und Aërodynamische Gesetze, pag. 38. Nach dem ersten Art. ist Luft im Gleichgewicht, wenn jedes Theilchen derselben von allen Seiten einerlei Druck erhält. Luft kann also nur ausfliefsen, wenn sie nach der Ausfluſsrichtung hin einen geringeren Gegendruck erfährt, als der ist, dem sie von allen anderen Seiten her ausgesetzt ist. Wenn z. B. die Ausfluſsöffnung in einen absolut leeren Raum mündet oder in einen Raum, der eine Luft von geringerer Dichtigkeit enthält, als die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft beträgt.

Befindet sich in einem Gefäſs mit Oeffnung Luft von einerlei Dichtigkeit mit der äuſseren, so daſs Gleichgewicht stattfindet, und wird eine an die Gefäſswandungen anschlieſsende Scheibe nach der Oeffnung hin bewegt, so wird die Luft zum Ausfluſs gebracht, und zwar dadurch, daſs der innere mit Luft erfüllte Raum vermindert, dieselbe Luftmenge also auf einen geringeren Raum eingeengt, d. h. verdichtet wird, wonach sie von der vor der Oeffnung befindlichen äuſseren Luft einen geringeren Gegendruck empfängt, als ihre einzelnen Theile und nach allen Richtungen auf einander selbst ausüben und mit einer diesem Ueberschuſs an Druck entsprechenden Geschwindigkeit ausflieſst.

2. Die Erscheinungen beim Ausfluſs der Luft sind mit denen beim Ausfluſs der tropfbaren Flüssigkeiten einerlei:

Luft in einem mit Oeffnung versehenen Gefäſs, welche die Dichtigkeit der äuſseren Luft hat, verhält sich wie das Oberwasser vor dem geöffneten Schütz des Oberthors (pag. 228 u. Fig. 132), wenn die Schleusenkammer gefüllt ist; es ist kein Ausfluſs möglich, weil Gleichgewicht da ist.

Wasser, welches aus einer in dem freistehenden Boden befindlichen Oeffnung, ohne also in einer anderen Flüssigkeit ein Hinderniſs zu finden, ausflieſst, verhält sich wie eingeschlossene Luft, wenn sie aus einer Oeffnung in den absolut leeren Raum ausströmt.

Strömt dichte Luft aus einem Raum in einen anderen, mit dünnerer Luft gefüllten Raum, so hat man denselben Fall, wenn Wasser aus einem Gefäſs in ein anderes mit ihm communicirendes Gefäſs so lange aufsteigt, bis die Wasserspiegel beider Gefäſse in der Wage stehen.

Aus dem Gesagten geht hervor, daſs für den Ausfluſs der Luft deren Dichtigkeit, also nach dem Art. Aërodynamische Gesetze, No. 2 und 5, deren Elasticität, dieselbe Bedeutung hat, wie für den Ausfluſs tropfbarer Flüssigkeiten deren Druckhöhe.

3. Das Maaſs der Elasticität von Gasen besteht in einer tropfbaren Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, deren Gewicht der Spannung oder der Druckkraft des Gases das Gleichgewicht hält. Befindet sich ein Knierohr mit dem kurzen offenen Schenkel $A$ in dem zu messenden Gase, mit dem langen offenen Schenkel $B$ in einem luftleeren Raum, oder ist dieser lange Schenkel oben geschlossen und der Raum darin über der Flüssigkeit luftleer, so erhebt sich die in dem Rohr befindliche Flüssigkeit in dem langen Schenkel um so mehr, je gröſser die Spannung des Gases ist.

Fig. 133.




Es sei $ab = h$ die Höhe, um welche die Flüssigkeit sich erhebt, das Gewicht deren Kubik-Einheit $= q$, der Querschnitt des in $A$ offenen Flüssigkeitsspiegels $= a$, so ist nach hydrostatischen Gesetzen das Gewicht, welches dem auf eine Fläche $= a$ wirkenden Druck des Gases das Gleichgewicht hält, $= ahq$, wobei der Querschnitt des Schenk. $B$ gleichgültig ist; also der Druck des Gases auf die Flächen-Einheit $= hq$. Ist der Querschnitt des Spiegels $= na$, so ist der Druck des Gases der Flüssigkeitssäule entgegen, das $n$fache des vorigen Drucks $= nahq$, aber auf eine $n$fache Fläche $na$ und wieder der Druck des Gases auf die Flächen-Einheit $= hq$, die Höhe $h$ also von dem Querschnitt des offenen Spiegels in $A$ unabhängig, und $h$ in Vereinigung mit $q$ das Maaſs der Elasticität des Gases.

Hat die Kubik-Einheit der Flüssigkeit das Gewicht $mq$, so stellt sie sich bei derselben Elasticität des Gases auf eine Höhe $h'$, daſs $h'mq = hq$, also auf die Höhe $h' = \frac{h}{m}$ und die messenden Höhen der Flüssigkeiten stehen mit deren specifischen Gewichten in umgekehrtem Verhältniſs. Ist z. B. die Flüssigkeit Wasser, dessen Höhe $h = 14$ Zoll, so würde Quecksilber im Rohr nur etwa 1 Zoll hoch stehen, weil Queck-

silber ungefähr 14 mal schwerer als Wasser ist.

Das so eben beschriebene Mefs-Instrument heifst **Manometer**, die messende Flüssigkeit die **manometrische Flüssigkeit**, für welche man, um möglichst kurze Röhren anwenden zu können, in der Regel Quecksilber nimmt. Mündet der offene Schenkel $B$ in einen mit dünnerem Gase gefüllten Raum, so giebt die Höhe $h$ die Differenz der Druckwirkungen beider Gase auf die Flächen-Einheit.

Das Manometer, welches den Druck der über der Erdoberfläche befindlichen atmosphärischen Luft in einer Quecksilbersäule mifst und angiebt, wird **Barometer** genannt.

4. Um beim Ausflufs von Luft die Berechnung über die Geschwindigkeit und die Menge der ausströmenden Luft anstellen zu können, ist der Art.: **Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten**, Satz 3, pag. 215, in Erwägung zu nehmen.

Steht die Flüssigkeit über der Ausflufsöffnung $h$ Fufs hoch, so ist deren Ausflufsgeschwindigkeit $= 2\sqrt{gh}$, und dieselbe Geschwindigkeit erhält man durch ein Gewicht $p$, welches dem Gewicht derselben Flüssigkeit von der Höhe $h$ gleich ist. In dem Satz 3, pag. 215, ist die dem Gewicht $= 5$ Pfund entsprechende Wasserhöhe $\frac{1}{12}$ Fufs gefunden worden; für Weingeist wäre die Höhe und die Geschwindigkeit gröfser, für Quecksilber kleiner geworden.

Ein prismatisches Gefäfs habe 10□″ Querschnitt, in demselben stehe eine Flüssigkeit 1 Fufs hoch, und man lege auf den Flüssigkeitsspiegel ein Gewicht von 100 Pfund.

Ist nun die Flüssigkeit Quecksilber, dessen specifisches Gewicht $= 13{,}6$, so hat 1 cub.′ desselben ein Gewicht von $13{,}6 \times 66 = 897{,}6$ Pfund und 100 Pfund Quecksilber sind $\frac{100}{897{,}6}$ cub.′ Bezeichnet man nun die dem Gewicht von 100 Pfund entsprechende Höhe des Quecksilbers in dem Gefäfs mit $h$, so ist

$$\frac{10}{144} \cdot h = \frac{100}{897{,}6}$$

woraus $h = 1{,}6$ Fufs

und die Ausflufsgeschwindigkeit des Quecksilbers aus einer im Gefäfsboden befindlichen Oeffnung $= 2\sqrt{g \cdot 2{,}6}$

Ist die Flüssigkeit Wasser, so wiegt 1 cub.′ derselben 66 Pfund, folglich für 100 Pfund Wasser $\frac{100}{66}$ cub.′ $= \frac{10}{144} \cdot h$ cub.′

woraus $h = 21{,}9$

und die Ausflufsgeschwindigkeit des Wassers $= 2\sqrt{g \cdot 22{,}9}$

Durch ein und dasselbe aufgelegte Gewicht werden also verschiedene Ausflufsgeschwindigkeiten von tropfbaren Flüssigkeiten hervorgebracht, wenn diese verschiedenen specifischen Gewichten angehören, **und zwar verhalten sich deren Ausflufs-Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus deren specifischen Gewichten.**

Dasselbe Verhältnifs hat man für den Ausflufs luftförmiger Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten.

5. Die No. 3 aufgeführte Manometersäule mufs als das Gewicht betrachtet werden, welches nach No. 4 auf eine Flüssigkeit gelegt und in eine gleich schwere Säule von derselben Flüssigkeit umgedrückt, deren Höhe als Druckhöhe ergiebt.

Ist das Quecksilber $n$ mal schwerer als das Gas und ist die manometrische Druckhöhe $h$, so ist die Geschwindigkeitshöhe des Gases $= nh$, und dessen Ausflufsgeschwindigkeit $= 2\sqrt{g \cdot nh}$. Nach dem Art. **Atmosphäre**, No. 7, pag. 162, ist das Quecksilber 10468 mal schwerer als trockene atmosphärische Luft bei 0° C. Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand, und deren Geschwindigkeitshöhe, wenn die Luft in einen absolut leeren Raum strömt, $= 7955{,}68$ Meter $= 25348$ preufs. Fufs.

6. Bei der atmosphärischen Luft verhalten sich die Elasticitäten oder Druckwirkungen wie deren Dichtigkeiten, also wie deren specifische Gewichte oder deren absolute Gewichte für die Kubik-Einheit. Es sei nun für die atm. Luft bei irgend einer Dichtigkeit der Manometerstand $= b$, für die Kubik-Einheit deren Gewicht $= q$, das Gewicht des Quecksilbers $= Q$, die Geschwindigkeitshöhe der Luft also $\frac{Q}{q} \cdot b$; es sei ferner für Luft von anderer Dichtigkeit deren Manometerstand $b'$, deren Gewicht $= q'$, also deren Geschwindigkeitshöhe $= \frac{Q}{q'} \cdot b'$

$$\text{so hat man } q : q' = b : b'$$

$$\text{woraus } q' = q \cdot \frac{b'}{b}$$

also die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{Q}{q'} b' = \frac{Q}{q} \cdot \frac{b}{b'} \cdot b' = \frac{Q}{q} b$$

Es ist mithin bei der atmosphärischen Luft und überhaupt **bei einerlei Luftart die Geschwindigkeitshöhe von**

der Dichtigkeit der Luftart unabhängig und constant.

Wenn also atmosphärische Luft aus einem verschlossenen Gefäfs in einen unbegrenzt leeren Raum strömt, so behält sie die nach No. 5 ermittelte Geschwindigkeitshöhe 25348 Fufs, wenngleich sie mit jedem folgenden Zeitaugenblick dünner wird.

7. Hat ein Gas gegen atm. Luft (Gewicht = 1 gesetzt) das spec. Gewicht $q$, so ist nach No. 6 beim Manometerstand $b$ dessen Gewicht einer Kubik-Einheit $= q q$ und die Geschwindigkeitshöhe des Gases bei jeder beliebigen Dichtigkeit $= \frac{Q}{qq} \cdot b$

**Beispiel.** Nach Schnbarth's Tabellen, pag. 29, ist das spec. Gew. des Wasserstoffgases = 0,0688; das spec. Gew. der Luft von 0° C. gegen Wasser ist 0,001299 also 1 cub.' Luft von 0° = 66 · 0,001299 = 0,085734 Pfund.

Der Barometerstand für dieselbe 0,76 Meter = 0,76 × 3,1862 = 2,4215 pr. Fufs.

Das spec. Gew. des Quecksilbers = 13,598

1 cub.' Quecksilber = 13,598 · 66 = 897,468 Pfund.

1 cub.' Wasserstoffgas = 0,0688 × 0,085734 = 0,0058985 Pfund

hieraus die Geschwindigkeitshöhe des Wasserstoffgases

$$= \frac{897,468}{0,0058985} \cdot 2,4215 = 368436 \text{ pr. Fufs.}$$

Nach No. 5 ist $\frac{Q}{q} \cdot b = 25348$ Fufs,

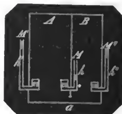
also $\frac{Q}{qq} \cdot b = \frac{25348}{0,0688} = 368430$ Fufs;

die geringe Verschiedenheit beider Resultate liegt in der Vernachlässigung der letzten Decimalen bei der ersten Rechnung.

8. Fliefst aber Luft von einer bestimmten Dichtigkeit $D$ aus einem Raum $A$ in einen Raum $B$, der mit dünnerer Luft derselben Art, also mit Luft von geringerer Dichtigkeit $d$ angefüllt ist, so findet die erstere Luft vor der Ausflufsöffnung $a$ in der zweiten Luft einen Gegendruck, und es geschieht die Ausströmung, als wenn Luft von der Dichtigkeit $(D-d)$ aus $A$ in einen luftleeren Raum strömte.

Die Druckkraft der Luft in $A$ zeige sich an dem Manometer $M'$ in der Quecksilberhöhe $h'$, die der Luft in $B$ an dem Manometer $M''$ in der Quecksilberhöhe $h''$, indem die langen Schenkel oben verschlossen und über $h'$ und $h''$ luftleer sind, so wird ein drittes, in beiden Schenkeln oben offenes, in der Wandung zwischen beiden Räumen $A$ und $B$ angebrachtes Manometer $M$ eine Höhe $h = h' - h''$ als Ueberschufs des Drucks zwischen beiden Luftmengen angeben, und der auf den Ausflufs wirkende manometrische Druck sein.

Fig. 134.




Dieser Druck $h$ Quecksilber als Gewicht (s. No. 5) ist demnächst in eine Säule der dichteren ausfliefsenden Luft zu verwandeln, um die entsprechende Geschwindigkeitshöhe $H$ zu erhalten.

Setzt man, wie in No. 6, für die Kubik-Einheit das Gewicht des Quecksilbers = $Q$, das Gewicht der atm. Luft bei dem Barometerstand $b = q$; das Gewicht der unter dem Manometerdruck $h$ ausströmenden atm. Luft $= q'$, so hat man nach No. 6 deren Geschwindigkeitshöhe $H = \frac{Q}{q'} h$

Die Dichtigkeit $D$ der ausströmenden Luft wird gemessen durch die Quecksilberhöhe $h'$, es ist mithin $b : h' = q : q'$

woraus $q' = \frac{h'}{b} q$

$$\text{daher } H = \frac{Qb}{q} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{Qb}{q} \cdot \frac{h' - h''}{h'}$$
$$= \frac{Qb}{q}\left(1 - \frac{h''}{h'}\right)$$

nach No. 5 ist $\frac{Q}{q} b = 25348$ Fufs

mithin $H = 25348 \cdot \left(1 - \frac{h''}{h'}\right)$

und die Ausflufsgeschwindigkeit

$$C = 2\sqrt{g \cdot 25348\left(1 - \frac{h''}{h'}\right)}$$

Sind beide Räume $A$, $B$ unbegrenzt, so bleiben $h'$, $h''$ und $H$ constant, der Ausflufs geschieht also fortdauernd gleichförmig.

Ist $B$ unbegrenzt (z. B. unsere Atmosphäre), $A$ begrenzt, so bleibt $h''$ constant, $h'$ vermindert sich mit jedem folgenden Zeittheilchen, bis es $= h''$ wird, $H$ und $C$ nehmen gleichmäfsig ab, bis sie = Null werden.

Ist $A$ unbegrenzt, $B$ begrenzt, so ist

$h'$ constant, $h''$ wird immer gröfser, bis es $= h'$ wird; $H$ und $C$ werden immer kleiner und zuletzt = Null.

Sind $A$ und $B$ begrenzt, so nimmt $h'$ fortdauernd ab, $h''$ fortdauernd zu, bis beide gleich grofs werden; $H$ und $C$ nehmen ab, bis sie = Null werden.

9. Bei dem bisher Vorgetragenen ist der Ausflufs von Luft dem von tropfbaren Flüssigkeiten analog behandelt, also unter der Voraussetzung, dafs die Luftsäulen ebenfalls wie die der tropfbaren Flüssigkeiten von gleichförmiger Dichtigkeit sind. Dies ist aber nicht der Fall: In jedem Gefäfs drückt gleich dichte Luft auf jede Flächen-Einheit der Wandung gleich stark, allein die oberste Luftschicht drückt die zunächst untere, diese wieder die unter ihr befindliche u. s. f. Demnach ist die oberste Schicht am dünnsten, die unterste am dichtesten, und die Seitenwände werden oben am wenigsten, unten am stärksten gedrückt.

Bei der Atmosphäre (s. d. No. 2) ist auf 11,5 Meter Höhe der Druck schon um 1 Millimeter Quecksilbersäule geringer, bei 83 Fufs beträgt die Druckverminderung schon eine Linie Quecksilberhöhe. Bei sehr hohen Gefäfsen ist also die Dichtigkeit an der Decke geringer als am Boden, und das Manometer, welches die Elasticität oder die Druckwirkung mifst, ist mit dem offenen Quecksilberspiegel in die Waage der Ausflufsöffnung zu stellen; dann erhält man in der manometrischen Höhe das dort befindliche, die als gleichförmige Flüssigkeit zu denkende Luft belastende Gewicht, welches nun in die ihr gleichförmige gleichdichte Luftsäule von der Höhe $\frac{Q}{q}h$ verwandelt wird.

10. Multiplicirt man die Ausflufsgeschwindigkeit $C$ mit der Ausflufsöffnung $a$, so erhält man die per Secunde ausströmende Luftmenge $M = ca$ von der Dichtigkeit der ausströmenden Luft. Aendert sich die Dichtigkeit der Luft während der Zeit des Ausströmens, so ist auch die ausfliefsende Luftmenge $M$ in jedem Zeittheilchen eine andere.

Jede Luftmenge $M$ besteht aus einer Anzahl von Luft-Elementen, und da diese nicht anzugeben ist, so kann die Angabe von $M$ immer nur vergleichungsweise geschehen. Jedes $M$ nämlich besteht aus einem Volumen $v$ und einer Dichtigkeit $d$; das Volumen $v$ bei der Ausströmung ist das obige Product $ca$, nämlich Ausflufsgeschwindigkeit mal Ausflufsquerschnitt, die Dichtigkeit $d$ aber kann nur mit Luft derselben Art von einer als Einheit anzunehmenden Dichtigkeit $D = 1$ verglichen werden.

In der Regel nimmt man für atm. Luft als Einheit die mittlere Dichtigkeit ($D$) der auf der Erdoberfläche befindlichen Luftschicht, nämlich der trockenen Luft, welche bei 0° C. einer Quecksilbersäule von $b = 0{,}76$ Meter entspricht. Da nun die Dichtigkeiten von Luft sich direct wie deren Elasticitäten, also auch wie deren manometrischen Quecksilbersäulen verhalten, so hat Luft von $h$ Meter Quecksilberdruck $\frac{h}{b}D = \frac{h}{0{,}76}D$ Dichtigkeit, oder $D = 1$ gesetzt, die Dichtigkeit $d$

$$= \frac{h}{b} = \frac{h}{0{,}76}$$

Das No. 7 als Beispiel aufgeführte Wasserstoffgas hat das spec. Gew. 0,0688 gegen atm. Luft, d. h. bei einem Druck von $b = 0{,}76$ Meter Quecksilber beträgt dessen Gewicht nur $\frac{688}{10000}$ der untern atm. Luftschicht. Die Dichtigkeiten dieses Gases sind also mit der der atm. Luft nicht zu vergleichen, und es mufs bei demselben die Dichtigkeit $D$ bei $b$ Manometerdruck als Einheit angenommen werden. Dasselbe findet bei allen übrigen verschiedenen Gasen statt.

11. Die bisher betrachteten Geschwindigkeitshöhen, Geschwindigkeiten, Dichtigkeiten und Luftmengen gelten nur für Luftarten von 0° Celsius Temperatur. In dem Art. Ausdehnung der Gase, pag. 213, ist erklärt, dafs durch die Wärme die Gase ganz gleichförmig ausgedehnt werden, und dafs dieselbe mit jedem höheren Grad Celsius 0,00365 oder ziemlich nahe $\frac{1}{274}$ beträgt, so dafs eine Luftart von $t°$ C. Temperatur ein Volumen von $(1 + 0{,}00365\,t)$ mal derselben Luftart von 0° C. hat.

Mit der Vergröfserung des Volumens wird das Gas um so viel dünner, also um so viel leichter als die manometrische Flüssigkeit; ist mithin $H$ die Geschwindigkeitshöhe des Gases bei 0° C., so ist sie bei $t°$ C. $= (1 + 0{,}00365\,t)\,H$

12. Es sollen nun die bis jetzt ermittelten Erkenntnisse zusammengefafst werden.

*A.* Atmosphärische Luft von jeder beliebigen Dichtigkeit, aber von 0° C. Temperatur hat (s. No. 5 u. 6) beim Ausflufs in einen absolut leeren Raum die Geschwindigkeitshöhe $H = 25348$ Fufs; mithin die Geschwindigkeit $C = 2\sqrt{25348 \cdot g} = 2\sqrt{25348 \cdot 15\tfrac{5}{8}}$ $= 1258{,}67$ preufs. Fufs.

*B.* Dieselbe bei $t^\circ$ C. Temperatur hat die Geschwindigkeitshöhe $(1+0{,}00365\,t)\,H$ also die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{1+0{,}00365\cdot t}$$

*C.* Gas von dem specifischen Gewicht $\varphi$ (zu atm. Luft $=1$) von jeder beliebigen Dichtigkeit, aber von 0° C. Temperatur (s. No. 7) beim Ausflufs in einen absolut leeren Raum die Geschwindigkeits-Höhe $H=\frac{1}{\varphi}\,25348$ Fufs, und die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}}$$

*D.* Dasselbe bei $t^\circ$ C. Temp. die Geschwindigkeitshöhe

$$25348\,\frac{1+0{,}00365\cdot t}{\varphi}$$

die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{\frac{1+0{,}00365\cdot t}{\varphi}}$$

*E.* Atmosphärische Luft von der manometrischen Quecksilberspannung $h'$, die in einen, mit atm. Luft von der Spannung $h''$ angefüllten Raum strömt, hat, wenn die dichtere ausströmende Luft von 0° C. Temperatur ist, die Geschwindigkeitshöhe

$$25348\cdot\left(1-\frac{h''}{h'}\right)$$

und die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{1-\frac{h''}{h'}}$$

*F.* Hat die dichtere ausströmende Luft (ad 5) $t^\circ$ C. Temperatur, so ist die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{\left(1-\frac{h''}{h'}\right)(1+0{,}00365\cdot t)}$$

*G.* Gas statt atmosphärischer Luft giebt in dem Fall ad 5 die Geschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{h''}{h'}\right)}$$

in dem Fall 6

$$C=1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{h''}{h'}\right)(1+0{,}00365\cdot t}$$

*H.* Diese Geschwindigkeiten in jedem besondern Fall mit der Ausflufsöffnung multiplicirt, geben die Luftmengen in dem Sinne, wie sie in No. 10 erklärt worden sind.

13. Die No. 12 gedachten Geschwindigkeiten und Luftmengen sind wie beim Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten (s. pag. 215, No. 3) die hypothetischen; die wirklichen Geschwindigkeiten und Luftmengen hangen von der Beschaffenheit der Ausflufsöffnungen ab, und auch bei Luft giebt es einen Contractionscoefficienten $\alpha$ als aliquoten Theil von $2\sqrt{g}$; oder hier vielmehr, wo die Höhe der Atmosphäre in Verbindung mit $2\sqrt{g}$ zu einer bestimmten Zahl zusammengefafst ist, $\alpha$ als Bruchtheil der hypothetischen Geschwindigkeit. Nach d'Aubuisson's Versuchen (s. dessen Hydraulik, übersetzt, §. 436, pag. 519) ist

1) für Oeffnungen in dünnen Wänden . . . . . . . . . . . $\alpha=0{,}65$
2) für cylindrische Ansatzröhren . . . . . . . . . . . . . . $\alpha=0{,}93$
3) für konische Ansatzröhren vom Neigungswink. $6^\circ\,26'-\alpha=0{,}938$
$11^\circ\,24'-\alpha=0{,}947$
$18^\circ\,54'-\alpha=0{,}917$
$28^\circ\;\,4'-\alpha=0{,}880$
$53^\circ\;\,8'-\alpha=0{,}798$

14. Bestimmung der Zeit $T$, in welcher ein absolut leerer Raum vom Volumen $V$ mit äufserer Luft von constanter Dichtigkeit $D$ durch eine Einflufsöffnung $a$ bis zu derselben Dichtigkeit $D$ ausgefüllt wird.

Nimmt man der Einfachheit wegen vorläufig atmosphärische Luft von 0° C., so ist nach No. 12, *A*, bei jeder Dichtigkeit $D$ die Anfangsgeschwindigkeit $=1258{,}67$ Fufs $=C$
die Endgeschwindigkeit $=$ Null
und nach Verlauf der Zeit $t$, wo die Dichtigkeit der inneren Luft bereits $d$ ist, die Geschwindigkeit

$$c=C\cdot\sqrt{1-\frac{d}{D}}$$

oder wenn die Dichtigkeiten durch manometrische Höhen $H$ und $h$ ausgedrückt werden

$$c=C\cdot\sqrt{1-\frac{h}{H}}$$

Der Raum $V$ ist in diesem Augenblick mit der Luftmenge $V\cdot d$ ausgefüllt, in der folgenden, sehr kleinen Zeit $\triangle t$ mit der Luftmenge
$V(d+\triangle d)$, und deren Vermehrung $=V\triangle d$

Während der sehr kleinen Zeit $\triangle t$ strömt aber hinzu die Luftmenge $a\cdot D\cdot c\cdot\triangle t$, mithin ist

$$aDc\triangle t=V\triangle d$$

oder

$$aDC\sqrt{1-\frac{d}{D}}\cdot\triangle t=V\cdot\triangle d$$

woraus für die Grenzwerthe

$$\partial t=\frac{V\,\partial d}{aDC\sqrt{1-\frac{d}{D}}}$$

Sondert man, um integriren zu können,

die constanten Gröfsen von den veränderlichen, so hat man

$$\partial t = \frac{V}{aC\sqrt{D}} \cdot \frac{\partial d}{\sqrt{D-d}}$$

mithin

$$t = \frac{V}{aC\sqrt{D}} \int \frac{\partial d}{\sqrt{D-d}} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{2V}{aC\sqrt{D}} \cdot \sqrt{D-d} + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $t=0$ auch $d=0$, indem dann noch $V$ vollkommen luftleer ist, daher

$$0 = -\frac{2V}{aC\sqrt{D}} \sqrt{D} + \text{Const.}$$

also vollständig

$$t = \frac{2V}{aC\sqrt{D}} \left[\sqrt{D} - \sqrt{D-d}\right]$$

für $d=D$ ist die vollständige Füllung des Gefäfses geschehen, daher die Zeit der Anfüllung

$$T = \frac{2V\sqrt{D}}{aC\sqrt{D}} = 2 \cdot \frac{V}{aC}$$

wo $C = 1258{,}67$ Fufs ist.

Die Zeit der Füllung eines luftleeren Gefäfses mit Luft ist also von der Dichtigkeit der einströmenden Luft unabhängig.

15. Die Formel für die Zeit der Füllung eines Gefäfses mit Wasser aus einem Nebengefäfs mit gleich hoch bleibendem Wasserspiegel (pag. 228)

$$t = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

läfst sich auch schreiben

$$t = \frac{2Ah}{\alpha a\sqrt{h}}$$

Da hier $Ah$ der Inhalt $V$ und $\alpha a\sqrt{h}$ die Anfangsgeschwindigkeit $C$ ist, so sind die Zeiten für die Füllung eines leeren Gefäfses mit Wasser oder mit Luft einander gleich.

16. Hat in No. 14 die atmosphärische Luft die Temperatur $t^0$ C., so ist die Anfangsgeschwind. $1258{,}67 \cdot (1 + 0{,}00365\,t)$ also auch

$$T = \frac{2 \cdot V}{(1 + 0{,}00365\,t)a \cdot C}$$

$$= \frac{2V}{(1 + 0{,}00365\,t)1258{,}67 \cdot a}$$

Beim Einströmen von Gas, dessen spec. Gew. gegen Luft $\varphi$ ist, hat man die Anfangsgeschw. $= 1258{,}67 \sqrt{\frac{1}{\varphi}} = C\sqrt{\frac{1}{\varphi}}$

daher

$$T = \frac{2 \cdot V\sqrt{\varphi}}{aC}$$

und hat das Gas zugleich $t^0$ C. Temperatur, so ist

$$T = \frac{2V\sqrt{\varphi}}{(1 + 0{,}00365 \cdot t)\,aC}$$

17. Bestimmung der Zeit, in welcher aus einem Gefäfs vom Volumen $V$ die darin befindliche Luft von der Dichtigkeit $D$ aus einer Oeffnung vom Querschnitt $a$ in den absolut leeren Raum ausfliefst.

Nach No. 12, $A$, ist die Ausflufsgeschwindigkeit während der ganzen Zeit des Ausströmens constant $= 1258{,}67$ Fufs $= C$, wenn $V$ mit atm. Luft von 0° C. Temp. angefüllt ist; die Dichtigkeit wird mit jedem folgenden Augenblick geringer, zuletzt unendlich gering, und man ersieht, dafs die Zeit $T$ zur vollständigen Entleerung des Raumes $V$ unendlich grofs sein mufs. Es stimmt dieser Fall mit dem beim Ausflufs des Wassers, No. 5, pag. 223, wo die Geschwindigkeit immer kleiner und zuletzt unendlich klein wird.

Demnach kann man auch nur die Zeit $t$ bestimmen, in welcher die Dichtigkeit $D$ der in $V$ befindlichen Luft auf die Dichtigkeit $d$ vermindert wird.

Zu Anfang ist im Gefäfs die Luftmenge $V \cdot D$

nach verflossener Zeit $t$ die Luftmenge $V \cdot d$

Mit der Zunahme von $t$ um die sehr kleine Zeit $\triangle t$ ändert sich $d$ in $d - \triangle d$, also in $\triangle t$ um $- \triangle d$, und die Luftmenge um $- V\triangle d$

In derselben kleinen Zeit $\triangle t$ aber fliefst die Luftmenge aus $adC \cdot \triangle t$, daher hat man für die Grenzwerthe

$$adC\,\partial t = -V\partial d$$

woraus $\partial t = -\frac{V\partial d}{adC} = \frac{V}{aC} \cdot \left(-\frac{\partial d}{d}\right)$

und $t = -\frac{V}{aC} \log n\, d + \text{Const.}$

Zur Bestimmung der Const. hat man für $t=0$, $d=D$, mithin

$$0 = -\frac{V}{aC} \ln D + \text{Const.}$$

woraus $C = \frac{V}{aC} \ln D$

mithin vollständig

$$t = \frac{V}{aC} \log n \frac{D}{d}$$

für trockene atm. Luft von 0° hat man

$$t = \frac{V}{1258{,}67\,a} \ln \frac{D}{d}$$

für Luft von der Temperatur $T$

$$t = \frac{V}{1258{,}67 \cdot a\sqrt{1 + 0{,}00365\,T}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

für Gas von dem spec. Gew. $\varphi$ und der Temperatur $T$

$$t = \frac{V\sqrt{\varphi}}{1258{,}67\, a\sqrt{1+0{,}00365\, T}} \cdot ln \frac{D}{d}$$

18. Bestimmung der Zeit $T$, in welcher in einem Gefäſs vom Volumen $V$ eingeschlossene Luft von höherer Dichtigkeit $D$ durch eine Oeffnung vom Querschnitt $a$ in die atm. Luft sich entleert.

Die äuſsere Luft habe die constant bleibende Dichtigkeit $d$, so ist nach No. 12, $E$, wenn die innere Luft die Temperatur $0^0$ hat, und wenn man das Verhältniſs der manometrischen Quecksilberhöhen durch das ihm gleiche Verhältniſs der Dichtigkeiten ausdrückt, die Anfangsgeschwindigkeit

$$C = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{d}{D}}$$

Ist in Folge des Ausströmens nach Verlauf der Zeit $t$ die Dichtigkeit $D$ auf die Dichtigkeit $D'$ gesunken, dann ist die Geschwindigkeit

$$c = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{d}{D'}}$$

$$\text{also } c : C = \sqrt{1 - \frac{d}{D'}} : \sqrt{1 - \frac{d}{D}}$$

$$\text{und } c = C \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{d}{D'}}{1 - \frac{d}{D}}} = C \sqrt{\frac{(D'-d)D}{D'(D-d)}}$$

Wie in No. 17 ist nun die in dem Differenzial der Zeit $t$ ausströmende Luftmenge

$$= a \cdot D' C \sqrt{\frac{(D'-d)D}{D'(D-d)}}\, \partial t = - V \cdot \partial D'$$

$$\text{woraus } \partial t = - \frac{V \partial D'}{a D' C} \sqrt{\frac{D'(D-d)}{(D'-d)D}}$$

und des Integrirens wegen die unveränderlichen Gröſsen von den veränderlichen getrennt:

$$\partial t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}}\, \frac{\partial D'}{\sqrt{D'(D'-d)}}$$

$$\text{mithin } t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}} \int \frac{\partial D'}{\sqrt{D'(D'-d)}} + \text{Const.}$$

Schreibt man in $\int \frac{\partial D'}{\sqrt{D'(D'-d)}}$

$x$ für $D'$ und $b$ für $d$, also $\int \frac{\partial x}{\sqrt{-bx + x^2}}$

so findet man das Integral aus der allgemeinen Integralformel:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, logn \left[ \frac{b + 2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a + bx + cx^2} \right]$$

Wenn man $a=0$; $b=-b$ und $c=1$ setzt:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-bx + x^2}} = logn \left[ \frac{-b + 2x}{2} + \sqrt{-bx + x^2} \right]$$

$$\text{mithin } \int \frac{\partial D'}{\sqrt{D'(D'-d)}} = logn \left[ -\frac{d}{2} + D' + \sqrt{D'(D'-d)} \right] + \text{Const.}$$

$$\text{also } t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}}\, logn \left[ D' - \frac{d}{2} + \sqrt{D'(D'-d)} \right] + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $t=0$; $D'=D$

$$\text{daher Const} = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}}\, logn \left[ D - \frac{d}{2} + \sqrt{D(D-d)} \right]$$

und vollständig

$$t = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}}\, logn \frac{D - \frac{d}{2} + \sqrt{D(D-d)}}{D' - \frac{d}{2} + \sqrt{D'(D'-d)}}$$

Die Ausströmung der Luft ist vollendet, wenn $D'=d$ wird,

$$\text{daher } T = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{D}}\, logn \frac{D - \frac{d}{2} + \sqrt{D(D-d)}}{\frac{1}{2} d}$$

wo $C$ die oben bestimmte Anfangsgeschwindigkeit ist.

19. Bestimmung der Zeit, in welcher Luft von verschiedenen Dichtigkeiten $D$ und $d$, die in Behältern von den Volumen $V$ und $v$ eingeschlossen, durch eine Oeffnung vom Querschnitt $a$ sich in's Gleichgewicht setzen.

Die Anfangsgeschwindigkeit ist wie No. 18

$$C = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{d}{D}}$$

und wenn nach Verlauf der Zeit $t$ die Dichtigkeit $D$ in $\Delta$ vermindert und die Dichtigkeit $d$ in $\delta$ vermehrt worden, die Geschwindigkeit

$$c = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{\delta}{\Delta}} = C \sqrt{\frac{1 - \frac{\delta}{\Delta}}{1 - \frac{d}{D}}}$$

$$= C \sqrt{\frac{(\Delta - \delta) D}{\Delta (D - d)}}$$

In diesem Ausdruck sind zwei veränderliche Gröfsen $\Delta$ und $\delta$; es ist aber offenbar, da die Luftmenge in beiden Gefäfsen zusammengenommen constant bleibt,

$$VD + vd = V\Delta + v\delta$$

woraus $\delta = \dfrac{V(D - \Delta) + vd}{v}$

Diesen Werth von $\delta$ in den Ausdruck für $c$ gesetzt, giebt

$$c = C \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD + vd)}{\Delta} \cdot \frac{D}{v(D-d)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD+vd)}{v\Delta}}$$

$$= 1258{,}67 \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD+vd)}{v\Delta}}$$

die in der folgenden sehr kleinen Zeit $\partial t$ ausfliefsende Luftmenge ist nun wie No. 17

$$a \cdot c \cdot \Delta \cdot \partial t = - V \partial \Delta$$

woraus $\partial t = - \dfrac{V \partial \Delta}{ac\Delta}$

Schreibt man für $c$ seinen Werth, und trennt das Veränderliche von dem Unveränderlichen, so hat man

$$\partial t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D}} \times \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}}$$

folglich

$$t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D}} \cdot \int \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}} + \text{Const.}$$

Aus der No. 18 angegebenen allgemeinen Integralformel erhält man, wenn man $a = 0$, $b = -b$ setzt und $c$ beibehält:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{-b + 2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{-bx + cx^2} \right)$$

also $(V + v) = c$ und $(VD + vd) = b$ gesetzt:

$$\int \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V+v}} \ln \left[ \frac{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta} \right]$$

mithin ist

$$t = - \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}} \ln \left[ \frac{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta} \right] + \text{Const.}$$

Da nun für $t = 0$, $\Delta = D$ wird, also

$$\text{Const.} = + \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}} \ln \left[ \frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D} \right]$$

so ist

$$t = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}} \ln \left[ \frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D}}{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}} \right]$$

für $t = T$ ist $\Delta = \dfrac{VD + vd}{V + v}$

daher

$$T = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}} \ln \left[ \frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D}}{VD+vd} \right]$$

Ist $V = v$, so hat man

$$T = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{2D}} \ln \frac{3D - d + 2\sqrt{2D(D-d)}}{D+d}$$

Da $C = 1258{,}67 \sqrt{\frac{D-d}{D}}$, so hat man

$$T = \frac{V}{1780 \cdot a} \ln \frac{3D - d + 2\sqrt{2D(D-d)}}{D+d}$$

**Ausflufsgeschwindigkeit** ist die Geschwindigkeit ausfliefsender, also flüssiger Körper innerhalb der Oeffnung, durch welche sie ausfliefsen. Bei tropfbaren Körpern ist die A. abhängig von der Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Ausflufsöffnung, das Gesetz darüber s. den Art. Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten, pag. 215.

Ist die Ausflufsöffnung nicht horizontal, so hat der Spiegel verschiedene Höhen über derselben, die kleinste Höhe bis zur oberen, die gröfste bis zur unteren Kante der Oeffnung, die A. sind verschieden grofs, und man hat eine mittlere A. zu finden; das Nähere hierüber s. pag. 217, No. 1. Die A. hängt ferner ab von dem Grade der Flüssigkeit des ausfliefsenden Körpers, von der Form der Ausflufsöffnung, den Reibungswiderständen und der Adhäsion, die A. ist also immer geringer, als sie ohne die letztgedachten Umstände sein würde. Jene A. heifst die hypothetische A., diese die wirkliche A., das Nähere darüber s. pag. 218, No. 4 n. 5.

Bei luftförmigen Körpern ist die A. abhängig von deren Dichtigkeit und specifischem Gewicht; wie aus beiden die ihnen entsprechende Geschwindigkeitshöhe und aus dieser die A. gefunden wird, s. den Art. Ausflufs der Luft, No. 1 bis 8.

**Ausflufsmenge** ist das Volumen eines flüssigen Körpers, welches in einer Zeit-Einheit aus einer Oeffnung ausfliefst, und man erhält dieselbe als Product aus der auf dieselbe Zeit-Einheit bezogenen Ausflufsgeschwindigkeit mit dem Querschnitt der Ausflufsöffnung. Ein Näheres darüber s. von pag. 217, No. 2, ab bis zum Schlufs des Art. Bei luftförmigen Körpern ist zugleich auf die Dichtigkeit der ausfliefsenden Luftart zu sehen, und sie mufs auf die Luft derselben Art von der Dichtigkeit = 1 reducirt werden. S. das Nähere pag. 233, No. 10.

**Ausflufsöffnung.** Die Oeffnung, durch welche Flüssigkeiten aus einem Raum in den anderen ausfliefsen.

**Ausgehender Winkel** (hohler W.), ein W., der kleiner ist, als 2 rechte W.

**Ausmessung.** Die Bestimmung oder Ermittelung von Dimensionen durch Mefsinstrumente.

**Auspeilen.** Die Ermittelung der Tiefen möglichst vieler Punkte einer mit Wasser bedeckten Erdfläche bis zum Wasserspiegel. Bei kleinen Seen, Kolken, Wasserlöchern will man für deren ganze oder theilweise Ausfüllung die Menge des dazu erforderlichen Erdmaterials, bei sehr breiten Strömen und Seen die sicherste Schifffahrtsstrafse erfahren. Bei geringen Wassertiefen genügen lange Maafsstäbe, bei gröfseren Tiefen geschieht das A. mittelst des Senkbleies.

**Ausrechnen.** Eine der niederen Arithmetik angehörende Rechnung ausführen.

**Ausschnitt einer Figur** (sector). Der Flächenraum der Figur, welcher zwischen je zweien von einem innerhalb derselben befindlichen Punkt nach dem Umfang gezogenen geraden Linien und dem zwischenliegenden Theil des Umfangs begrenzt wird. Es wird daher jede Figur durch einen Ausschnitt jedesmal in 2 Ausschnitte getheilt, wiewohl man in der Regel die von beiden kleinere ausgeschnittene Fläche der Figur mit Ausschnitt bezeichnet. Unter A. eines Kreises versteht man denjenigen A., welcher durch zwei Radien gebildet wird; unter A. einer Ellipse den durch zwei Radii vectoren von einerlei Brennpunkt aus.

**Ausschnitt eines Körpers** ist der Raum, der von einem innerhalb des Körpers befindlichen Punkt aus durch Seitenebenen einer Pyramide oder einen Kegelmantel und den durch denselben begrenzten Theil der Körper-Oberfläche eingeschlossen wird. Der A. einer Kugel wird durch einen Kegelmantel begrenzt, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt.

**Aufsenwerke einer Festung.** Die zum unmittelbaren Schutz des Hauptwalls vor demselben, aber noch innerhalb des Hauptgrabens befindlichen Befestigungswerke, zum Unterschied der verliegenden Werke und der detaschirten Werke, die beide aufserhalb des Hauptgrabens liegen, erstere innerhalb, letztere aufserhalb der von der Festung aus gemessenen Schufsweite, also isolirt, und der Selbst-Vertheidigung sich überlassen.

**Aufsenwinkel,** s. Aeufsere Winkel, No. 2, pag. 41; auch versteht man darunter äufsere Polygonwinkel (pag. 41).

**Aufserrechter Winkel,** die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm rechten inneren Nebenwinkels.

**Aufserspitzer Winkel,** die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm spitzen inneren Nebenwinkels.

**Aufserstumpfer Winkel,** die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm stumpfen inneren Nebenwinkels.

**Ausspringender Winkel** s. v. w. **ausgehender, hohler Winkel.** In der Kriegsw. ein W., dessen Oeffnung nach dem Innern des Festungswerks zeigt, dessen Spitze also nach Aufsen herausspringt, als Gegensatz zum einspringenden W., dessen Spitze in's Innere des Werks einspringt. Je spitzer der a. W. ist, desto weniger Raum gewährt er den Vertheidigern; er wird daher selten unter 60° angelegt.

**Austritt, Emersion eines Gestirns,** ist dessen Wiederhervortreten, wenn es von einem der Erde näher befindlichen Gestirn ganz oder zum Theil bedeckt und dem Anblick entzogen gewesen ist. Fixsterne bedecken einander nicht, sondern bleiben in einerlei gegenseitigen Entfernung von einander, sie werden dagegen von Planeten des Sonnensystems und diese mit deren Monden unter einander bedeckt. Bei einer Sonnenfinsternifs (Bedeckung der Sonne durch den Mond) fängt der A. des Mondes an in dem Augenblick, in dem das Maximum der bedeckten Sonnenfläche sich wieder zu vermindern anfängt, und er ist mit der Finsternifs selbst beendet in dem Augenblick, wo die Sonnenscheibe anfängt, wieder ganz sichtbar zu werden.

Dieselbe Bezeichnung hat man bei einer Mondfinsternifs (Bedeckung des Mondes von dem durch die Sonne erzeugten Schatten der Erde), wo der Schatten austritt. Bei Fixsternen und bei Planeten von sehr kleinem Durchmesser findet Anfang und Ende des Austritts in einerlei Augenblick statt. Austritt ist dem E i n t r i t t eines Gestirns entgegengesetzt, so dafs jede Finsternifs mit dem Anfang des Eintritts beginnt und mit dem Ende des A. aufhört.

Bei einer ringförmigen Sonnenfinsternifs beginnt der Eintritt in dem Augenblick, wo die äufseren Ränder von Sonne und Mond zum ersten Mal sich berühren. Der Eintritt endet in dem Augenblick, wo der äufsere Rand des Mondes den inneren Rand der Sonne zum ersten Mal berührt, um ihn zu verlassen und innerhalb einen dunklen Kreis zu bilden. Der Austritt beginnt mit der zweitenmaligen Berührung des gegenüberliegenden inneren Sonnenrandes von dem äufseren Rand des Mondes und der Austritt endet in dem Augenblick, wo die äufseren Ränder beider zum zweiten Mal sich berühren und sich nach Aufsen verlassen.

**Austrittswinkel** eines gebrochenen Lichtstrahls, s. u. **Ablenkung des Lichtstrahls** (pag. 6), **Achromatisch** (pag. 22).

**Ausweichung, Digression, Elongation** eines Planeten ist in irgend einem Ort seiner Bahn die scheinbare Entfernung desselben von der Sonne. Sie wird gemessen durch den Winkel, den die geraden Linien vom Mittelpunkt der Sonne und von dem Planeten mit dem Auge des auf der Erde befindlichen Beobachters bilden. Denkt man sich durch eine gerade Linie zwischen Sonne und Planet das Dreieck geschlossen, so ist der Winkel, dessen Spitze die Sonne ist, die C o m m u t a t i o n, und der dritte Winkel am Planeten die P a r a l l a x e.

Für astronomische Berechnungen wird die auf unsere Ekliptik reducirte A. angewendet; fällt man nämlich von einem Planeten auf die Ebene der Ekliptik ein Loth, so ist der Standpunkt dieses Loths in der Ekliptik der (auf die Ekliptik) reducirte Ort des Planeten, und der Winkel, der von diesem reducirten Ort und dem Sonnenmittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Erde gebildet wird, die reducirte A. Verbindet man nun das Sonnenmittel mit dem reducirten Ort des Planeten, so erhält man ein Dreieck, welches in der Ebene der Ekliptik liegt; der Winkel an der Sonne ist die (reducirte) Commutation, der an dem Planeten die (reducirte) Parallaxe.

**Ausziehen einer Wurzel.**

I. A u s Z i f f e r r e i h e n.

1. Weifs man von einer Zahl, dafs sie die Potenz einer rationalen Wurzel ist, so kann man durch Aufsuchen der Factoren die Wurzel finden. Weifs man z. B., dafs 2460375 der Kubus einer rationalen $\sqrt{}$ ist, so sieht man zuerst, dafs die Zahl 5 darin aufgeht, es mufs also auch $5^3 = 125$ ein Factor sein, und man hat durch Division:

$$2460375 = 5^3 \times 19683$$

Aus der Summe der Ziffern ergiebt sich, dafs die 9 aufgeht, mithin mufs auch $3^3 = 27$ aufgehen; durch Division erhält man:

$$19683 = 3^3 \times 729$$

In 729 geht wiederum die 9 auf, also auch $3^3 = 27$; man erhält:

$$729 = 3^3 \times 27 = 3^3 \times 3^3$$

es ist also

$$2460375 = 5^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3$$

und $\sqrt[3]{2460375} = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 135$

Besteht die Wurzel in einer oder mehreren grofsen Primzahlen, dann ist ein allmähliches Probiren mit 7, 11, 13, 17 u. s. w. langwierig.

2. Dekadische Zahlen mit e i n e r Null, z. B. 37940 haben keine rationale $\sqrt{}$; mit 2 Nullen ist nur eine rationale $\sqrt[2]{}$ möglich, mit 3 Nullen nur eine rationale

$\sqrt[3]{}$, mit 4 Nullen nur eine rationale $\sqrt[4]{}$ oder eine rationale $\sqrt[2]{}$; eine dekadische Zahl mit 6 Nullen kann nur eine rationale $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt[3]{}$ oder $\sqrt[6]{}$ haben u. s. w.

Ist die letzte Ziffer eine gerade Zahl und geht nicht zugleich die 4 auf, ist die letzte Ziffer 5 und geht nicht zugleich die 25 auf, so hat die Zahl keine rationale $\sqrt{}$. Ist die Summe der Ziffern einer Zahl durch 3 und nicht zugleich durch 9 ohne Rest theilbar, so hat die Zahl keine rationale $\sqrt{}$.

3. Ausziehen einer Quadratwurzel.

Aus der Zahl 61009 die $\sqrt[2]{}$ zu ziehen: Das empirische Verfahren ist Folgendes:

$$\begin{array}{l} \sqrt[2]{6|10|09} = 247 \\ \underline{4} \\ 210 \\ 44 \\ \underline{176} \\ 3409 \\ 487 \\ \underline{3409} \end{array}$$

Theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu 2 Ziffern, die erste Klasse links wird dann eine oder zwei Ziffern enthalten. Suche das zunächst kleinere Quadrat der ersten Klasse (= 4), schreibe dies darunter, die Wurzel daraus (2) rechts des Gleichheitszeichens; ziehe ab (6 − 4 = 2), setze den Rest (2) unter den Strich, schreibe rechts dazu die zweite Klasse (10); setze die gefundene $\sqrt{}$(2) doppelt genommen (2 × 2 = 4) unter die zweite Stelle (1), dividire damit in die obere, aus den beiden links stehenden Ziffern bestehende Zahl (21); der gröfste Quotient $\left(\frac{21}{4} = 5+\right)$ ist zu grofs, denn er mufs rechts neben (4) gesetzt und die so gebildete Zahl (45) mit demselben Quotient (5) multiplicirt, eine Zahl (45 × 5 = 225) geben, die kleiner ist als die zunächst obere Zahl (210). Daher der zunächst kleinere Quotient $\left(\frac{21}{4} = 4+\right)$ neben (4) gesetzt und die so gebildete Zahl (44) mit dem Quotient (4) multiplicirt (44 × 4 = 176) darunter gesetzt, von der oberen (210) abgezogen, den Rest (210 − 176 = 34) untergeschrieben und die dritte Klasse (09) rechts zugeschrieben. Da der Quotient (4) der richtige ist, wird er zugleich als $\sqrt{}$ neben die erste $\sqrt{}$(2) geschrieben, und die bis jetzt erhaltene $\sqrt{}$(24) doppelt genommen (48) unter die vorletzten Ziffern (340) der oberen Zahl gesetzt, damit in diese dividirt (340 : 48 = 7 +), den Quotient (7) neben gesetzt, damit die ganze Zahl (487) multiplicirt, (487 × 7 = 3409) darunter geschrieben und von der zunächst oberen (3409) abgezogen. Beide Zahlen gehen mit einander auf, der letzte Quotient (7) als richtige $\sqrt{}$ wird neben die ersten beiden (24) geschrieben, und man hat

$$\sqrt[2]{61009} = 247$$

4. Um die Theorie dieses Verfahrens zu verstehen, hat man zuerst Folgendes zu beachten:

Die kleinste einziffrige Zahl (1) hat zum Quadrat die kleinste einziffrige Zahl (1)

Die kleinste zweiziffrige Zahl (10) hat zum Quadrat die kleinste dreiziffrige Zahl (100) u. s. w.; überhaupt die kleinste $n$ziffrige Zahl, 1 mit $(n-1)$ Nullen, hat zum Quadrat die kleinste $(2n-1)$ziffrige Zahl, nämlich 1 mit $2(n-1)$ Nullen. Mithin haben alle Quadrate von 1 bis 99, nämlich alle ein- und zweiziffrigen Quadrate eine einziffrige $\sqrt{}$, alle Quadrate von 100 bis 9999, nämlich alle drei- und vierziffrigen Quadrate eine zweiziffrige $\sqrt{}$ u. s. w., und allgemein alle $(2n-1)$- und $(2n)$ziffrigen Quadrate eine $n$ziffrige $\sqrt{}$, und folglich hat das obige $5 = (2 \cdot 3 - 1)$ziffrige Quadrat 61009 eine dreiziffrige $\sqrt{}$. Sucht man diese $\sqrt{}$ eben so wie die Resultate der 4 Species mit Berücksichtigung des dekadischen Systems, so kann diese $\sqrt{}$ allgemein bezeichnet werden mit $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, und, wie oben ausgerechnet, ist $a = 2$, $b = 4$ und $c = 7$. Macht man ferner die obige Klassentheilung, so erhält man sogleich in der Anzahl der Klassen die Anzahl der Ziffern für die $\sqrt{}$, und als höchste dekadische Zahl (2) derselben, deren Quadrat (4) der Zahl (6) in der ersten Klasse zunächst kommt.

Nun ist allgemein $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Setzt man die sofort gefundene erste dekadische Zahl $= A$, das noch zu findende $10b + c = B$, so hat man

$$\begin{array}{lrl} A^2 + 2AB + B^2 = & 6|10|09 & \left.\begin{array}{l} A = a \\ = 200 \end{array}\right. \\ A^2 & = -\underline{4\ 00\ 00} & \\ \text{bleibt } 2AB + B^2 = & 2\ 10\ 09 & \end{array}$$

Da $2A$ bedeutend gröfser ist als $B$, so erhält man $B$ näherungsweise, wenn man mit $2A$ in $2AB + B^2$, hier 21009 durch 400 dividirt; man erhält $\frac{21009}{400} = 50+$, ersieht aber durch Probiren, dafs 50 zu grofs ist (wie solches beim partiellen Dividiren auch mitunter vorkommt) und dafs man nur 40 nehmen kann.

Dies näherungsweise $B' = 40$ ist aber von $B = 10b + c$ der erste Summand $10b$. Subtrahirt man nun von

$$\left.\begin{array}{ll} 2AB + B^2 = & 2|10|09 \\ 2AB' + B'^2 = (2A + B') & (44) \\ \times B' = 440 \times 40 & 17600 \end{array}\right\} b = 40$$

so erhält man

$$(A+B)^2 - (A+B')^2 = (A+B'+c)^2 - (A+B')^2$$
$$= 2(A+B')c + c^2$$
$$= [2(A+B') + c]c \quad = 3409$$

dividirt man daher mit

$$\left.\begin{array}{ll} 2(A+B) = 2\times 240 & = 480 \\ \text{so erhält man für } c & = 7 \\ \text{also } 2\times 240 + 7 & = 487 \end{array}\right\} c = 7$$
$$\times 7 \quad = 3409$$

$100a + 10b + c = 247$

Durch ein umgekehrtes Verfahren, nämlich durch partielles Quadriren der $\sqrt{\ } = 247$, erhält man dieselben Zahlen, welche beim $\sqrt{\ }$ ausziehen vorkommen:

Es ist nämlich

$247^2 = (200 + 40 + 7)^2 =$
$200^2 + 2\cdot 200\cdot 40 + 40^2 + 2\cdot(200+40)\cdot 7 + 7^2 =$
$200^2 + (2\cdot 200 + 40)40 + (2\cdot 240 + 7)\cdot 7$

| | |
|---|---|
| $200^2$ | $= 40000$ |
| $(2\cdot 200 + 40)\cdot 40$ | $= 17600$ |
| $(2\cdot 240 + 7)\cdot 7$ | $= 3409$ |
| $247^2$ | $= 61009$ |

5. Ist die $\sqrt{\ }$ irrational, wie z. B. $\sqrt[2]{245}$, so nähert man sich derselben durch Decimalstellen, und hängt demzufolge wirklich oder in Gedanken als Decimalen Nullen an, von denen je 2 zu einer Klasse gehören, als:

2|45|00|00|00| u. s. w.

$\sqrt{0,5}$ schreibt man $\sqrt{0,|50|00|}$ u. s. w.
$\sqrt{1,579}$ „ „ $\sqrt{1,|57|90|00|}$ u. s. w.
$\sqrt{12,00075} =$ $\sqrt{12,|00|07|50|}$ u. s. w.

**Beispiele.**

$\sqrt{16|07|44|86|49|} = 40093$

```
16
--------
 074486
   8009
  72081
  --------
   240549
    80183
   240549
```

$\sqrt{22|} = 4,69041$

```
16
---
,600
  86
 516
 ----
 8400
  929
 8361
 -----
  390000
   93804
  375216
  -------
   1478400
    938081
   ---------
   54031900 u. s. w.
```

$\sqrt{0,014}$ schreibe

$\sqrt{0,|01|40|} = 0,1183$

```
 1
---
  40
  21
  ----
  1900
   228
  1824
  -----
   7600
   2363
   7089 u. s. w.
```

6. Die $\sqrt[2]{\ }$ aus einer durch Exponent angezeigten Potenz kann erst ausgezogen werden, wenn die Potenz berechnet ist

$$\sqrt[2]{7^3} = \sqrt[2]{343}$$

oder es müfste die $\sqrt{\ }$ der Potenz ein Quadrat sein, als

$$\sqrt[2]{25^3} = \sqrt[2]{5^6} = 5^3 = 125$$

7. Aus Brüchen zieht man die $\sqrt[2]{\ }$, indem man sie in Decimalbrüche verwandelt oder rationale Nenner macht, z. B.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\sqrt{25\tfrac{3}{4}} = \sqrt{25,75} = \sqrt{\frac{103}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{103}$$

8. **Näherungsweisen.**

*A*. Hat man aus dem gegebenen Quadrat $(a+b)^2$, $a$ bestimmt und zieht $a^2$ ab, so bleibt $2ab + b^2$

Es ist aber

$$\frac{2ab + b^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$$

vernachlässigt man $\frac{b^2}{2a}$, so erhält man $b$ näherungsweise, und um so näher, je kleiner $b$ gegen $a$ ist.

Das 3. Beispiel, No. 5, weiter ausgeführt, giebt

$$\sqrt{0,014} = 0,11832159566199\ldots$$

für $a = 0,1$ bleibt $2ab + b^2 = 0,004$; also näherungsweise $b = \frac{0,014 - 0,1^2}{2\cdot 0,1} = \frac{0,004}{0,2}$ $= 0,02$ und $\sqrt{0,014}$ nahe $= 0,1 + 0,02 = 0,12$

Hat man $a$ bis 0,118 bestimmt, so erhält man $b$ näherungsweise $= \frac{0,014 - 0,118^2}{2\cdot 0,118}$ $= \frac{0,000076}{0,236} = 0,000322$, also $\sqrt{0,014}$ nahe $= 0,118322$

Hat man $a$ bis 0,1183 bestimmt, so wird $b$ nahe $= \frac{0,0511}{2366} = 0,000021597\ldots$ und $\sqrt{0,014}$ nahe $= 0,118321597\ldots$

*B*. Schreibt man $\sqrt{0,014} = \sqrt{0,0144 - 0,0004}$ so hat man $\sqrt{0,014} = 0,12 - B$ daher $-0,24B + B^2 = -0,0004$

daher $B$ nahe $=\frac{0,0004}{0,24}=\frac{0,01}{6}$ und

$\sqrt{0,014}$ nahe $=0,12-0,001666\ldots=0,11833\ldots$

9. **Die Ausziehung der Kubikwurzel.**

Diese beruht auf denselben Principien wie die der $\sqrt[2]{\ }$, und besteht in dem umgekehrten Verfahren der allmählichen Kubirung. Z. B.

$345^3$ ist $=(300+40+5)^3$
$=300^3+3\cdot300^2\cdot40+3\cdot300\cdot40^2+40^3+3\cdot(300+40)^2\cdot5+3(300+40)\cdot5^2+5^3$

Schreibt man behufs der Summirung die einzelnen Glieder des Kubus nach dekadischem System, so erhält man

$$\begin{aligned}
300^3 &= 27000000\\
3\cdot300^2\cdot40 &= 10800000\\
3\cdot300\cdot40^2 &= \phantom{0}1440000\\
40^3 &= \phantom{000}64000\\
\hline
340^3 &= 39304000\\
3\cdot340^2\cdot5 &= \phantom{0}1734000\\
3\cdot340\cdot5^2 &= \phantom{000}25500\\
5^3 &= \phantom{00000}125\\
\hline
345^3 &= 41063625
\end{aligned}$$

Ist nun dieser Kubus gegeben und man soll dessen $\sqrt{\ }$ finden, so hat man die oben nach und nach an einander gefügten Summanden hier nach und nach fortzunehmen. Zuerst geschieht eine Klassentheilung von rechts nach links von je 3 Ziffern; die erste Klasse links erhält 1, 2 oder 3 Ziffern.

$\sqrt[3]{41|063|625|}$ $A=300$

der zunächst kleinere Kubus $A^3$ mit 6 Nullen ist nun 27

es bleibt 14|063|625

um die nächstfolgende Zehnerziffer ($B$) zu erhalten, hat man in dem Rest 14|063|625 den gröfsten Summand $3\cdot300^2\cdot10\cdot B$ $2700000\times B$

Dividirt man demnach mit 27 in 140, so erhält man $B=5$, welches aber, wie eine Probe ergiebt, zu grofs ist, weshalb $B=4$ gesetzt werden mufs.

Nun hat man bereits $300^3$ abgezogen, und um $340^3$ abzuziehen, hat man noch abzuziehen

$$\begin{aligned}
3\cdot300^2\cdot40 &= 10800000\\
3\cdot300\cdot40^2 &= \phantom{0}1440000\\
40^3 &= \phantom{000}64000\\
\hline
\text{Summa} &\ \ 12304000\\
\text{von dem obigen Rest} &\ \ 14063625\\
\hline
\text{bleibt} &\ \ 1|759|625
\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Einerziffer mit $C$, so ist in dem Rest 1|759|625 der gröfste Summand $=3\cdot340^2\cdot C=$ $346\,800\times C$

Dividirt man daher 17596 durch 3468, so erhält man $C=5$, und wenn 345 die gesuchte $\sqrt[3]{\ }$ ist, so mufs der letzte Rest noch enthalten

$$\begin{aligned}
3\cdot340^2\cdot5 &= 1734000\\
3\cdot340\cdot5^2 &= \phantom{00}25500\\
5^3 &= \phantom{0000}125\\
\hline
\text{in Summa} &\ \ 1759625
\end{aligned}$$

wie dies der Fall ist.

Man ersieht, dafs die Ausziehung der $\sqrt[3]{\ }$ eine mühsame und langwierige Arbeit ist, besonders wenn bei irrationalen Wurzeln viele Decimalen verlangt werden.

Decimalen theilt man, wie bei der $\sqrt[2]{\ }$, vom Komma aus ab

$\sqrt[3]{0,4}$ schreib $\sqrt[3]{0,|400|000|}$ u. s. w.
$\sqrt[3]{12,05}$ „ $\sqrt[3]{12,|050|000|}$ u. s. w.

10. Ist eine Zahl zu potenziren und die $\sqrt[3]{\ }$ auszuziehen, so mufs (wie ad 6) das Erstere zuvor geschehen $\sqrt[3]{7^4}$ rechne $\sqrt[3]{2401}$. Oder es müfste die $\sqrt{\ }$ der Potenz ein Kubus sein, als $\sqrt[3]{125^2}=5^2=25$

11. Aus Brüchen zieht man die $\sqrt[2]{\ }$, indem man sie in Decimalbrüche verwandelt oder rationale Nenner macht. Z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}=\sqrt[3]{0,5}=\sqrt[3]{\tfrac{4}{8}}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{25\tfrac{3}{4}}=\sqrt[3]{25,75}=\sqrt[3]{\frac{206}{8}}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{206}$$

vergl. No. 7.

12. Annäherungsweisen, die aus dem No. 9 gedachten Verfahren entspringen, wie bei der $\sqrt[2]{\ }$ No. 8 angegeben worden, sind nicht gut zur Anwendung geeignet, weil, wenn man statt

$$\frac{3a^2b+3ab^2+b^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$$

näherungsweise $b$ setzt, der zweite Summand $\frac{b^2}{a}$ in vielen Fällen zu grofs ist, um fortgelassen werden zu können.

13. Die $\sqrt[4]{\ }$ zieht man am leichtesten aus, wenn man erst die $\sqrt[2]{\ }$, und aus der erhaltenen $\sqrt[2]{\ }$ wiederum die $\sqrt[2]{\ }$ auszieht; die $\sqrt[6]{\ }$, indem man zuerst die $\sqrt[2]{\ }$ und aus dieser die $\sqrt[3]{\ }$ auszieht. Andere höhere Wurzeln nach den obengedachten Regeln auszuziehen, ist nicht gerathen: Man bedient sich dazu der Logarithmen und mit gleichem Vortheil auch für's Ausziehen der Quadrat und der Kubikwurzel.

Man hat nämlich

$$\log \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log m$$

$$\text{mithin } \sqrt[n]{m} = num\ \frac{1}{n} \log m$$

1. Beispiel.

$\log \sqrt[3]{24} = \frac{1}{3} \log 24 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}3802112$
$= 0{,}27604224$

und $\sqrt[3]{24} = num\, 0{,}27604224$
$= 1{,}888175$

2. Beispial.

Die ad 9 gedachte $\sqrt[3]{41063625}$ erhält man

| | |
|---|---|
| $\log 41063000$ | $= 7{,}6134507$ |
| die Differenz gegen $\log 41064000$ ist (s. unter $P \cdot P$ in den Tafeln) $0{,}0000106$, mithin kommt hinzu $0{,}0000106 \times 0{,}625$ | $= 0{,}000006625$ |
| giebt $\log 41063625$ | $= 7{,}613457325$ |
| $\frac{1}{3}$ deaselben | $= 2{,}537819108$ |

deren Numerus $= \sqrt[3]{41063625}$ findet man in den Tafeln $= 537$, wie ad 9 elementar berechnet worden.

14. Eine Erläuterung bedarf noch die A. einer $\sqrt{\ }$ aus trigonometrischen Zahlen mit Hülfe der Logarithmen.

1. Beispiel.

Irgend eine Aufgabe verlange, dafs man $\angle x$ finde, und man erhalte
$\sin^2 x = 0{,}479$
so ist $\sin x = \sqrt{0{,}479}$
man findet $\log 0{,}479 = 0{,}6803355 - 1$
und da $\log \sqrt{0{,}479} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6803355 - 1$
so schreibe man, um eine ganze Zahl als Charakteristik zu bekommen,
$\frac{1}{2} \times 1{,}6803355 - 2$
nun mit 2 dividirt, giebt
$\log \sin x = 0{,}84016775 - 1$
und da in den Tafeln die Charakteristik $-10$ fortgelassen worden
$\log \sin x = 9{,}84016775$
woraus man in den Tafeln findet
$x = 43^\circ 47' 47''$

2. Beispiel.

Findet man zur Bestimmung von $\angle x$ in Folge des Gebrauchs der Tafeln
$\log tg^2 x = 9{,}1543284$
so ist dieser Logarithmus in Wirklichkeit
$9{,}1543284 - 10 = 0{,}1543284 - 1$

Will man nun $\log tg\, x$ finden, nm die Tafeln gebrauchen zn können, so mufs man wieder einen $\log$ finden, dessen Charakteristik $= -10$ ist, und da man den obigen $\log$ mit 2 zu dividiren hat, so rechne
$\frac{1}{2} \times 19{,}1543284\,(-20)$
und man erhält
$\log tg\, x = 9{,}5771642\,(-10)$
und findet in den Tafeln
$x = 20^\circ 41' 32''$

3. Beispiel.

Erhält man in Folge des Gebrauchs der Tafeln
$\log tg^3 x = 9{,}9543503\,(-10)$
so rechne man, um $\log tg\, x$ zu finden,
$\log tg\, x = \frac{1}{3} \times 29{,}9543503\,(-30)$
und erhält $\log tg\, x = 9{,}9847501\,(-10)$
u. s. w.

Eine Anwendung hiervon findet man in dem Art.: Algebraische Gleichung, No. 23 bis 25.

15. Mit Hülfe des binomischen Satzes kann man jede irrationale Wurzel durch Reihen-Entwickelung und Gliedersummirung bestimmen, und zwar auf jede beliebige Anzahl von Decimalen, während man bei Anwendung der Logarithmen darin beschränkt ist. So wie nämlich

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

so ist allgemein:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot (n-1)}{1.\ 2} \cdot a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

wo $n$ jede beliebige ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl sein kann.

Hat man nun aus der Zahl Z die $n$te $\sqrt{\ }$ zu ziehen,

so ist $\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}}$

Zerlegt man ferner Z in 2 Zahlen, von denen die eine eine $n$te Potenz ist, $(Z = a^n \pm b)$ wo man $b$ möglichst klein gegen $a^n$ wählt,

so hat man $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{(a^n \pm b)}$

Es gereicht zum Vortheil, $a^n$ als gemeinschaftlichen Factor aus der $\sqrt{\ }$ stellen zu können, und daher hat man $b = a^n \times x$,

woraus $x = \frac{b}{a^n}$ gefunden wird.

Nun ist

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{a^n (1 \pm x)} = a \sqrt[n]{1 \pm x} =$$

$$a(1+x)^{\frac{1}{n}} = a \left[ 1 \pm \frac{1}{n} x - \frac{1 \cdot (n-1)}{n.\ 2n} x^2 \pm \frac{1 \cdot (n-1)(2n-1)}{n.\ 2n.\ 3n} x^3 - \frac{1 \cdot (n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n} x^4 \pm \ldots \right] \quad 1$$

**Beispiel.** $\sqrt[4]{95}$ setze $\sqrt[4]{3^4+14}$

und da $x=\frac{14}{3^4}=\frac{14}{81}$, so ist

$$\sqrt[4]{95}=3\left[1+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{14}{81}-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{14}{81}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{81}\right)^3-\frac{1\cdot3\cdot7\cdot11}{4\cdot8\cdot12\cdot16}\left(\frac{14}{81}\right)^4+\ldots\right]$$

Man erhält die Klammergröfse:

| | |
|---|---|
| $+1$ | $=+1,00000\ 000000$ |
| $+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{81}$ | $=+0,04320\ 987654$ |
| $-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{14}{81}\right)^2$ | $=-0,00280\ 064015$ |
| $+\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{81}\right)^3$ | $=+0,00028\ 236907$ |
| $-\frac{1\ldots7\cdot11}{4\ldots12\cdot16}\left(\frac{14}{81}\right)^4$ | $=-0,00003\ 355311$ |
| $+\frac{1\ldots11\cdot15}{4\ldots16\cdot20}\left(\frac{14}{81}\right)^5$ | $=+0,00000\ 434948$ |
| $-\frac{1\ldots15\cdot19}{4\ldots20\cdot24}\left(\frac{14}{81}\right)^6$ | $=-0,00000\ 059514$ |
| $+\frac{1\ldots19\cdot23}{4\ldots24\cdot28}\left(\frac{14}{81}\right)^7$ | $=+0,00000\ 008449$ |
| $-\frac{1\ldots23\cdot27}{4\ldots28\cdot32}\left(\frac{14}{81}\right)^8$ | $=-0,00000\ 001232$ |
| $+\frac{1\ldots27\cdot31}{4\ldots32\cdot36}\left(\frac{14}{81}\right)^9$ | $=+0,00000\ 000183$ |
| $-\frac{1\ldots31\cdot35}{4\ldots36\cdot40}\left(\frac{14}{81}\right)^{10}$ | $=-0,00000\ 000028$ |
| $+\frac{1\ldots35\cdot39}{4\ldots40\cdot44}\left(\frac{14}{81}\right)^{11}$ | $=+0,00000\ 000004$ |
| Das Positive ist | $=+1,04349\ 668145$ |
| Das Negative ist | $=-0,00283\ 480100$ |
| Summa | $=+1,04066\ 188045$ |
| mit 3 multiplicirt giebt $\sqrt[4]{95}$ | $=\ 3,12198\ 564135$ |

16. Hätte man $\sqrt[4]{2}$ zu bestimmen, so würde bei der Abtheilung $\sqrt[4]{1+1}$, also $x=\frac{1}{1}$ die Reihe nur äufserst langsam convergiren; man multiplicire daher 2 mit einer geeigneten 4ten Potenz, so dafs das Product einer anderen 4ten Potenz nahe kommt. Zweckmäfsig z. B. ist $5^4=625$

denn es ist $2\cdot5^4=1250$
$6^4=1296$

daher $6^4-2\times5^4=46$

man hat also $\sqrt[4]{2\cdot5^4}=5\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{6^4-46}$

$$x=\frac{46}{6^4}=\frac{23}{648}$$

und $5\sqrt[4]{2}=6\sqrt[4]{1-\frac{23}{648}}$

$$=6\left[1-\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{648}-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{23}{648}\right)^2-\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{23}{648}\right)^3-\ldots\right]$$

Die Klammergröfse ist:

| | |
|---|---|
| $+1$ | $=+1,00000\ 00000\ 00$ |
| $-\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{648}$ | $=-0,00887\ 34567\ 90$ |
| $-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{23}{648}\right)^2$ | $=-0,00011\ 81073\ 53$ |
| $-\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{23}{648}\right)^3$ | $=-0,00000\ 24453\ 81$ |
| $-\frac{1\ldots7\cdot11}{4\ldots12\cdot16}\left(\frac{23}{648}\right)^4$ | $=-0,00000\ 00596\ 72$ |
| $-\frac{1\ldots11\cdot15}{4\ldots16\cdot20}\left(\frac{23}{648}\right)^5$ | $=-0,00000\ 00015\ 88$ |
| $-\frac{1\ldots15\cdot19}{4\ldots20\cdot24}\left(\frac{23}{648}\right)^6$ | $=-0,00000\ 00000\ 45$ |
| $-\frac{1\ldots19\cdot23}{4\ldots24\cdot28}\left(\frac{23}{648}\right)^7$ | $=-0,00000\ 00000\ 01$ |
| Das Negative beträgt | $-0,00899\ 40708\ 30$ |
| Die Summa | $+0,99100\ 59291\ 70$ |

diese Zahl mit 6 multiplicirt, giebt

$5\sqrt[4]{2}=5,94603\ 557502$

daher $\sqrt[4]{2}=1,18920\ 71150$

17. Auch die $\sqrt[3]{\ }$ läfst sich nach der ad 16 gedachten Methode auf eine beliebige Anzahl von Decimalen ausziehen.

1. Beispiel. $\sqrt[3]{2}$

Schreibe $4\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 4^3}=\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{5^3+3}$

Es ist $x=\frac{3}{125}=0{,}024$

man hat $4\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{1+0{,}024}$

und $\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{1+0{,}024}$

2. Beispiel. $\sqrt[3]{3}$

Schreibe $7\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 7^3}=\sqrt[3]{1029}=\sqrt[3]{10^3+29}$

Es ist $x=\frac{29}{1000}=0{,}029$

man hat $\sqrt[3]{3}=\frac{10}{7}\sqrt[3]{(1+0{,}029)}$

Oder:

Schreibe $9\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 9^3}=\sqrt[3]{2187}=\sqrt[3]{13^3-10}$

Es ist $x=\frac{10}{2197}$

Man hat $\sqrt[3]{3}=\frac{13}{9}\sqrt[3]{1-\frac{10}{2197}}$

3. Beispiel. $\sqrt[3]{4}$

Schreibe $5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4\cdot 5^3}=\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{8^3-12}$

$$x=\frac{12}{512}=\frac{3}{128}$$

man hat $\sqrt[3]{4}=\frac{8}{5}\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{128}\right)}$

Schreibt man $10\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4000}=\sqrt[3]{16^3-96}$

$$x=\frac{96}{4096}=\frac{3}{128}$$

Man hat wieder $\sqrt[3]{4}=\frac{8}{5}\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{128}\right)}$

4. Beispiel. $\sqrt[3]{5}$

Schreibe $6\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{6^3\cdot 5}=\sqrt[3]{1080}=\sqrt[3]{10^3+80}$

$$x=\frac{80}{1000}=0{,}08$$

$$\sqrt[3]{5}=\frac{10}{6}\sqrt[3]{(1+0{,}08)}$$

Diese $\sqrt[3]{\ }$ soll auf 10 Decimalen bestimmt werden.

$$\sqrt[3]{1+0{,}08}=1+\frac{1}{3}0{,}08-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}0{,}08^2$$
$$+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}0{,}08^3-\dots$$

$$
\begin{aligned}
&+1 &&=+1{,}00000\ 00000\ 00\\
&+\frac{1}{3}\cdot 0{,}08 &&=+0{,}02666\ 66666\ 67\\
&-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}\cdot 0{,}08^2 &&=-0{,}00071\ 11111\ 11\\
&+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}\cdot 0{,}08^3 &&=+0{,}00003\ 16049\ 38\\
&-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}\cdot 0{,}08^4 &&=-0{,}00000\ 16855\ 97\\
&+\frac{1\dots 8\cdot 11}{3\dots 12\cdot 15}\cdot 0{,}08^5 &&=+0{,}00000\ 00988\ 88\\
&-\frac{1\dots 11\cdot 14}{3\dots 15\cdot 18}\cdot 0{,}08^6 &&=-0{,}00000\ 00061\ 53\\
&+\frac{1\dots 14\cdot 17}{3\dots 18\cdot 21}\cdot 0{,}08^7 &&=+0{,}00000\ 00003\ 98\\
&-\frac{1\dots 17\cdot 20}{3\dots 21\cdot 24}\cdot 0{,}08^8 &&=-0{,}00000\ 00000\ 27\\
&+\frac{1\dots 20\cdot 23}{3\dots 24\cdot 27}\cdot 0{,}08^9 &&=+0{,}00000\ 00000\ 02\\
\hline
& \text{Summa} && \phantom{=+}1{,}02598\ 55680\ 05
\end{aligned}
$$

Diese Zahl mit $\frac{10}{6}$ multiplicirt, giebt

$\sqrt[3]{5}=1{,}70997\ 59467$

18. Die $\sqrt[2]{\ }$ desgleichen wie die $\sqrt[3]{\ }$ in No. 16.

1. Beispiel. $\sqrt{2}$

Schreibe $5\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 5^2}=\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}$

$$x=\tfrac{1}{49}$$
$$\sqrt{2}=\tfrac{7}{5}\sqrt{(1+\tfrac{1}{49})}$$

2. Beispiel. $\sqrt{3}$

Schreibe $4\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 4^2}=\sqrt{48}=\sqrt{7^2-1}$

$$x=\tfrac{1}{49}$$
$$\sqrt{3}=\tfrac{7}{4}\sqrt{(1-\tfrac{1}{49})}$$

3. Beispiel. $\sqrt{5}$

Schreibe $4\sqrt{5}=\sqrt{5\cdot 4^2}=\sqrt{80}=\sqrt{9^2-1}$

$$x=\tfrac{1}{81}$$
$$\sqrt{5}=\tfrac{9}{4}\sqrt{(1-\tfrac{1}{81})}$$

Dies Beispiel soll hier auf 10 Decimalen durchgeführt werden:

$$\sqrt{(1-\tfrac{1}{81})}=1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{81}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot(\tfrac{1}{81})^2$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(\tfrac{1}{81})^3-\ldots$$

$$1=+1{,}00000\ 00000\ 00$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{81}=-0{,}00617\ 28395\ 06$$
$$-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{81}\right)^2=-0{,}00001\ 90519\ 74$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{81}\right)^3=-0{,}00000\ 01176\ 05$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{1}{81}\right)^4=-0{,}00000\ 00009\ 07$$
$$-\frac{1\ldots 5\cdot 7}{2\ldots 8\cdot 10}\left(\frac{1}{81}\right)^5=-0{,}00000\ 00000\ 08$$
$$\text{Summa}=+0{,}99380\ 79900\ 00$$

Diese Zahl mit $\frac{9}{4}$ multiplicirt, giebt

$$\sqrt[2]{5}=2{,}23606\ 79775$$

19. Man hat für die Ausziehung einer $\sqrt{\ }$ noch andere Reihen. Setzt man z. B. in dem allgemeinen binomischen Satz No. 15:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

$-n$ für $n$, 1 für $a$ und $-b$ für $b$, so erhält man

$$(1-b)^{-n}=1+\frac{n}{1}b+\frac{n(n+1)}{1.\ 2}b^2$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}b^3+\ldots$$

hierin $\frac{b}{a+b}$ für $b$ gesetzt,

erhält man

$$\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-n}=$$
$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{b}{a+b}$$
$$+\frac{n\cdot(n+1)}{1.\ 2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\ldots$$

und hieraus

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{n}{1}\frac{b}{a+b}\right.$$
$$+\frac{n(n+1)}{1.\ 2}\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$
$$\left.\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3+\ldots\right)\quad \text{II}$$

Diese allgemeine Reihe, welche in Klügels mathem. Wörterbuch, Bd. 1, pag. 336, No. 17, angeführt, und pag. 338 nach derselben ein Beispiel berechnet worden, ist für jeden Werth von $n$, für eine ganze, gebrochene, positive und negative Zahl gültig. Setzt man, um die Anwendbarkeit derselben zur Ausziehung einer $\sqrt{\ }$ zu prüfen, $\frac{1}{n}$ für $n$, so erhält man

$$(a+b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\left[1+\frac{1}{n}\frac{b}{a+b}\right.$$
$$+\frac{1\cdot(n+1)}{n.\ 2n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$
$$\left.+\frac{1\cdot(n+1)(n+2)}{n.\ 2n.\ 3n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3+\ldots\right]\quad \text{III}$$

In der Formel No. 15:

$$\sqrt[n]{a^n+b}=a\sqrt[n]{\left(1+\frac{b}{a^n}\right)}=a\sqrt[n]{(1+x)}$$
$$=a\left(1+\frac{1}{n}x+\frac{1\cdot(n-1)}{n.\ 2n}x^2+\ldots.\right)$$

sind die Coefficienten kleiner, die Veränderliche $x$ gröfser, als in der vorstehenden Formel,

nämlich $x=\frac{b}{a}$ anstatt $\frac{b}{a+b}$

und hat man $(a-b)^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$(a-b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\left[1-\frac{1}{n}\frac{b}{a-b}\right.$$
$$+\frac{1\cdot(n+1)}{n.\ 2n}\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^2$$
$$\left.+\frac{1\cdot(n+1)(n+2)}{n.\ 2n.\ 3n}\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^3-\ldots.\right]$$

wo auch die Veränderliche $\frac{b}{a-b}>\left(x=\frac{b}{a}\right)$ wird, wo also die Formel No. 15 bestimmt convergirender ist als die vorstehende.

Für das Beispiel (No. 15) $\sqrt[4]{95}$ erhält man

$$\sqrt[4]{95}=3\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{95}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 2\cdot 4}\left(\frac{14}{95}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\left(\frac{14}{95}\right)^3+\ldots\right]$$

$$1=+1{,}00000\ 00000\ 00$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{95}=+0{,}03684\ 21052\ 63$$
$$\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\left(\frac{14}{95}\right)^2=+0{,}00339\ 33518\ 01$$
$$\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\left(\frac{14}{95}\right)^3=+0{,}00037\ 50546\ 73$$

u. s. w.

woraus hervorgeht, dafs die Formel No. 15 als convergirender früher zum Resultat führt. Bei dem Beispiel (No. 16)

$$\sqrt[4]{2}=\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{1250}=\tfrac{1}{5}\sqrt[4]{1296-46}$$

ist wegen des $-b$ $(-46)$ die Formel No. 15 noch viel mehr geeigneter; ein

Gleiches findet für das 4te Beispiel No. 17 und für das 3te No. 18 statt.

20. Man entwickelt aus dem binomischen Satz eine noch viel mehr convergirende Reihe für die $\sqrt{\ }$-Ausziehung als die in No. 15 angegebene, wie folgt:

Multiplicirt man die binomische Reihe

$$x=(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-2}\,b^2+\ldots$$

auf beiden Seiten mit $1+\frac{b}{a}\,y$, so entsteht

$$x\left(1+\frac{b}{a}\,y\right)=a^n+na^{n-1}\,b+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-2}\,b^2+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3}\,a^{n-3}\,b^3+\ldots$$
$$+\,a^{n-1}\,by+na^{n-2}\,b^2y+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-3}\,b^3y+\ldots$$

Wird nun $y$ so bestimmt, dafs die $b^2$ enthaltenden Glieder verschwinden, dafs also

$$\frac{n\,(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-2}\,b^2+na^{n-2}\,b^2\,y=0$$

so erhält man $y=-\frac{n-1}{2}$

Diesen Werth in die Reihe für $x\left(1+\frac{b}{a}\,y\right)$ gesetzt und reducirt, giebt

$$x\left[1-\frac{n-1}{2}\,\frac{b}{a}\right]=a^n+\frac{n+1}{2}\,a^{n-1}\,b-\frac{n+1}{b}\cdot\frac{n\,(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-3}\,b^3$$
$$-\frac{2\,(n+1)}{8}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3}\,a^{n-4}\,b^4-\frac{3\,(n+1)}{10}\,\frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4}\,a^{n-5}\,b^5$$
$$-\frac{4\,(n+1)}{12}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4.\;\;5}\,a^{n-6}\,b^6-\ldots. \qquad \text{IV}$$

Hieraus entsteht

$$x=(a+b)^n=\frac{2a}{2a-(n-1)\,b}\left[a^n+\frac{n+1}{2}\,a^{n-1}\,b-\frac{n+1}{6}\,\frac{n\cdot(n-1)}{1.\;\;2}\,a^{n-3}\,b^3\right.$$
$$-\frac{2\,(n+1)}{8}\cdot\frac{n\,(n-1)(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3}\,a^{n-4}\,b^4-\frac{3\,(n+1)}{10}\cdot\frac{n\;\ldots(n-3)}{1.\ldots\;\;4}\,a^{n-5}\,b^5$$
$$\left.-\frac{4\,(n+1)}{12}\cdot\frac{n\;\ldots(n-4)}{1.\ldots\;\;5}\,a^{n-6}\,b^5-\ldots\right] \qquad \text{V}$$

Das $m$te Glied der Klammergröfse ist:

$$\frac{m-2}{2m}\,(n+1)\,\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+2)}{1.\;\;2.\;\;\ldots\;\;(m-1)}\,a^{n-m}\,b^m$$

Giebt man dieser Formel die Form (No. 15) I, setzt also $a=1$, $b=x$, $n=\frac{1}{n}$, so erhält man

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{1+x}=\frac{2n}{2n+(n-1)\,x}\left[1+\frac{n+1}{2n}\,x+\frac{(n+1)\,(n-1)}{12n^3}\,x^3-\frac{(n+1)(n-1)(2n-1)}{24n^4}\,x^4\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n-1)\,(2n-1)\,(3n-1)}{80n^5}\,x^5-\ldots.\right] \qquad \text{VI}$$

Das $m$te Glied der Klammergröfse ist:

$$\pm\,\frac{m-2}{2m}\,(n+1)\,\frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(m-2)\,n-1]}{1.\;\;\;2.\;\;\ldots\;\;(m-1)\,n^m}\,x^m$$

wo das Vorzeichen (+) für ein ungerades $m$, das Vorzeichen (−) für ein gerades $m$ gilt. Hieraus hat man:

$$\sqrt[2]{1+x}=\frac{4}{4+x}\left[1+\tfrac{3}{4}\,x+\frac{x^3}{32}-\frac{3x^4}{128}+\frac{9x^5}{512}-\frac{7x^6}{512}+\frac{45x^7}{4096}-\frac{297x^8}{32768}+\ldots\right]$$
$$\sqrt[3]{1+x}=\frac{3}{3+x}\left[1+\tfrac{2}{3}\,x+\frac{2x^3}{81}-\frac{5x^4}{243}+\frac{4x^5}{243}-\frac{88x^6}{6561}+\frac{220x^7}{19683}-\frac{187x^8}{19683}+\ldots\right]$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\frac{8}{8+3x}\left[1+\tfrac{3}{8}x+\frac{5x^3}{256}-\frac{35x^4}{2048}+\frac{231x^5}{16384}-\frac{385x^6}{32768}+\frac{5225x^7}{524288}-\frac{72105x^8}{8388608}+\dots\right]$$

u. s. w.

Die Entwickelung der vorstehenden Reihen und deren Fortsetzungen geschieht sehr leicht, wenn man beobachtet, dafs von dem 4ten Gliede ab jedes $m$te Glied gefunden wird, indem man das vorhergehende ($m-1$te) Glied mit

$$\frac{(m-2)[(m-2)n-1]}{m(m-3)n}x$$

multiplicirt und wo $n$ den Grad der $\sqrt{}$ bedeutet. Ein Gesetz, welches auch die Ausrechnung der Reihenglieder in Decimalen bei gegebenen Zahlenbeispielen sehr erleichtert.

1. Beispiel (No. 15)

$$\sqrt[4]{95}=\sqrt[4]{3^4+14}=3\sqrt[4]{1+\tfrac{14}{81}}$$

Es ist $\sqrt[4]{1+\frac{14}{81}}$, wenn der gemeinschaftliche Factor $\dfrac{8}{8+3\cdot\frac{14}{81}}=\dfrac{648}{690}$ zu jedem einzelnen Gliede hinzugenommen wird, die Summe der folgenden Zahlenreihe, wobei zu bemerken, dafs

das 4te Glied $=\dfrac{49}{4\cdot 81}\times$ dem 3. Gliede
„ 5te „ $=\dfrac{77}{540}\times$ „ 4. „
„ 6te „ $=\dfrac{35}{3\cdot 81}\times$ „ 5. „
„ 7te „ $=\dfrac{95}{8\cdot 81}\times$ „ 6. „
„ 8te „ $=\dfrac{161}{1080}\times$ „ 7. „
„ 9te „ $=\dfrac{49}{324}\times$ „ 8. „
„ 10te „ $=\dfrac{62}{405}\times$ „ 9. „
„ 11te „ $=\dfrac{245}{1584}\times$ „ 10. „
„ 12te „ $=\dfrac{13\times 35}{36\cdot 81}\times$ „ 11. „

| | | |
|---|---|---|
| Das 1. Glied | = | + 0,93913 04347 82609 |
| „ 2. „ | = | + 0,10144 92753 62319 |
| „ 3. „ | = | + 0,00009 47076 37798 |
| Das 4. Glied | = | − 0,00001 43230 68680 |
| „ 5. „ | = | + 0,00000 20423 63497 |
| „ 6. „ | = | − 0,00000 02941 67541 |
| „ 7. „ | = | + 0,00000 00431 26420 |
| „ 8. „ | = | − 0,00000 00064 29931 |
| „ 9. „ | = | + 0,00000 00009 72292 |
| „ 10. „ | = | − 0,00000 00001 48845 |
| „ 11. „ | = | + 0,00000 00000 23022 |
| „ 12. „ | = | − 0,00000 00000 03591 |
| Summa | | + 1,04066 18804 50229 |

21. Die Reihe VI, No. 20, für $\sqrt[4]{1+x}$ convergirt in den ersten drei Gliedern wegen der fortgelassenen $b^2$ enthaltenden Glieder der ursprünglichen Reihe bedeutend, und in den folgenden Gliedern ebenfalls mehr als die aus der allgemeinen Reihe I, No. 15, entwickelte Reihe. Denn durch 12 Glieder ist die 11te Decimalstelle (5) schon richtig gefunden worden, und dafs die 11te Stelle (No. 15) mit dieser übereinstimmt, ist Zufall; als zuverlässig richtig konnte sie dort nicht angesehen werden; daher ist hier

$$\sqrt[4]{95}=3\sqrt[4]{1+x}=3{,}12198\ 56414$$

auf 10 Decimalen richtig gefunden worden, wenn man damit abbrechen will, weil das folgende 13te Glied in $\sqrt[4]{1+x}$ positiv in der 12ten Decimale etwa 5 geben wird, und numerisch gröfser ist als alle ihm nachfolgenden Glieder zusammengenommen.

Die Reihe VI, No. 20, ist also der I, No. 15, vorzuziehen. Aus dem Beispiel $\sqrt[4]{95}$ ist zu ersehen, dafs sie schon in den ersten drei Gliedern eine sehr bedeutende Annäherung giebt, nämlich $=+1{,}04067\ 44..$ während das 4te Glied $=-0{,}00001\ 43..$ einen Prüfstein für den Grad der Genauigkeit gewährt:

Demnach kann man, wenn wenige Decimalen genügen, die Reihe V unmittelbar, und zwar in den 3 ersten Gliedern als Formel anwenden, also:

$$(a+b)^n=\frac{2a}{2a-(n-1)b}\left[a^n+\frac{n+1}{2}a^{n-1}b-\frac{n+1}{b}\cdot\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-3}b^3\right]$$

und wenn man $\frac{1}{n}$ für $n$ setzt:

$$(a+b)^{\frac{1}{n}}=\frac{2na}{2na+(n-1)b}\left[\sqrt[n]{a}+\frac{n+1}{2n}\frac{b\sqrt[n]{a}}{a}+\frac{(n+1)(n-1)}{12n^3}\frac{b^3\sqrt[n]{a}}{a^3}\right]$$

und reducirt:

$$\sqrt[n]{(a+b)} = \frac{2na+(n+1)b}{2na+(n-1)b}\sqrt[n]{a} + \frac{(n+1)(n-1)b^3\sqrt[n]{a}}{6n^2a^2[2na+(n-1)b]} \qquad \text{VII}$$

hieraus

$$\sqrt[2]{a+b} = \frac{4a+3b}{4a+b}\sqrt{a} + \frac{b^3\sqrt{a}}{8a^3(4a+b)}$$

$$\sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a} + \frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{27a^2(3a+b)}$$

$$\sqrt[4]{a+b} = \frac{8a+5b}{8a+3b}\sqrt[4]{a} + \frac{5b^3\sqrt[4]{a}}{32a^2(8a+3b)}$$

$$\sqrt[5]{a+b} = \frac{5a+3b}{5a+2b}\sqrt[5]{a} + \frac{2b^3\sqrt[5]{a}}{25a^3(5a+2b)}$$

u. s. w.

Die beiden Glieder des Ausdrucks sind zusammengezogen die 3 ersten Glieder der Reihe V, No. 20.

Setzt man in dem 4ten Gliede $\frac{1}{n}$ für $n$, so wird das Glied negativ, und da es zugleich größer ist als das nachfolgende positive 5te Glied, so ist die aus der Formel VII gefundene $\sqrt{}$ deren größter Werth. Um aber auch noch die Grenze des kleinsten Werths zu finden, läßt sich aus der Reihe V die Bestimmung ableiten, daß das 4te Glied

$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{b}{a}$ mal dem dritten ist.

1. Beispiel. $\sqrt[2]{2}$

Schreibe $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = \sqrt{49+1}$

$$= \frac{4\cdot 49+3}{4\cdot 49+1}\cdot 7 + \frac{7}{8\cdot 49^2(4\cdot 49+1)}$$

das 1. Glied $= +7{,}07106599$

„ 2. „ $= +0{,}00000185$

der größte Werth $= 7{,}07106784$

die folgende negative Zahl

ist $-\frac{2\cdot 2-1}{4}\cdot\frac{1}{49}\cdot 0{,}00000185$

$= -0{,}00000003$

also der kleinste Werth $= 7{,}07106781$

Ohne Berücksichtigung der Decimalstellen, welche dem 2ten Gliede angehören, ist

$5\sqrt{2} = 7{,}07106$

und $\sqrt{2} = 1{,}41421$

der größte Werth von

$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\cdot 7{,}07106784 = 1{,}41421356$

der kleinste Werth von

$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\cdot 7{,}07106781 = 1{,}41421356$

mithin richtig

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$

2. Beispiel. $\sqrt[2]{2}$

Schreibe $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{125+3}$

$$= \frac{3\cdot 125+2\cdot 3}{3\cdot 125+3}\cdot 5 + \frac{2\cdot 3^3\cdot 5}{27\cdot 125^2(3\cdot 125+3)}$$

das 1. Glied $= +5{,}03968\ 253968$

„ 2. „ $= +0{,}00000\ 169331$

der größte Werth von

$4\sqrt[3]{2}$ $= +5{,}03968\ 423299$

die folgende negative größte Zahl

$\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{3}{125}\cdot 0{,}00000169$

$= +0{,}00000\ 003386$

der kleinste Werth $= 5{,}03968\ 419913$

Ohne Berücksichtigung der dem 2ten Gliede zugehörigen Decimalen ist

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$

der größte Werth $= 1{,}25992\ 1058$

der kleinste Werth $= 1{,}25992\ 1048$

mithin richtig

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ 105$

3. Beispiel. $\sqrt[4]{2}$

Schreibe $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{1296-46}$

$$= \frac{8\cdot 1296-5\cdot 46}{8\cdot 1296-3\cdot 46}\cdot 6 - \frac{5\cdot 46^3\cdot 6}{32\cdot 1296^2(8\cdot 1296-3\cdot 46)}$$

das 1. Glied ist $= +5{,}94604\ 10557$

„ 2. „ „ $= +0{,}00000\ 53108$

Da die folgende hinzukommende Zahl positiv ist, so ist das erste Glied der größte Werth,

die algebraische Summe beider Glieder $= 5{,}94603\ 57449$;

der kleinste Werth von $5\sqrt[4]{2}$.

Mithin der größte Werth von

$\sqrt[4]{2} = 1{,}18920\ 82111$

der kleinste Werth $= 1{,}18920\ 71490$

also richtig $\sqrt[4]{2} = 1{,}189207$

Rücksichtigt man auf die noch folgende, von da ab gröfste positive Zahl, so hat man dieselbe

$$\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4}\cdot\frac{46}{1296}\cdot 0{,}00000\ 53108$$
$$= +0{,}00000\ 01650$$

nnd man hat noch näher den gröfsten Werth von $5\sqrt[4]{2} = 5{,}94603\ 59099$ nnd der gröfste Werth von

$$\sqrt[4]{2} = 1{,}18920\ 71820$$

also richtig $\sqrt[4]{2} = 1{,}1892071$

4. Beispiel. $\sqrt[5]{2}$

Schreibe $7\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{33614} = \sqrt[5]{32768+846}$

$$= \frac{5\cdot 32768+3\cdot 846}{5\cdot 32768+2\cdot 846}\cdot 8$$
$$+ \frac{2\cdot 846^2\cdot 8}{25\cdot 32768^2\,(5\cdot 32768+2\cdot 846)}$$

das 1. Glied ist $= +8{,}04088\ 635$
„ 2. „ „ $= +0{,}00000\ 022$

der gröfste Werth von $7\sqrt[5]{2} = +8{,}04088\ 657$
das nachfolgende negative Glied ist

$$\frac{10-1}{10}\cdot\frac{846}{32768}\times 0{,}00000\ 022 = 0{,}00000\ 006$$

der kleinste Werth von $7\sqrt[5]{2} = 8{,}04088\ 651$
der gröfste Werth von $\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 808$
der kleinste Werth von $\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 807$
also richtig

$$\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 807$$

II. Ansziehen einer Wnrzel aus Buchstabengröfsen.

1. Wurzeln ans eingliedrigen Gröfsen.

Es ist $\sqrt[n]{a^n} = a$ 1.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 2.

$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$ 3.

$\sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}} = a^{\frac{m}{n}-1}$ 4.

$\sqrt[n]{a^{-n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ 5.

$\sqrt[n]{a^{-nm}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 6.

$\sqrt[n]{\frac{a^m\cdot b^{nm}}{c^{n-m}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}\, b^m}{c^{1-\frac{m}{n}}}$ 7.

2. Wnrzeln ans mehrgliedrigen vollständigen Potenzen.

$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \pm(a+b)$ 1.

$\sqrt{(a^2-2ab+b^2)} = \pm(a-b)$ 2.

$\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} = a+b$ 3.

$\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)} = a-b$ 4.

$\sqrt[4]{(a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4)} = a\pm b$ 5.

n. s. w.

$$\sqrt[n]{\Big[a^n \pm \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}b^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2b^{n-2} (+\pm)\frac{n}{1}ab^{n-1}(+\mp)b^n\Big]} = a\pm b \qquad 6.$$

3. Hat man ans einer mehrgliedrigen Gröfse die $n$te $\sqrt{\ }$ zn ziehen, so mufs sie, wenn sie eine vollständige $n$te Potenz ist, mindestens 2 Glieder enthalten, die $n$te Potenzen sind, nnd es ist am einfachsten, diese anfzusuchen, und aus ihnen in Beziehnng auf die Vorzeichen alle Glieder zu bilden, die, dem binomischen Satz (No. 2, Formel 6) zufolge, zur vollständigen $n$ten Potenz gehören.

1. Beispiel.

$$\sqrt[5]{\Big[x^5 - 10xy^2(x^2-4y^2) - 80\frac{y^6}{x^3}(x^2-y^2) - \frac{32y^{10}}{x^5}\Big]}$$

Das 1te nnd das 4te Glied sind 5te Potenzen, deren Wnrzeln $+x$ nnd $-\frac{2y^2}{x}$

Es ist also zu nntersnchen, ob die mittleren Glieder die beiden äufseren zn einer vollständigen 5ten Potenz ergänzen.

Nun ist nach No. 2, 6

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

daher

$$\left(x-\frac{2y^2}{x}\right)^5 = x^5 - 10x^3y^2 + 40xy^4 - 80\frac{y^6}{x} + 80\frac{y^8}{x^3} - \frac{32y^{10}}{x^5}$$
$$= x^5 - 10xy^2(x^2-4y^2) - 80\frac{y^6}{x^3}(x^2-y^2) - 32\frac{y^{10}}{x^5}$$

folglich die $\sqrt[5]{\ }$ gefunden.

2. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 39, No. 22.)

$$\sqrt[3]{\left[\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8 a^{m-1} b^x c}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^3}{3}a^n b^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\right]}$$

Dieser Ansdruck enthält 3 Quadrate:

$+\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}}$; Wnrzel $=\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}}$

$+a^{2n}b^{4n-2}d^6$; Wurzel $=a^n b^{2n-1}d^3$

$+\frac{2^{16}b^{2x}}{9}$; Wurzel $=\frac{2^8 b^x}{3}$

Nun hat

$$\left(\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \pm a^n b^{2n-1}d^3\right)^2$$

das doppelte Product (2ab in 1 und 2, No. 2).

$$2 \cdot \frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \times a^n b^{2n-1}d^3 = \pm \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}}$$

nnd da diese Gröfse in dem obigen Quadrat als 2tes Glied mit $-$ steht, so sind die beiden ersten Glieder der $\sqrt{}$ entweder

$$+\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^n b^{2n-1}d^3 \text{ oder}$$

$$-\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} + a^n b^{2n-1}d^3$$

Setzt man diese beiden Glieder als ersten Theil der $\sqrt{}$, die 3te $\sqrt{}=\frac{2^8 b^x}{3}$ als 2ten Theil derselben, so hat man das doppelte Product

$$= 2\left[\pm\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \mp a^n b^{2n-1}d^3\right] \times \frac{2^8 b^x}{3}$$

$$= \pm \frac{2^8 a^{m-1} b^x c}{d^{3p}} \mp \frac{2^3}{3} a^n b^{x+2n-1} d^3$$

das erste Glied ist mit $-$, das zweite mit $+$ in dem obigen Quadrat, daher

die $\sqrt{} = -3a^{m-1}c + a^n b^{2n-1}d^3 + \frac{2^8}{3}b^x$

oder $= +3a^{m-1}c - a^n b^{2n-1}d^3 - \frac{2^8}{3}b^x$

3. Belspiel. (Meier Hirsch, pag. 40, No. 9.)

$$\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)}$$

Es sind hier 2 Glieder, das erste und das letzte Cnbi, deren Wnrzeln $= b$ und $\frac{a^2 x^{-2}}{2c^2}$; alle Glieder sind positiv, es ist also nnr zu untersnchen, ob die beiden mittleren Glieder den Cnbus vervollständigen.

Nun ist $3 \cdot b^2 \times \frac{a^2 x^{-2}}{2c^2} = \frac{3a^2b^2x^{-2}}{2c^2}$

Das 2te Glied,

nnd $3 \cdot b\left(\frac{a^2 x^{-2}}{2c^2}\right)^2 = \frac{3a^4bx^{-4}}{4c^4}$

Das 3te Glied,

folglich die $\sqrt[3]{} = b + \frac{a^2 x^{-2}}{2c^2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}$

4. Quadratwurzeln aus unvollständigen Quadraten.

Diese werden am zweckmäfsigsten in eine Reihe entwickelt.

Beispiel. $\sqrt[2]{a^2+x^2}$

das erste Glied der $\sqrt{}$ ist $= a$.

Nennt man den zweiten Theil derselben $B$, so ist

$$a^2+x^2 = a^2+2aB+B^2$$

nnd nm $B$ näherungsweise zu finden, ziehe $a^2$ ab, dividire den Rest $x^2$ durch $2a$, so erhält man näherungsweise $B=\frac{x^2}{2a}$ welches zugleich das 2te Glied der $\sqrt{}$ ausmacht.

Zieht man nnn ab von $a^2+x^2$

$$\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)^2 = a^2+x^2+\frac{x^4}{4a^2}$$

so ist der Rest $-\frac{x^4}{4a^2}$

Bezeichnet man das zu $\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)$ Fehlende der $\sqrt{}$ mit $C$, so ist dieser Rest

$$= 2\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)C + C^2$$

man dividire wieder den Rest durch $2a$, und mau erhält nähernugsweise

$$C = -\frac{x^4}{4a^2} : 2a = -\frac{x^4}{8a^3}$$

welches zugleich das 3te Glied ist.

Also abgezogen von $-\frac{x^4}{4a^2}$

$$2\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)\left(-\frac{x^4}{8a^3}\right) + \left(\frac{x^4}{8a^3}\right)^2 = -\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$$

bleibt Rest $+\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$

Um nun das 4te Glied zu finden, betrachtet man die 3 ersten Glieder

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

als ersten Theil der $\sqrt{}$, dividirt also in

das erste Glied $+\frac{x^6}{8a^4}$ des Restes mit $2a$ nnd erhält $\frac{x^6}{16a^2}$

Nun mnfs der Rest

$$\frac{x^2}{8a^4}-\frac{x^6}{64a^6}$$

enthalten

$$2\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^2}\right)\frac{x^2}{16a^5}+\left(\frac{x^6}{16a^2}\right)^2$$

$$=\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^2}-\frac{x^{10}}{64a^2}+\frac{x^{12}}{256a^{12}}$$

abgezogen bleibt der Rest

$$-\frac{5x^8}{64a^2}+\frac{x^{10}}{64a^6}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

Dies ist der Rest, nachdem die $\sqrt{\ }$ in den 4 Gliedern:

$$a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^2}$$

bestimmt worden ist. Um das 5te Glied zn finden, hat man wieder $-\frac{5x^8}{64a^6}$ durch $2a$ zn dividiren, nnd man erhält als 5tes Glied $-\frac{5x^8}{128a^7}$

Fährt man auf diese Weise fort, so wird die Rechnnng immer weitläufiger, weil man in jedem folgenden Rest kein Glied vernachlässigen darf, bevor man nicht das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, entdeckt hat, so dafs dann das allgemeine Glied ohne weitere Rechnnng ermittelt werden kann.

5. Eine leichtere Methode znr Entwickelnng der $\sqrt{\ }$ ans einem nnvollständigen Qnadrat in eine Reihe gewährt die Lehre von den unbestimmten Coefficienten.

Man setze, nachdem man sich überzengt hat, dafs $a$ das erste Glied wird nnd dafs $x$ in Potenzen mit nnr geraden Exponenten in den übrigen Gliedern vorkommt,

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+Ex^{10}+Fx^{12}+\ldots$$

wo $a$ das bestimmte erste Glied ist, $A$, $B$, $C\ldots$ bestimmte, aber noch nnbekannte Zahlen sind. Dann ist, auf beiden Seiten qnadrirt,

$$a^2+x^2=(a+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\ldots)^2$$

Die Klammer aufgelöst nnd $a^2$ beiderseits snbtrahirt, giebt

$$\begin{aligned}x^2=2aAx^2&+A^2x^4\\&+2aBx^4+2ABx^6+B^2x^8\\&+2aCx^6+2ACx^8+2BCx^{10}+C^2x^{12}\\&+2aDx^8+2ADx^{10}+2BDx^{12}+\ldots\\&+2aEx^{10}+2AEx^{12}+\ldots\\&+2aFx^{12}+\ldots\end{aligned}$$

Bringt man $x^2$ von der linken Seite auf die rechte, redncirt also die Gleichnng auf Nnll nnd ordnet, so hat man

$$0=(2aA-1)x^2+(A^2+2aB)x^4+2(AB+aC)x^6+(B^2+2AC+2aD)x^8+2(BC+AD+aE)x^{10}+(C^2+2BD+2AE+2aF)x^{12}+\ldots$$

Dividirt man die Gleichung dnrch $x^2$, so entsteht

$$0=2aA-1+(A^2+2aB)x^2+2(AB+aC)x^4+\ldots$$

Da nnn die Gleichnng für jedes reelle $x$ Geltnng hat, so kann die rechte Seite nnr $=0$ werden, wenn $2aA-1=0$ ist. Diesen Werth eingesetzt, entsteht:

$$0=(A^2+2aB)x^2+2(AB+aC)x^4+\ldots$$

Diese Gleichnng durch $x^2$ dividirt, giebt

$$0=A^2+2aB+2(AB+aC)x^2+\ldots$$

nnd wiederum mufs $A^2+2aB=0$ sein.

Bei fortgesetztem Verfahren nnd denselben Schlüssen erhält man alle Coefficienten der Reihe $=0$, also

1) $2aA-1=0$
2) $A^2+2aB=0$
3) $AB+aC=0$
4) $B^2+2AC+2aD=0$
5) $BC+AD+aE=0$
6) $C^2+2BD+2AE+2aF=0$

n. s. w.

Ans 1 erhält man $A=+\frac{1}{2a}$

Diesen Werth in No. 2 eingesetzt, giebt

$$B=-\frac{1}{8a^3}$$

und so weiter

$$C=+\frac{1}{16a^5}$$

$$D=-\frac{5}{128a^7}$$

$$E=+\frac{7}{256a^9}$$

$$F=-\frac{14}{1024a^{11}}$$

Es ist demnach gefunden

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{14x^{12}}{1024a^{11}}+\ldots$$

6. **Knbikwnrzeln ans nnvollständigen Knben.**

Ein Verfahren, wie ad 4, bei der $\sqrt[3]{\ }$ führt zu noch weitläufigeren Rechnungen

wie dort und man wählt am besten die ad 5 gezeigte Methode. Z. B. $\sqrt[3]{a^3+x^3}$

Setze, nachdem man sich überzeugt, dafs $a$ das erste Glied ist und dafs $x$ in den Potenzen von nur durch 3 theilbaren Exponenten vorkommen kann,

$$\sqrt[3]{a^3+x^3} = a + Ax^3 + Bx^6 + Cx^9 + Dx^{12} + Ex^{15} + Fx^{18} + \ldots$$

cubire zu beiden Seiten und reducire, so erhält man

$$\begin{aligned}
x^3 = 3a^2Ax^3 &+ 3aA^2x^6 + A^3x^9 \\
&+ 3a^2Bx^6 + 6aABx^9 + 3A^2Bx^{12} \\
&+ 3aB^2x^{12} + 3AB^2x^{15} + B^3x^{18} + \ldots \\
&+ 3a^2Cx^9 + 6aACx^{12} + (3A^2C + 6aBC)x^{15} + 6ABCx^{18} + \ldots \\
&+ 3aC^2x^{18} + \ldots \\
&+ 3a^2Dx^{12} + 6aADx^{15} + (3A^2D + 6aBD)x^{18} + \ldots \\
&+ 3a^2Ex^{15} + 6aAEx^{18} + \ldots \\
&+ 3a^2Fx^{18} + \ldots
\end{aligned}$$

Diese Gleichung auf Null reducirt und geordnet, giebt:

$$\begin{aligned}
0 = (3a^2A - 1)x^3 &+ 3(aA^2 + a^2B)x^6 + (A^3 + 6aAB + 3a^2C)x^9 \\
&+ 3(A^2B + aB^2 + 2aAC + a^2D)x^{12} \\
&+ 3(AB^2 + A^2C + 2aBC + 2aAD + a^2E)x^{15} \\
&+ (B^3 + 6ABC + 3aC^2 + 3A^2D + 6aBD + 6aAE + 3a^2F)x^{18}
\end{aligned}$$

jeden dieser Coefficienten von $x^3$ bis $x^{18} = 0$ gesetzt und entwickelt, giebt:

$$A = +\frac{1}{3a^2}$$

$$B = -\frac{1}{9a^5}$$

$$C = +\frac{5}{81a^8}$$

$$D = -\frac{10}{243a^{11}}$$

$$E = +\frac{22}{729a^{14}}$$

$$F = -\frac{124}{6561a^{17}}$$

daher

$$\sqrt[3]{a^3+x^3} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \frac{22x^{15}}{729a^{14}} - \frac{124x^{18}}{6561a^{17}} + \ldots$$

7. Auf dem No. 5 und 6 angegebenen Wege kann auch jede $\sqrt{\phantom{x}}$ mit höheren Exponenten aus einer unvollständigen Potenz ausgezogen werden.

8. **Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$**

Im Laufe von Entwickelungen kommt diese Form nicht selten vor, und die Verwandlung derselben in zwei Glieder wird nicht ganz mit Recht Ausziehen der $\sqrt{\phantom{x}}$ genannt.

Man setze $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm \sqrt{y}$

so ist $A \pm \sqrt{B} = (x \pm \sqrt{y})^2 = x^2 \pm 2x\sqrt{y} + y$

Setzt man das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich, so hat man aus der letzten Gleichung:

1) $A = x^2 + y$

2) $\sqrt{B} = 2x\sqrt{y}$

2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen $x$ und $y$. Aus Gl. 2 erhält man

3) $B = 4x^2y$

aus 3 und 1

4) $A = x^2 + \frac{B}{4x^2}$

geordnet

5) $x^4 - Ax^2 + \frac{B}{4} = 0$

woraus

6) $x^2 = \frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right)$

aus 1 und 6 hat man nun

$$y = A - x^2 = \tfrac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right)$$

folglich

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Die Umwandlung ist von Nutzen, wenn $A^2 - B$ ein vollständiges Quadrat ist. Z. B.

1) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} - 1$

2) $\sqrt{\sqrt{18} - 4} = \sqrt{(\sqrt{18} - \sqrt{16})} = \sqrt{\frac{\sqrt{18} + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{18} - \sqrt{2}}{2}}$

Nun ist $\sqrt{18} \pm \sqrt{2} = \sqrt{18 + 2 \pm 2 \cdot \sqrt{36}} = \sqrt{20 \pm 12}$

also $\sqrt{(\sqrt{18} - 4)} = \sqrt{\frac{\sqrt{32}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{8}}{2}} = \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}$

$$3)\ \sqrt{(a^2+b+2a\sqrt{b})} = \sqrt{(a^2+b+\sqrt{4a^2b})}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2+b+\sqrt{(a^2+b)^2-4a^2b}}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+b-\sqrt{(a^2+b)^2-4a^2b}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a^2+b)+(a^2-b)}{2}} + \sqrt{\frac{(a^2+b)-(a^2-b)}{2}}$$
$$= a+\sqrt{b}$$

9. Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A+B\sqrt{-1}$
Verfahre wie No. 8; setze

$$\sqrt{(A \pm B\sqrt{-1})} = x \pm y\sqrt{-1}$$

so ist $A \pm B\sqrt{-1} = (x \pm y\sqrt{-1})^2 = x^2 - y \pm 2xy\sqrt{-1}$

Das Mögliche dem Möglichen, das Unmögliche dem Unmöglichen gleich gesetzt, giebt:

$$1)\ A = x^2 - y^2$$
$$2)\ B = 2xy$$

hieraus $A = x^2 - \frac{B^2}{4x^2}$

geordnet $x^4 - Ax^2 - \frac{B^2}{4} = 0$

woraus $x^2 = \frac{1}{2}\left(+A \pm \sqrt{A^2+B^2}\right)$ 3

wo nur das + Zeichen der $\sqrt{\ }$ gelten kann, weil $x^2$ sonst unmöglich wäre. Es ist also

$$x = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

Aus Gl. 1 hat man nun $y^2 = x^2 - A$
also mit Hülfe von Gl. 3

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-A+\sqrt{A^2+B^2}\right)$$
$$\text{und } y = \sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

hieraus

$$\sqrt{(A \pm B\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\sqrt{-1}$$

1. Beispiel.

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = \sqrt{(-3+4\sqrt{-1})}$$
$$= \sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}} + \sqrt{\frac{+3+\sqrt{9+16}}{2}}\sqrt{-1}$$
$$= 1+2\sqrt{-1}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt{8\sqrt{-1}} = \sqrt{(0+8\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{+0+\sqrt{0^2+8^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-0+\sqrt{0^2+8^2}}{2}}\sqrt{-1}$$
$$= 2(1+\sqrt{-1})$$

**Axe** ist eine mathematische gerade Linie, welche unter allen mit derselben in Beziehung zu denkenden, also zu irgend einem und demselben System im Raum gehörenden geraden Linien als Hauptlinie aufzufassen ist. Als solche ist sie die geeignetste gerade Linie, durch welche alle auſser ihr befindlichen Punkte, also auch Linien, Flächen und Körper, deren Ort nach bestimmbar sind, indem man deren Lage und Entfernung in Beziehung auf die Axe feststellt.

2. Es giebt Systeme im Raum, deren Natur keine Hauptlinie wahrnehmen läſst, als jede unregelmäſsige Figur, eine Anzahl im Raum zerstreuter Punkte u. s. w. Um deren Lage festzustellen, muſs man Hauptlinien wählen, diese von einem beliebigen Punkt aus gedachten Hauptlinien sind die Coordinaten-Axen (s. d. unter Abscisse, pag. 14). Aber auch für die nach bestimmtem Gesetz gebildete krumme Linie, die Evolvente *ADE*, Fig. 23, pag. 22, kann man keine gerade Linie finden, welche vorzugsweise als deren Axe gelten könnte; soll also die Lage deren Punkte bestimmt werden, so muſs man zwei in einerlei Ebene mit *ADE* zu zeichnende gerade Linien als Axen (als Coordinaten-Axen) wählen.

3. Dagegen giebt es Systeme im Raum, bei deren Anblick man sogleich eine Hauptlinie, eine Axe erkennt: Für die abgekürzte Pyramide, Fig. 6, pag. 6, ist es offenbar nur eine Linie, nämlich die gerade Verbindungslinie $A'A$ der Mittelpunkte beider Endflächen, für die ganze Pyramide die gerade Verbindungslinie der Spitze und des Grundflächenmittels $A$. Desgleichen in dem abgekürzten Kegel Fig. 7, die gerade Verbindungslinie $\dot{A}$ der Mittelpunkte beider Endkreise. Bei der Ellipse $apqp'$, Fig. 11, pag. 12, nimmt man zwei solcher Hauptlinien wahr, die grofse Axe $aq$ und die kleine Axe $pp'$. Bei der Parabel und bei der Hyperbel erkennt man wieder nur eine Hauptlinie, nämlich die gerade Linie, welche vom Scheitel aus gezogen die Fläche in 2 congruente Theile theilt.

Die eben gedachten Axen sind also nicht willkürlich gewählte, sondern in der Natur der Raumgröfsen begründete, sie sind natürliche Axen, und wenn auch durch sie die Lagen der Punkte krummer Linien, der Ecken, Kanten und Oberflächen von Körpern am einfachsten zu bestimmen sind, so sieht man von dieser Eigenschaft ab und definirt in der Geometrie: Axe als gerade Linie, um welche herum alle Punkte der Raumgröfse sich regelmäfsig gruppiren. Oder im Besonderen: Axe einer krummen Linie, die gerade Linie, durch welche die krumme in zwei gleiche und gleich liegende Theile getheilt wird. Axe von ebenen Figuren sagt man nicht. Axe eines geometrischen Körpers, die gerade Linie, in welcher die Mittelpunkte aller parallelen, einander ähnlichen Durchschnittsebenen liegen. (S. Axen der Krystalle.)

4. In den mechanischen Wissenschaften, die nur Ruhe und Bewegung, und zwar fortschreitende und drehende Bewegung als Wirkung von Kräften betrachten, ist Axe diejenige gerade Linie, um welche Drehung geschieht, oder um welche Drehung gedacht werden soll. Diese Axe ist also in dem ganzen System die einzige Linie, welche sich nicht dreht, und von welcher jeder einzelne Punkt des ganzen Systems einerlei Abstand behält. Die Axe kann aber fortschreiten, wie die Axe eines Rades am Wagen (s. Achse). Bei einem Wasserrade bleibt die Axe (die Mittellinie der Wasserradswelle, oder vielmehr die gerade Verbindungslinie der Mittellinien beider cylindrischen Wellzapfen) in Ruhe.

Ein Pendel macht seine Schwingungen um eine schwache metallene Achse; die Mittellinie derselben, welche horizontal und also zugleich auf der Schwingungsebene normal ist, ist die Axe des Pendels, und heifst Oscillationsaxe, Schwingungsaxe.

Eben so ist bei einem Balancier, z. B. bei dem einer Dampfmaschine oder einer Krämerwaage (dem Waagebalken) die horizontale Mittellinie der Zapfen die Axe.

Geometrisch betrachtet kann für einen Kreis oder eine Kugel jeder Durchmesser als Axe angesehen werden, aber weil von allen diesen Durchmessern kein einziger vor dem andern sich auszeichnet (als Hauptlinie auftritt), so werden diese Durchmesser nicht Axen genannt.

Mechanisch betrachtet haben aber Kreis und Kugel Axen: die Axe des Kreises ist die durch den Mittelpunkt auf der Kreisebene normal gedachte gerade Linie, indem man sich denkt, dafs ein Halbmesser um diese Axe gedreht mit seinem Endpunkt die Kreislinie beschrieben hat. Axe einer Kugel ist derjenige Durchmesser, um den die Kugel sich dreht oder sich drehend gedacht wird. Die Endpunkte einer Kreisaxe und einer Kugelaxe heifsen Pole. So hat die Erdkugel bei ihrer wirklichen Umdrehung einen Durchmesser, welcher von der Drehung ausgenommen ist, um den die Drehung geschieht, und dieser ist also die Erdaxe. Eine Weltaxe aber, die in jedem Augenblick mit der Erdaxe als einerlei angesehen wird, obgleich diese einen Raum von c. 40 Millionen Meilen Durchmesser durchläuft, ist nur scheinbar vorhanden, indem um diese, in dem Ort so sehr veränderliche Linie das ganze Weltgebäude sich nur zu drehen scheint, wiewohl es in Ruhe verbleibt (s. Aequator).

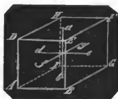
5. Sind bei einer Axendrehung die Massen nach allen Seiten hin um die Axe gleichmäfsig vertheilt, dafs also jeder einzelnen Masse eine ihr gegenüber liegende, gleich grofse und von der Axe gleich weit entfernte Masse entspricht, und dafs sich somit die Schwungkräfte einander aufheben, so empfängt oder arleidet die Axe keine Druckwirkung und heifst freie Axe. (In der Technik wird sie oft balancirte Axe genannt.)

**Axen der Krystalle.** Diese sind gerade Linien, die man durch die Mitte des Krystalls gelegt sich vorstellt und als Axen betrachtet, insofern um dieselben sämmtliche die Form des Krystalls bestimmenden Stücke: die Flächen, Ecken und Kanten, symmetrisch gruppirt sich befinden.

Die A. eines Krystalls sind dreierlei Art: Entweder sie verbinden zwei ent-

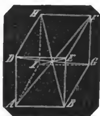
gegengesetzt liegende Ecken oder die Mitten zweier entgegengesetzt liegenden Flächen oder Kanten. Z. B. das Hexaëder

Fig. 135.



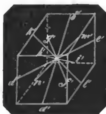
(der Würfel), eine einfache Krystallform, hat 6 Flächen, 8 Ecken, 12 Kanten, es hat also 3 A. zwischen Flächenmitten,

Fig. 136.



4 A. zwischen Ecken und 6 A. zwischen Kantenmitten.

Fig. 137.



Die Figuren 135—137 zeigen dies bildlich: In *C*, dem Mittelpunkt des Hexaëders, schneiden sich sämmtliche 13 A.; es sind nur hier statt eines Hexaëders der Deutlichkeit wegen 3 gezeichnet. Die 3 A. zwischen den Flächenmitten sind *ab*, *de*, *fg*. *a* ist die Mitte der Fläche ***DEFH*** und verbindet die Mitte *b* der Fläche ***ABGI***; *d* ist die Mitte der Fläche ***ADHI*** und verbindet die Mitte *e* der Fläche ***BEFG***; *f* ist die Mitte der Fläche ***ABDE*** und verbindet die Mitte *g* der Fläche ***GFHI***.

Die 4 A. zwischen den 8 Ecken sind ***AF***, ***BH***, ***DG***, ***EI***; die 6 A. zwischen den 12 Kantenmitten sind *a'b'*, *d'e'*, *f'g'*, *h'i'*, *k'l'*, *m'n'*.

Durch die Axen wird die Form eines Krystalls bestimmt; zur vollständigen Bestimmung desselben sind mindestens 3, höchstens 4 A. erforderlich.

Die A. derselben Art, die also Gleiches: als Ecken oder Kanten oder Flächen mit einander verbinden, und die in Länge und Lage einander gleich sind, heifsen unter sich gleichartig, im Gegensatz zu den übrigen A. ungleichartig. So sind beim Hexaëder die 4 A., welche die Ecken verbinden, gleich lang und in gleicher Lage, also gleichartig; dasselbe findet beim Hexaëder mit den A. zwischen den Flächenmitten und den zwischen den Kantenmitten statt.

Die A. werden durch die Mitte des Krystalls gehälftet, sie verbinden immer gleiche Ecken oder die Mitten gleicher Kanten oder gleicher Flächen, und alle gleichartigen A. schneiden sich unter gleichen Winkeln.

Wie das Hexaëder dreierlei A. und von jeder Art mehrere gleichartige hat, so giebt es mehrere Krystallformen von derselben Eigenschaft, und diese heifsen deshalb vielaxige Krystalle. Es giebt aber auch Krystallformen, in welchen eine A. keine ihr gleichartigen A. hat; auch solche, in welchen 2 oder auch 3 verschiedene A. sich befinden, von denen keine derselben eine ihr gleichartige A. hat, und solche heifsen einaxige Formen. Z. B. das Octaëder, welches aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit 6 gleichen Ecken besteht, hat unter andern A. auch 3 A., welche die 3 Paar gleichen Ecken mit einander verbinden, und welche gleichartig sind; das Octaëder ist also eine vielaxige Form. Das Rhombenoctaëder dagegen, welches aus 8 ungleichseitigen Dreiecken mit 3 Paar je 2 und 2 gleichen Ecken besteht, hat die 3 hierzu gehörigen Eckenaxen, jede von der anderen verschieden lang und verschieden gelegen; keine derselben hat also eine ihr gleichartige A., und es ist daher das Rhombenoctaëder eine einaxige Form. (S. Axensystem.)

**Axe, freie**, s. u. **Axe** 5. Horizontale oder schrägliegende A. erleiden eine Druckwirkung durch die Schwere. Mit Hülfe von Gegengewichten, die, über Rollen geleitet, senkrecht aufwärts auf die Axe wirken und mit dem ganzen sich drehenden System gleich schwer sind, können

sie vollständig balancirt werden, allein sie heifsen auch freie Axen, wenn dies nicht geschieht, wenn nur die mit denselben verbundenen Massen, wie unter Axe No. 5 erklärt worden, gleichmäfsig um dieselben vertheilt sind. Aus gleichem Grunde heifsen auch die Axen der Planeten freie A., wenngleich die Schwerkraft der Sonne in jedem Augenblick eine Druckwirkung auf sie ausübt (vergl. Axendrehung.)

**Axen, hexaëdrische.** Diese sind in jeder Krystallform, die dem regulären System angehört, nachzuweisen; es sind deren 4, sämmtlich gleichartig und ihr Name rührt daher, dafs sie im Hexaëder am naturgemäfsesten in die Augen springen, indem sie dessen 4 Paar gegenüber liegende Ecken mit einander verbinden, wie in Fig. 136 dargestellt ist.

Unter den homoëdrischen Krystallformen verbinden sie beim Octaëder die Mittelpunkte der 4 Paar gegenüber liegenden parallelen Flächen. Beim Dodekaëder von 14 Ecken, dem Ikositetraëder von 26 Ecken und dem Triakisoctaëder von 14 Ecken verbinden sie die 4 Paar regulären dreiflächigen Ecken. Beim Tetrakishexaëder von 14 Ecken und dem Hexakisoctaëder von 26 Ecken die 4 Paar symmetrischen 6flächigen Ecken.

Unter den hemiëdrischen Formen verbinden sie beim Hemioctaëder die Mittelpunkte der 4 Flächen mit den diesen gegenüber liegenden Ecken. Beim Hemi-Ikositetraëder die 6flächigen Ecken mit den gegenüber liegenden 3flächigen Ecken. Beim Hemitriakisoctaëder von 14 Ecken, desgleichen beim Hemitetrakishexaëder von 20 Ecken und beim Hemioctakishexaëder von 14 Ecken die 4 Paar dreiflächigen regulären Ecken, und beim Hemihexakisoctaëder von 14 Ecken die 4 Paar symmetrischen 6flächigen Ecken.

**Axe, magnetische.** Die gerade Verbindungslinie der beiden magnetischen Pole unseres Erdkörpers (s. Aequator, magnetischer.)

**Axen, octaëdrische.** Diese sind, wie die hexaëdrischen A., in jeder Krystallform, die dem regulären System angehört, nachzuweisen; es sind deren 3, sämmtlich gleichartig und ihr Name rührt daher, dafs sie im Octaëder am naturgemäfsesten in die Augen springen, indem sie dessen 3 Paar gegenüber liegende Ecken mit einander verbinden.

In Fig. 138, dem Octaëder, sind *AF*, *BE* und *DG* diese Axen.

Unter den homoëdrischen Krystallformen verbinden sie beim Hexaëder die Mittelpunkte der 3 Paar quadratischen

Fig. 138.




Flächen, wie dies Fig. 135, pag. 256 nachweist. Beim Dodekaëder von 14 Ecken und beim Ikositetraëder von 26 Ecken die 3 Paar regulären 4flächigen Ecken. Beim Tetrakishexaëder von 14 Ecken die 3 Paar regulären 6flächigen Ecken. Beim Triakisoctaëder von 14 Ecken und beim Hexakisoctaëder von 26 Ecken die 3 Paar symmetrischen 8flächigen Ecken.

Unter den hemiëdrischen Formen verbinden sie beim Hemioctaëder die Mittelpunkte der 3 Paar gegenüber liegenden Kanten, beim Hemi-Ikositetraëder von 18 Kanten die Mitten der 3 Paar gegenüber liegenden längeren Kanten und beim Hemitetrakishexaëder die der 3 Paar gegenüber liegenden Grundkanten. Beim Hemitriakisoctaëder von 14 Ecken, beim Hemihexakisoctaëder von 14 Ecken und beim Hemioctakishexaëder von 26 Ecken die 3 Paar symmetrischen 4flächigen Ecken.

**Axencentrum** ist in einer Krystallform der Punkt, in welchem sämmtliche Axen derselben sich schneiden und in welchem sie sich zugleich hälften.

**Axendrehung.** Hierunter versteht man die Bewegung von Massen um eine Axe. Die Axe kann unbeweglich sein, wie bei einer Winde, oder auch fortschreitend, wie bei einem Fuhrwerk, allein sie dreht sich nicht.

Die Drehung der Massen ist entweder eine vollständige Umdrehung oder nur eine theilweise Drehung. Erstere ist fortdauernd und nach einerlei Richtung, wie beim Wasserrade und allen Maschinenrädern; letztere bedingen eine abwechselnd

entgegengesetzte Richtung, wie bei der Waage, dem Pendel, dem Balancier an einer Maschine. Jedes Massen-Element beschreibt mit dem Abstand von der Axe als Halbmesser in dem ersten Fall einen vollständigen Kreis, im zweiten Fall einen Kreisbogen.

Eine Umdrehung (Umwälzung, Rotation) ist vollständig geschehen, wenn alle Massenpunkte wieder in die anfängliche Lage gekommen sind. In der Mechanik und der Maschinenlehre bezeichnet man entweder die Zeit, in welcher eine Umwälzung geschieht, oder die Anzahl Umdrehungen in irgend einer Zeit-Einheit; geschieht in dieser nicht eine vollständige Umdrehung, so hat man mit dem durchlaufenen Bogen in Verhältnifs zum Kreisumfang die Winkelgeschwindigkeit, welche auch in Graden angegeben wird. In der Astronomie wählt man die erstere Bezeichnung wegen der grofsen Zeitlänge, welche ein Weltkörper zu einer Rotation verlangt.

Man sagt z. B. Mercur vollendet eine Umwälzung in 24 Stunden und 5 Minuten. In der Maschinenlehre und der Technik hat man diese Bezeichnung seltener, man sagt also nicht: ein Wasserrad mache in 10 Secunden eine Umdrehung, sondern, es habe in 1 Minute 6 Umdrehungen. Eine Centrifugalmaschine in Kattunfabriken, Zuckersiedereien u. s. w. hat per Minute etwa 2000 Umdrehungen. Von einer Dampfmaschine sagt man, sie habe per Minute z. B. 30 Wechsel (30 Auf- und 30 Niedergänge, oder 30 Doppelhübe); vom Pendel, es habe per Minute 100 Schwingungen (d. h. 50 Schwingungen links und 50 rechts) gemacht.

Da die Erde in 24 Stunden einen Umschwung macht, so beträgt ihre Winkelgeschwindigkeit per Minute $\frac{1}{4}$ Grad = 15 Bogenminuten und per Secunde $\frac{1}{4}$ Bogenminute = 15 Bogensecunden.

2. Bei jeder A. ist die Untersuchung von Wichtigkeit, welchen Einflufs die sich umwälzenden Massen auf die Axe ausüben. Unter „Axe 5" und „Axe, freie" ist der Begriff freie Axe erklärt; es ist aber nicht ohne Weiteres einzusehen, dafs gleichförmig vertheilte Massen keinen Normaldruck auf die Axe ausüben, sondern dies erst nachzuweisen:

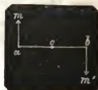
Es sei Fig. 139 *ee* die Axe eines Körpers, der um dieselbe sich herumdreht; die Axe heifst eine freie A., wenn jedem beliebigen Massen-Element, wie z. B. *m*, der Axe normal gegenüber, ein ihm gleiches Massen-Element *m'* in derselben Entfernung $am' = am$ sich befindet; es ist zu beweisen, dafs die A. dann von den umlaufenden Massen keine Druckwirkungen empfängt, dafs sie von allen Druckwirkungen frei bleibt.

Fig. 139.




Ist nämlich (Fig. 140) *c* die Axe im Grundrifs, also *c* der Drehpunkt, so wirken die beiden gleichen Massen *m*, *m'* in

Fig. 140.




den gleichen Abständen *ac*, *bc* auf Druck nach parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen *am* und *bm'*.

Man denke sich (Fig. 141) $\pm\frac{1}{2}ab$ in *de* und *fg* in den mit *ac* und *bc* gleichen Abständen *ad* und *ag*, zwei Paar mit *m* und *m* gleich grofse und entgegengesetzt wirkende Druckkräfte angebracht, so hätte

Fig. 141.

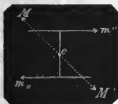


$m''$ mit $m'''$ und $m$, mit $m_{,,}$ Gleichgewicht, und die beiden Kräfte $m$ und $m'$ bleiben in ihren Wirkungen ungeändert.

Setzt man die Kräfte $m$ und $m'''$ zu einer Mittelkraft $M$ zusammen, so wird, da $m = m'''$ ist, der $\angle ade$ durch die Mittelkraft $M$ halbirt, hat also die Richtung $cd$, desgleichen ist die Mittelkraft $M'$ der gleich grofsen Kräfte $m'$ und $m_{,} = M$ und nach $fc$ gerichtet.

Durch die Einführung der mit den Seitenkräften gleich wirkenden Mittelkräfte ist in der Wirkung des ursprünglichen Systems wieder nichts geändert, d. h. die Wirkung ist ganz dieselbe, wie bei dem System Fig. 140, das neue System hat aber die Gestalt Fig. 142, in welchem $M$

Fig. 142.




und $M'$ sich Gleichgewicht halten, und es hat mithin zugleich die Gestalt Fig. 143.

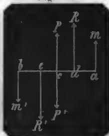
Fig. 143.




Ueben nun die gleichen Massen $m$ und $m'$ (Fig. 140) einen Druck $p$ auf die Axe $c$, so müssen auch die ihnen gleich grofsen und von $c$ gleich weit entfernten Massen $m''$ und $m_{,,}$ (Fig 143) denselben Druck $p$ auf die Axe $c$ üben, und da die Richtung des ersten Massenpaars mit der des zweiten einen $\angle$ von 90° bildet, so mufs auch die Richtung des Drucks $p$ aus dem ersten Massenpaar mit der des Drucks $p$ aus dem zweiten um einen $\angle$ von 90° unterschieden sein. Da aber beide Systeme Fig. 140 und 143 in ihren Wirkungen einerlei sind, weil das System Fig. 140 durch Umwandlung in das System Fig. 143 in seiner Wirkung ungeändert geblieben ist, so können in beiden Systemen Druckwirkungen nach verschiedenen Richtungen, also überhaupt Druckwirkungen auf die Axe $c$ nicht stattfinden.

Man kann sich davon aber noch auf folgende Weise überzeugen:

Fig. 144.

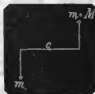



Man denke sich auf die Axe, $\neq am$ und $bm$, 2 gleiche und entgegengesetzt wirkende Kräfte $P$ und $P'$ von beliebiger Gröfse angebracht, so halten letztere einander das Gleichgewicht, und das System und dessen Wirkung auf die Axe ist noch dieselbe. Man setze für $m$ und $P$ deren Mittelkraft $P + m = R$ und für $m'$ und $P'$ deren Mittelkraft $R'$, so ist $R = R'$ und deren Entfernung

$$dc = ec = \frac{m}{R} \cdot ac = \frac{m}{P+m} \cdot ac$$

Je gröfser $P$, desto kleiner wird $dc = ec$, und es können mit der Zunahme von $P$ die Punkte $d$ und $e$ der Axe $c$ beliebig nahe gebracht werden, so dafs sie als in der Axe $c$ selbst wirkend zu denken sind. Da nun $P$ und $P'$ einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, so heben sie einander auf und die Axe $c$ empfängt keine Druckwirkung.

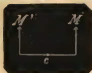
Fig. 145.




Sind dagegen in gleichen Entfernungen $a$, $a$ von der Axe entgegengesetzt die Massen $m$ und $M + m$, Fig. 145, so kann man die Massen $m$ und $m$ in Absicht des Drucks auf die Axe fortnehmen, und es bleibt auf einer Seite die Masse $M$ allein wirkend. Um zu erfahren, welchen Druck dies $M$ auf die Axe $c$ ausübt, darf man

nur auf der andern Seite in Entfernung $a$ die gleiche Masse $M'$ nach einerlei Richtung mit $M$ angebracht denken, so dafs $c$ sich nicht drehen kann, so äufsert die Mittelkraft beider $= M' + M = 2M$, in $c$

Fig. 146.




thätig gedacht, denselben Druck auf $c = 2M$, wobei also die Länge von $a$ gleichgültig ist. Mit der Abnahme von $a$ kann man die beiden Massen $M$, $M'$ der Axe $c$ beliebig nahe, und als Mittelkraft in $c$ selbst verlegen, deren Druck auf $c$ ist immer $= 2M$, folglich der Druck der einen Masse $M$ in jeder beliebigen Entfernung $a$ von der Axe beträgt $M$.

**Axendrehung der Erde** s. u. **Aequator der Erde**, pag. 33 mit Fig. 34.

**Axendrehung des Mondes** ist unmittelbar nicht vorhanden, wie in dem Art. „Astronomischer Tag des Mondes" gezeigt ist; dennoch findet sie in Folge des Umlaufs des Mondes um die Erde mittelbar statt, also in der siderischen Umlaufszeit des Mondes (s. astronomischer Monat, No. 2), weil während dieser Zeit jeder Punkt der Mondoberfläche nach und nach in alle die Lagen kommt, als wenn er direct um seine Axe sich gedreht hätte.

**Axendreieck.** Jeder Kegelschnitt durch die Axe des Kegels, weil solcher Schnitt von der Spitze bis zur Grundfläche gehend ein geradliniges Dreieck ist.

**Axensysteme der Krystalle.**

Je nachdem zusammengehörige Axen in einem Krystall, nämlich Axen, die blofs Ecken oder blofs Kanten oder blofs Flächen mit einander verbinden (s. Axen der Krystalle), gleich oder ungleich in Länge, je nachdem diese recht- oder schiefwinklig gegen einander geneigt sind, unterscheidet man Systeme und zwar 6 Krystallisationssysteme oder Axensysteme.

1) Das reguläre (das tessulare, isometrische, tesserale) System, bei welchem 3 Axen gleichartig und unter einander rechtwinklig sind.

2) Das zwei- und einaxige (pyramidale, monodimetrische, tetragonale, quadratische) System, bei welchem 2 Axen gleichartig, die dritte ungleichartig ist, sämmtliche Axen jedoch unter einander rechtwinklig sind.

3) Das drei- und einaxige (rhomboëdrische, monotrimetrische, hexagonale) System, bei welchem 4 Axen sich befinden, von denen 3 mit einander gleichartig sind, unter gleichen Winkeln in einerlei Ebene sich durchschneiden, die vierte ungleichartige Axe mit den ersten dreien rechtwinklig liegt.

4) Das ein- und einaxige (prismatische, anisometrische, orthotype, rhombische) System, bei welchem 3 mit einander ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden.

5) Das zwei- und eingliedrige (hemiprismatische, monoklinometrische, hemiorthotype, klinorhombische, monoklinoëdrische) System, bei welchem 2 ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden, die dritte ebenfalls mit beiden ungleichartigen Axen mit einer der ersten Axen rechtwinklig und mit der anderen schiefwinklig geneigt ist.

6) Das ein- und eingliedrige (tetartoprismatische, klinorhomboidische, triklinometrische, anorthotype, triklinoëdrische) System, bei welchem 3 ungleichartige Axen mit einander schiefwinklig geneigt sind.

2. Bei jedem A. werden die zur Bestimmung des Krystalls zusammengehörigen Axen so gestellt, dafs eine der Axen senkrecht steht. Sind alle Axen einander gleich, so kann jede beliebige Axe dazu gewählt werden. Jede Axe, die zur senkrechten Axe gewählt werden kann, heifst Haupt-Axe, und wenn sie dazu gewählt worden, Normal-Axe, die übrigen Axen heifsen Neben-Axen. Bei gleichen Axen eines Krystalls ist also jede derselben Haupt-Axe, und der Krystall gehört dem regulären System an.

Bei den einaxigen Formen ist entweder nur eine einzige Axe, die keine ihr gleichartigen hat; hier ist dann diese Axe die einzige Haupt-Axe, und das zweite und dritte System von dieser Eigenschaft. Oder es sind mehrere Axen, von denen keine eine ihr gleichartige hat; bei solchem System kann jede dieser Axen zur Normal-Axe genommen werden, und das vierte, fünfte und sechste System ist von dieser Eigenschaft.

Die Neben-Axen, welche sich in ihren Mitten schneiden, werden von der Normal-Axe in demselben Durchschnittspunkt geschnitten. Sind nur 2 Neben-Axen, überhaupt also 3 Axen vorhanden, so liegen die ersteren in einerlei Ebene; sind 3 Neben-Axen vorhanden, so müssen diese ebenfalls in einerlei Ebene liegen.

Die Ebene der Neben-Axen heifst die Basis oder Grundebene des Krystalls. Schneidet die Normal-Axe die Basis rechtwinklig, so liegt die Basis horizontal, die Neben-Axen haben gegen die Normal-Axe eine orthobasische Lage. Schneidet sie dieselben unter schiefem Winkel, so liegt die Basis schief, die Neben-Axen haben zur Normal-Axe eine klinobasische Lage. Man theilt daher auch die A. in 2 Hauptheile: A. mit horizontaler Basis und A. mit schief liegender Basis.

Zu dem ersteren gehören die oben aufgeführten ersten 4 A., die —axigen Systeme, zu dem letzteren die letzten beiden A., die —gliedrigen Systeme.

3. Zu genauerem Verständnifs des bisherigen Vortrags folgen hier bildliche Darstellungen, bei welchen der besseren Uebersicht wegen nur Ecken-Axen genommen sind.

1) Das reguläre System zeigt Fig. 138, pag. 257.

Die 3 gleichen in dem Krystall verzeichneten Axen, *AF*, *DG*, *BE*, hälften sich gegenseitig in ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C*, d. h. $AC=CB=CD=CE=CF=CG\,[=a]$ und $\angle ACD=\angle ACB=\angle DCE=90°$.

Jede Axe mithin ist Haupt-Axe; wird *AF* zur Normal-Axe festgestellt, so ist *BDEG* die Basis; für *DG* als Normal-Axe ist *ABFE* die Basis, und wenn *BE* die Normal-Axe ist, *AGFD* die Basis, und die Bezeichnung der Grundform des Krystalls ist $a:a:a$.

2) Das zwei- und einaxige System. Nimmt man in Fig. 138 $BE=DG$, dagegen $AF \lesseqgtr DG$, ferner $\angle ACG=\angle ACE=\angle DCE=90°$, so gehört der Krystall diesem zwei- und einaxigen System an. Die beiden sich gleichen Axen *DG* und *BE* sind nun Neben-Axen; die ungleichartige Axe *AF* ist allein Haupt-Axe, wird senkrecht gestellt, die eine der Neben-Axen, z. B. *DG*, dem Beschauer zugekehrt; die andere, *BE*, ist dann ihm parallel. Die Haupt-Axe wird mit 2*c*, die Neben-Axen werden mit 2*a* bezeichnet und die Bezeichnung der Grundform des Krystalls ist $a:a:c$.

3) Das drei- und einaxige System. Von den hier verzeichneten 4 Axen sind $DE=FG=HI\,[=2a]$, die in einerlei Ebene liegen und in derselben eine gleiche gegenseitige Lage haben, so dafs jeder $\angle$, den zwei benachbarte Axenhälften mit einander bilden, wie $\angle FCD=60°$ beträgt, die vierte Axe *AB* ist $\lesseqgtr DE\,[=2c]$. Diese letztere ungleichartige Axe ist die alleinige Haupt-Axe, die 3 vorher betrachteten sind die Neben-Axen und die Ebene *DFIEGH*,

Fig. 147.




ein regelmäfsiges Sechseck, die Basis des Krystalls. Bezeichnung der Grundform ist $a:a:\infty a:c$.

Hierbei ist Folgendes zu erörtern nothwendig: die Bezeichnung der Grundform eines Krystalls durch $a:a:a$ oder $a:a:c$, wie bei dem Krystall Fig. 138, heifst, dafs jede einzelne Fläche jede der 3 Axen in ihren Endpunkten schneidet. So z. B. schneidet die Fläche *AEF* die Axe $DE=2a$, also die halbe Axe $CE=a$ in *E*, die Axe $GF=2a$, also $CF=a$ in *F*, und die Axe $AB=2a$ oder 2*c*, also $CA=a$ oder $=c$ in *A*.

Bei der Grundform, Fig. 147, dagegen schneidet jede Fläche nur 3 Axen, nämlich die Haupt-Axe *AB* und 2 Neben-Axen, mit der dritten Neben-Axe aber liegt sie ≑, d. h. sie schneidet diese Axe in unendlicher Ferne. Z. B. die Fläche *AFI* schneidet $CA=c$ in *A*, $CI=a$ in *I* und $CF=a$ in *F*, und läuft mit der Axe $DE=a$ ≑; woher die Bezeichnung des Krystalls in Folge der eben gedachten eigenthümlichen Lage jeder einzelnen Fläche zu den Axen die Bezeichnung $a:a:\infty a:c$ erhält.

4) Das ein- und einaxige System. Zur Veranschaulichung dieses Systems hat man Fig. 148. Die 3 Axen, *AB*, *DE* und *FG*, sind einander ungleich, dagegen die $\angle ACD$, *ACF* und *DCF* einander gleich und $=90°$. Da alle 3 Axen ungleich sind, so kann jede derselben zur Normalaxe genommen werden. Hat man *AB* zur Normalaxe gewählt, so wird diese senkrecht gestellt. Von den beiden andern Nebenaxen, die nun waagerecht liegen, nimmt man die kleinere *FG* als erste Nebenaxe [2*a*], dem Beschauer angekehrt, die gröfsere *DE* als zweite Nebenaxe [2*b*], dem Beschauer ≑, die

Normalaxe *AB* bezeichnet man mit *c* und die Bezeichnung der Grundform ist *a*:*b*:*c*.

Fig. 148.




5) Das zwei- und eingliedrige System.

Da keine der 3 Axen eine ihr gleichartige hat, so ist jede derselben Hauptaxe. Man nimmt jedoch zur Normalaxe eine der beiden, welche die schiefwinklige

Fig. 149.

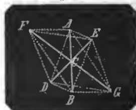



Neigung zu einander haben, so dafs, da diese senkrecht gestellt wird, die Basis nicht horizontal, sondern schief liegend ist. Bezeichnet man diese Fig. 149 mit *AB* (=2*c*), so stellt man die zweite *DE*, welche mit *AB* die beiden schiefen ∠*ACD* und ∠*ACE* bildet, dem Beschauer als erste Nebenaxe (2*a*) gegenüber und die rechtwinklig auf beide genannten Axen gerichtete dritte Axe *FG* ⫩ dem Beschauer als zweite Nebenaxe (2*b*). Die Bezeichnung der Grundform ist *a* : *b* : *c*.

6) Das ein- und eingliedrige System.

Zur Veranschaulichung dieses Systems hat man Fig. 150, wo aufser der Ungleichartigkeit der Axen nicht nur ∠*ACE*, sondern auch ∠*ACG* und ∠*DCG* schief ist. Hier kann jede einzelne Axe Normalaxe (2*c*) und erste Nebenaxe (2*a*) und zweite Nebenaxe (2*b*) sein; die Basis ist

Fig. 150.




immer schief liegend und die Bezeichnung der Grundform ist *a* : *b* : *c*.

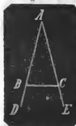
**Axenwinkel** (bei Krystallen), ist der Winkel, unter welchem die Axen des Krystalls sich schneiden (s. Axen der Krystalle, Axensystem).

**Axiom** (Grundsatz), wird in der Regel definirt als „ein Satz, der an sich so augenscheinlich ist, dafs er keines Beweises bedarf." Besser: „ein Satz, dessen Wahrheit unmittelbar durch die Anschauung erkannt wird." Wenn nämlich die Einführung des Begriffs: Beweis, als etwas, das zum A. nicht gehört?

Die Definition von A. führt aber offenbar auf die Frage: Welch ein Satz ist das, dessen Wahrheit, wenn er Wahrheit enthält, nicht unmittelbar durch die Anschauung erkannt wird, und wie wird dessen Wahrheit erkannt? — Antw.: Jeder solcher Sätze ist ein Lehrsatz, und dessen Wahrheit wird mit Hülfe des Beweises erkannt.

Z. B. Euklid 5ter Satz, Lehrsatz: „In jedem gleichschenkligen Triangel *ABC* sind die Winkel an der Grundlinie *ABC*, *ACB* einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel *AB*, *AC* verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich."

Fig. 151.




Ist die Figur richtig gezeichnet, so hat Jemand vielleicht mit Hülfe des Augenmaafses durch blofse Anschauung die Ueberzeugung von der Wahrheit des Satzes, er lehnt den Beweis ab; der obigen Definition nach ist der Satz ihm ein A. Dasselbe ist auch wohl bei einem Menschen der Fall, ohne dafs er sichtbare Zeichnung erhält, indem er sich die Figur vermöge der Einbildungskraft im Geist construirt, wo sie dann gewifs fehlerlos wird. Ein Anderer sieht es durch die blofse

Anschauung nicht ein, und es mufs ihm bewiesen werden. Euklid thut dies folgendermafsen:

Fig. 152.




Er trägt auf $AD$ und $AE$ zwei gleich grofse Linien $AF$ und $AG$ und zeichnet die geraden Linien $CF$ und $BG$.

Nun ist

1) nach Voraussetzung $AC = AB$
2) nach Construction $AF = AG$
3) vermöge Grundsatz $\angle A = \angle A$

4) folglich $\triangle ACF \cong \triangle ABG$
5) und $FC = GB$
6) auch $\angle AFC = \angle AGB$
7) und mit Hülfe von 1 und 2 vermöge Grundsatz $BF = CG$

8) Aus 5, 6, 7 folgt $\triangle FCB \cong \triangle GBC$
9) Hieraus $\angle FCB = \angle GBC$
10) und $\angle FBC = \angle GCB$
11) oder $\angle DBC = \angle ECB$

also die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

12) Aus 4 folgt $\angle ABG = \angle ACF$
13) Also mit Hülfe von 9 grundsätzlich $\angle ABC = \angle ACB$

also die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

In diesem Beweise sind die Sätze 1 und 2 als Voraussetzung, nämlich als Grundbedingung für die zu beweisende Wahrheit, und als Construction, also als eine geschehene Handlung, von Niemand als richtig zu läugnen. Satz 3 beruht auf einem Grundsatz, den Euklid nicht für werth gehalten hat, in allgemeinen Worten voranzustellen, nämlich den Satz: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich," und er als Beweisführer verlangt, dafs von seiner Anwendung dieses allgemeinen Satzes: $\angle A = \angle A$ Niemand einen Beweis fordere, sondern als einen an sich selbst richtigen Satz betrachte.

Die Folgerung 4, dafs 2 Dreiecke, wenn je 2 Seiten und die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich, einander congruent sind, mag Mancher an sich klar finden, auf den Beweis des Satzes verzichten, allein Euklid verlangt dies nicht, er hat den Satz als 4ten Satz und als ersten Lehrsatz vorangestellt und ihn bewiesen, wovon weiter unten. Die Sätze 5 und 6 gehören unmittelbar zu dem ebengedachten Lehrsatz; Satz 7 aber beruht auf dem von Euklid aufgestellten 3ten Grundsatz: „Von Gleichem Gleiches hinweggenommen, läfst Gleiches," und Euklid verlangt wieder, dafs Niemand den Beweis davon fordere, sondern ihn als an sich klar einsehe.

Die Sätze 8 bis 12 folgern sich aus dem oben gedachten 4ten Lehrsatz, und der 13te Satz aus dem schon gedachten Euklidischen Grundsatz.

Der Beweis von Satz 5 beruht also auf zweien Grundsätzen und einem Lehrsatz: Dieser Satz als erster Lehrsatz des ganzen Euklidischen Lehrgebäudes konnte nur mit Hülfe von Grundsätzen bewiesen werden.

Fig. 153.




Sind nämlich $AB = DE$
$AC = DF$
$\angle BAC = \angle EDF$

so beweist Euklid die Congruenz der beiden Dreiecke und die Gleichheit der übrigen Seiten und Winkel wie folgt:

Bringe den Triangel $ABC$ auf den Triangel $DEF$ und lege $A$ auf $D$ und $AB$ auf $DE$. Da $AB = DE$, so fällt $B$ auf $E$. Da $BAC = EDF$, so fällt $AC$ auf $DF$. Da $AC = DF$, so fällt $C$ auf $F$.

Diese 3 Schlüsse macht Euklid ohne weitere Begründung, er setzt also voraus, dafs Niemand einen Beweis für dieselben verlange.

Für den 1sten und den 3ten Schlufs gehört aber offenbar der Grundsatz: „Gerade Linien, die einander gleich sind, können in eine Lage gebracht werden, dafs sie sich decken," und dieser Grundsatz wird um so mehr vermifst, als Euklid den 8ten Grundsatz:

„Was sich deckt, ist einander gleich," aufgestellt hat. Der zweite Schlufs ist: Gleiche Winkel können so auf einander gelegt werden, dafs beide Schenkel über einander fallen; ein Satz, den Euklid ebenfalls stillschweigend als nothwendig wahr anerkannt wissen will.

Euklid fährt fort: Nun fällt nach Obigem auch *B* auf *E*. Folglich fällt *BC* auf *EF*. Dieser Schlufs ist mit dem 12ten Grundsatz begründet: Zwei gerade Linien schliefsen keinen Raum ein, welches aber stattfinden würde, wenn *BC* oberhalb oder unterhalb *EF* fiele. Der Schlufs aber beruht offenbar viel einfacher auf dem von Euklid nicht aufgestellten Grundsatz: „Zwischen zweien Punkten ist nur eine gerade Linie möglich." Hieraus ginge denn hervor, dafs die gerade Linie *BC* gedeckt wird, und hieraus wieder mit Hülfe des 8ten Grundsatzes, dafs beide gerade Linien einander gleich sind.

Endlich sagt Euklid ganz richtig: folglich ist (8. Grundsatz) $BC = EF$; $\triangle ABC = \triangle DEF$; $\angle ABC = \angle DEF$; $\angle ACB = \angle DFE$.

Alle folgenden Lehrsätze im Euklid werden mit Berufung auf den 4ten Satz, als den ersten Lehrsatz, und auf Grundsätze bewiesen, mithin beruht die Wahrheit des ganzen Euklidischen Lehrgebäudes nur auf Grundsätzen.

Es ist dies aber natürlicher Weise mit jedem anderen Lehrgebäude der Geometrie der Fall; auch stellt jeder Verfasser eines Lehrbuchs nicht dieselben Sätze als Grundsätze auf. So z. B. hat man in Lehrbüchern den 10. Euklidischen Grundsatz: „Alle rechte Winkel sind einander gleich," als Lehrsatz, der bewiesen wird. Wie oben erwähnt, hat Euklid die Deckung gleicher Winkel als von selbst verständlich angesehen; dieser Satz findet sich auch als Lehrsatz und wird bewiesen, nachdem die Erklärung: was unter kleineren und gröfseren Winkeln zu verstehen ist, vorausgeschickt worden.

Denn kein Mensch denkt wie der andere, es müfste denn zufällig sein, gewifs aber denkt jeder Mensch selbstständig; mithin liegt es in dem Gedankensystem eines jeden Verfassers von Lehrbüchern über Mathematik, welche Sätze er als an sich verständlich voranzustellen und sein Lehrgebäude darauf zu gründen geeignet findet.

Wenn aber Philosophen behaupten, dafs mathematische Beweise keine Beweise sind, weil sie sich auf Sätze gründen, auf Grundsätze, die nicht zu beweisen sind, so ist das ein Irrthum: Von allen den Wahrheiten, die in der Welt uns gegeben sind, bedarf für den Geist, der sie zu fassen vermag, keine einzige des Beweises. Dafs Wahrheiten uns tiefer liegen als andere, dafs jene zusammengesetzter, diese einfacher sind, liegt nicht in den Wahrheiten, sondern in uns selbst, in der Unvollkommenheit unseres Geistes. Dem Forschersinn des Menschen, der auch jene ihm tiefer liegenden Wahrheiten möglichst ergründen wollte, war es also nöthig, die zusammengesetzteren Wahrheiten aus zunächst einfacheren, von ihm erkannten Wahrheiten als nothwendig wahr abzuleiten, und um eine Wissenschaft zu gründen, zu erforschen, ob Sätze, die selbstredend wahr sind, nicht dennoch zusammengesetzt wären, und auf noch einfachere Sätze, auf Sätze, die noch viel eher selbstredend wahr sind, als Folgerungen zu begründen.

Der einfachste Satz, ein als wahr unbestreitbarer Satz (es giebt Philosophen, die Alles bestreiten, welche die Vernunft erfinden wollen und nicht daran denken, dafs sie vom Schöpfer den ihnen gebührenden Theil davon erhalten haben), also ein Grundsatz ist: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich." Wollte nun ein Gelehrter die ganze Arithmetik auf diesem einzigen Grundsatz als Fundament aufbauen, so hätte er nur nöthig, eine beliebige Gröfse als 3 Mal einzeln vorhanden sich zu denken, und er könnte den sonst als Grundsatz geltenden, offenbar zusammengesetzteren Satz: „Wenn zwei Gröfsen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich," als ersten Lehrsatz ganz streng beweisen.

Für die Geometrie freilich ist noch wenigstens ein Grundsatz erforderlich, denn Raumgröfsen haben einen anderen Charakter als die nur in Einheit und Vielheit bestehenden Zahlengröfsen, und der Raum, dieser Begriff ohne alle Merkmale, hat erst als in 3 Richtungen vorhanden erkannt werden müssen. Nachdem die nöthigen Erklärungen von Punkt, gerader und krummer Linie, Richtung u. s. w. aufgestellt worden, könnte der obengedachte Grundsatz sein: „Gerade Linien decken sich in allen Punkten." Dann könnte man die eine Linie von der anderen entfernen, und zwar, indem man die oberste um einen mittleren Punkt dreht: es entstehen zwei sich schneidende Linien und Winkel von verschiedener Gröfse; auf einer Seite werden sie kleiner, auf der anderen gröfser, an einem Ort beide einander gleich (rechte Winkel). Wenn man eine zunächst untere dritte Linie von der darüber befindlichen

sie deckenden Linie entfernt, ohne ihre Richtnng zu ändern, so entstehen Parallelen, (nnd da man die Linien beliebig lang denken kann), die sich nie schneiden; die oberste schneidet nnn beide, nnd deren gleichliegende Winkel haben sich gedeckt, sind also einander gleich n. s. w.

Somit könnte, sage ich, das ganze Lehrgebände der Arithmetik anf dem einen Axiom: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich" nnd das Lehrgebäude der Geometrie mit Hülfe eines zweiten: „Gerade Linien decken sich in allen Pnnkten" anfgeführt werden; also auf zweien A., deren Wahrheiten wohl nnmittelbar dnrch die Anschaunng erkannt werden.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs der 11te Enklidische Grundsatz an der Stelle, wo er steht, überraschen mnfs. Ein Grundsatz sollte da seinen Platz haben, wo er in dem nnmittelbar Folgenden zum ersten Male Anwendnng findet; der 11te, also nnmittelbar vor dem 29ten Satz im Euklid.

**Azimuth eines Sterns** ist der Winkel *HZB* oder Bogen *HB* zwischen dem Scheitelkreis *ZSB* des Sterns und dem Meridian *PZH* des auf der Erde befindlichen Beobachtnngsorts. Da der in dem Meridian unendlich weit befindliche Pnnkt Südpnnkt genannt wird, so sagt man für A. anch Sndweite. Das A. ist, je nachdem der Stern in der östlichen oder westlichen Halbkugel sich befindet, östlich oder westlich.

Fig. 154.



Ist *Hh* der Horizont des Beobachtnngsorts *O*, *Z* das Zenith, *P* der Nordpol, also Bogen *Ph* die Polhöhe (*p*) von *O*, *Qq* der Aeqnator, also *SA* die Abweichung des Sterns (*d*) nnd $\angle QPA$ der Stnndenwinkel $\alpha$ von *S* für *O* (nämlich der $\angle$, den der Meridian *QP* des Orts nnd der Abweichnngskreis *AP* im Nordpol *P* als Spitze mit einander bilden), so hat man znerst in dem schiefwinkligen sphärischen $\triangle ZPS$

$$PZ = 90° - p$$
$$PS = 90° - d$$
$$\angle ZPS = \alpha$$

hierans

$$\cot PZS = \frac{\cos PS \cdot \sin PZ - \sin PS \cdot \cos PZ \cdot \cos \alpha}{\sin PS \cdot \sin \alpha}$$

oder $$\cot PZS = \frac{\sin d \cdot \cos p - \cos d \cdot \sin p \cdot \cos \alpha}{\cos d \cdot \sin \alpha}$$

Nnn ist Azimuth $= \angle HZB = 180° - \angle PZS$ also $\cot PZS = -\cot$ Azimnth nnd

$$\cot \text{Azimnth} = \sin p \cdot \cot \alpha - \frac{\cos p \cdot tg\, d}{\sin \alpha}$$

Will man statt des Stundenwinkels die Höhe *SB* (*h*) des Sterns *S* über dem Horizont in die Formel einführen, so hat man $SZ = 90° - h$, und in demselben $\triangle PSZ$:

$$\cos PZS = \frac{\cos PS - \cos PZ \cdot \cos SZ}{\sin PZ \cdot \sin SZ}$$
$$= \frac{\sin d - \sin p \cdot \sin h}{\cos p \cdot \cos h}$$

nnd da $\cos PZS = -\cos$ Azimnth

$$\cos \text{Azimnth} = \frac{\sin p \cdot \sin h - \sin d}{\cos p \cdot \cos h}$$

Setzt man $h$ = Null, so hat man

$$\cos \text{Asimuth} = \frac{-\sin d}{\cos p}$$

nnd zwar das A. des Sterns in dem Augenblick seines Auf- oder Untergangs.

Dieses A. $\pm$ der Morgenweite oder der Abendweite des Sterns beträgt 90°, nnd zwar +, wenn das A. kleiner, nnd −, wenn es gröfser als 90° ist; daher stimmt diese Formel anch mit der für die Abendweite (pag. 3)

$$\sin \text{Abendweite} = \frac{\sin \text{Abweichung}}{\sin \text{Aeqnatorhöhe}}$$

weil die Aeqnatorhöhe nnd die Polhöhe jedes Orts der Erde zu einem Quadrant sich ergänzen.

**Azimuth der Magnetnadel.** Der Winkel, den der magnetische Meridian mit dem astronomischen M. eines Orts bildet. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

**Azimuthal-Compafs.** Ein Schiffs-C., der zur Beobachtung des Azimuths der Sonne oder eines Sterns mit diametral gegenüberstehenden Dioptern und einem in Grade abgetheilten Rande versehen ist, so dafs man das magnetische Azimuth der Sonne oder des Sterns unmittelbar erhält.

**Azimuthalkreis** ist bei einem feststehenden Winkel-Instrument ein horizontaler in Grade getheilter Kreisring, dessen Durchmesser durch 0° und 180° unverrückbar in der Mittagslinie liegt. Um diesen Kreis wird für die Beobachtung eines Gestirns das Instrument gedreht, wo dann der Winkel, den die Richtung des Gestirns mit der Mittagslinie bildet (das Azimuth), auf dem A. unmittelbar abgelesen werden kann. Ein ungefähres Bild von dem A. hat man Fig. 35, pag. 35, dem Aequatoreal, in dem Aequatorealkreis *ab*, wenn man sich denselben horizontal, und statt dafs er mit dem Instrument sich dreht, sich fest und die Säule *cd* um denselben sich drehend vorstellt.

**Azimuthalwinkel** s. v. w. Azimuth.

# B.

**Baculometrie** ist die Feldmefskunst mit Hülfe von **Kette** und **Stäben** (baculus, der Stab), bei welcher man also kein Winkel-Instrument anwendet. Linien, die vermessen werden sollen, werden zuvor abgesteckt (s. Absteckung von Linien auf dem Felde, pag. 17). Eine zu vermessende Fläche wird in möglichst grofse Haupt-Dreiecke eingetheilt, indem man in die gewählten Winkelspitzen lange Stangen steckt, die der Auszeichnung wegen oben oft mit Fähnchen versehen werden, und die bis zum Ende der ganzen Vermessung stehen bleiben. Ist die Entfernung zweier solcher Punkte sehr grofs, oder coupirtes Terrain dazwischen, so werden noch Zwischenstangen einvisirt. Die Hauptstangen werden **Signalstangen**, **Signale** genannt, die Zwischenstangen **Absteckstangen**, **Absteckstäbe**. Man erleichtert die Arbeit, wenn man die Seiten der Haupt-Dreiecke nach natürlichen, weit sichtbaren Objekten richtet, als von einem gewählten Punkt aus nach einer Thurmspitze, einem hohen Baum u. s. w.

Die Länge jeder einzelnen Dreiecksseite wird mit der Kette unmittelbar vermessen. Die **Kette**, die Preufsische Mefskette, hat 5 Ruthen Länge in 50 Gliedern aus Runde isen, jedes $\frac{1}{10}$ Ruthe lang, deren Endösen durch Ringe an einander gereiht

Fig. 155.



werden. Jedes 10te und 11te Glied erhält ein Zwischenstück mit 1, 2, 3 oder 4 Spitzen in dem mittleren Steg, welche

Fig. 156.



die Anzahl Ruthen bezeichnen, und jedes 5te und 6te Glied ein ähnliches kleineres

Fig. 157.



Zwischenstück, den Steg ohne Spitze, welches $\frac{1}{2}$ Ruthe bezeichnet; die beiden Endglieder erhalten weitere Endringe, die auf runde hölzerne **Kettenstangen** geschoben werden, mit welchen die Kette durch 2 **Kettenzieher** gehandhabt wird.

Die Kettenstangen haben unten einen eisernen Beschlag, der in einem Teller, Kreuz oder Stift, worauf der Kettenring ruht, nebst starker Spitze besteht, die in

Fig. 158.



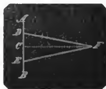
den Erdboden bis zum Teller eingestofsen wird.

Der erste Kettenzieher hat diejenige Kettenstange, von der aus die Ruthen nach 1, 2, 3, 4 in den Zwischenstücken zählen, steckt die Spitze in den Anfangspunkt der Linie, der zweite Kettenzieher spannt die Kette möglichst gerade, tritt zur Seite der Linie, hält die Kettenstange lothrecht an der Hand, hat das Auge auf den ersten Kettenzieher, und dieser durch Winken mit der Hand nach rechts oder links visirt sie ein. Steht die Stange in der zu messenden Linie, so schlänkert der zweite die Kette zur straffen geraden Linie, steckt die Stange so ein, dafs die Kette das erste Loch der Kettenstange deckt, weil nur so die Stange in der Linie verbleibt. Nun hat der zweite vorangehende Kettenzieher an einem Drahtringe 10 Stück eisendrahtene Stäbe (Kettenstäbe, nach welchen die Bezeichnung: „Mit Kette und Stäben") von etwa 8 Zoll Länge, unten mit Spitze, oben mit etwas grofser Oese versehen; einen davon nimmt er vom Ringe ab, zieht die Kettenstange aus, steckt den Stab ein, dafs er sichtbar bleibt und geht in der Richtung der Linie weiter, bis der Erste an des Zweiten Stelle gekommen ist. Dieser nimmt den Stab heraus, setzt die Kettenstange ein, visirt die lothrecht gehaltene Kettenstange des Zweiten wieder in die Linie, dieser schlänkert die Kette straff u. s. f.; der Feldmesser geht neben dem ersten Kettenzieher mit, überwacht die Genauigkeit des Verfahrens und verzeichnet in seinem Manual Vorkommnisse, als Wege, Gräben, Grenzhügel und dergl. mit Angabe der gemessenen Totallänge der Linie, wo solche eintreten. Hat der erste Kettenzieher den 10ten Kettenstab aufgenommen, so sind 50 Ruthen vermessen, er giebt die 10 Stäbe dem vorderen Mann zurück, und der Feldmesser notirt die 50 Ruthen.

Kommen in der Linie Hindernisse vor, als Sumpf, Stromkrümmung und dergl., so mufs von der Linie abgegangen und eine derselben Parallele genommen werden. Die Parallele steckt man am leichtesten ab, wenn man in zwei möglichst fern von einander liegenden Punkten der ursprünglichen Linie auf derselben gleich lange Normallinien errichtet, deren Endpunkte durch Absteckstangen bezeichnet und diese Linie so weit durch Stangen verlängert, bis man wieder in die erste Linie eintreten kann.

Soll nun eine Normale in $C$ auf $AB$ errichtet werden, so mifst der Feldmesser $CD = CE = 5$ Fufs ab, die eine Kettenstange wird in $D$, die andere in $E$ gesteckt, festgehalten, der Feldmesser ergreift die Kette in der Mitte, zieht straff,

Fig. 159.




steckt in $F$ einen Kettenstab, so ist $DF = EF = 2{,}5'$ und $CF$ eine Normale, welche von $C$ aus über $F$ mit der Kette beliebig verlängert wird. Ist die Vermessung von $A$ her bis $C$ geschehen, so wird die Vermessung von $F$ oder von einem anderen Punkt in $CF$ aus unmittelbar in der Parallelen fortgesetzt.

Will man der gröfseren Genauigkeit wegen ein längeres Perpendikel als $CF$ abstecken, so nimmt man $CE$ = der halben Kettenlänge = 2,5°, steckt die eine Kettenstange in $C$, die zweite in $E$, ergreift die Kette in der Mitte, zieht bis $D$ aus, steckt in $D$ einen Stab, hält $E$ fest, läfst $C$ los, schwenkt mit der ganzen Kette bis über $D$ nach $F$, so ist $CF$ die Normale auf $AE$ in $C$.

Fig. 160.




Denn $CE = CD = ED$
daher $\angle DCE = 60° = CDE$
also $\angle CDF = 120°$
daher $\angle FCD + CFD = 60°$
und da $CD = DF$
so ist $\angle FCD = 30°$
folglich $\angle DCE + \angle FCD = 90°$

Bei Abpfählung von Chausseestrecken, wenn man den Nummerpfahl zur Seite der Linie einzuschlagen hat, verzeichnet

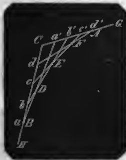
man einen rechten ∠ über *C* auf *AE* am leichtesten, und erhält zugleich den Ort für den Pfahl, wenn man von der Kettenlänge $CE = 1{,}2°$ nimmt, die Kettenstangen in *C* und *E* einsetzen und festhalten läfst; man nimmt von *C* aus $1{,}6°$ und von *E* aus $2°$, führt beide Längen mit beiden Händen zusammen, so treffen sie in *F* normal über *C*, weil

$$20^2 = 16^2 + 12^2$$

Um eine bogenförmige Verbindung zwischen zweien unter einem Winkel zusammentreffenden Chausseerichtungen mit Kette und Stäben abzupfählen, verfährt man am einfachsten folgendermafsen:

Man vermerke den Schneidungspunkt *C* der beiden zu verbindenden Richtungen *AG* und *BH*. Je nachdem die Ortsver-

Fig. 161.

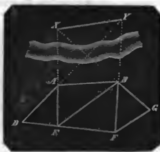



hältnisse es möglich machen, stecke von *C* gleiche oder ungleiche Längen *CA* und *CB* ab, theile jede dieser Längen in gleich viel. z. B. 4 gleich grofse Theile, stecke ab die geraden Linien *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, so geben die abzupfählenden Durchschnittspunkte *D*, *E*, *F*, Punkte der Verbindungscurve; man messe die Linien $BD + DE + EF + FA$, die nun in die Charte ganz genau einzutragen und aus der Charte auf dem Felde wieder zu finden sind.

Hat man die Länge einer, in ganz unwegsamem Terrain liegenden Linie *XY* zu bestimmen und kein Winkel-Instrument bei der Hand, so stecke eine Gerade *AB* ab, desgleichen möglichst lange Linien *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, als rückwärts genommene Verlängerungen der Visirlinien *AX*, *AY*, und *BX*, *BY*; verbinde *DE*, *EF*, *EB* und *FG*, messe alle diese Linien, trage die Dreiecke auf, so erhält man nach demselben Maafsstabe auf dem Papier die gerade Linie *XY*, indem man *EA* und *GB*, dann *DA* und *BF* bis zu ihren Durchschnittspunkten rückwärts verlängert.

Die Vermessung mit Kette und Stäben gewährt für Feldmarken, Feldertheilung, Grenzen, Chausseen u. s. w. hinreichende

Fig. 162.




Genauigkeit, wenn man mit der Kette nicht zu schlimm umgeht und ordentliche und willige Kettenzieher hat.

**Bahn** ist der Weg eines sich bewegenden Punkts in Absicht auf Länge und Gestalt; also eine Linie und daher entweder eine gerade oder eine krumme Linie. B. einer Linie ist die B. des Mittelpunkts ihrer Länge, B. einer Fläche die B. des Mittelpunkts ihres Flächenraums, und B. eines Körpers die B. des Mittelpunkts des von ihm eingeschlossenen körperlichen Raums. Eine B. wird beschrieben oder durchlaufen. Die B. setzt also etwas Bewegtes voraus, mit diesem eine Bewegung und deren Ursach, nämlich eine Kraft oder eine Summe zusammenwirkender Kräfte; und Körper, Flächen und Linien, die bewegt werden, können in ihren Abmessungen bis an deren Mittel verschwindend und deren Masse in diesem einen Punkt, einen materiellen Punkt, Massenpunkt vereinigt gedacht und dessen Bewegung betrachtet werden.

Eine Kraft wirkt immer nur nach einer geraden Linie; ein Massenpunkt, von nur einer Kraft angegriffen, kann also nur eine geradlinige Bahn beschreiben. Desgleichen ein Massenpunkt, der von 2 augenblicklich nur als Stofs wirkenden Kräften nach verschiedenen Richtungen getroffen wird: Empfängt der Massenpunkt *M* durch die Kraft *P* einen augenblicklichen Stofs, so dafs er in der ersten Zeit-Einheit (Secunde) den Weg *MB* zurücklegt, so wird er in jeder folgenden Secunde einen mit *MB* gleich grofsen Weg zurücklegen, und *MB* wäre die Richtung seiner B., die so lange Zeit immer weiter verfolgt wird, bis eine andere

auf $M$ treffende Kraft sie abändert. Empfängt $M$ durch die Kraft $P'$ einen Stofs, der ihn in der ersten Secunde durch $MA$ führt, so wird er in jeder folgenden Secunde den mit $MA$ gleich grofsen Weg zurücklegen und $MA$ ist die Richtung seiner B.

Fig. 163.

2. Wirken nun $P$ und $P'$ gemeinschaftlich und gleichzeitig auf $M$, so kann keine von beiden Richtungen $MB$, $MA$ eingeschlagen werden: es wird eine mittlere Richtung zusammengesetzt. Denn die Bewegung von $M$ geschieht offenbar so, als wenn $M$ durch $P$ nach $B$ und gleichzeitig durch $P'$ nach $A$, also von $B$ nach $C$ geführt würde; oder als wenn $M$ durch $P'$ nach $A$ und zugleich durch $P$ nach $B$, oder, was dasselbe ist, von $A$ nach $C$ geführt würde. Mithin ist $C$ der Ort, in dem $M$ nach Verlauf der ersten Secunde sich befindet; $MC$ (die Diagonale des ⧣ $MABC$) der Weg von $M$ in der ersten Secunde, und die Richtung der Bahn von $M$. Man nennt $MA$ und $MB$ die Seitengeschwindigkeiten, $MC$ die Mittelgeschwindigkeit, $MBAC$ das Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

3. Die Verlängerung $CD$ (= $MC$) von $MC$ würde der Weg von $M$ in der zwei-

Fig. 164.

ten Secunde sein, wenn weiter keine Kraft-Einwirkung auf $M$ erfolgt. Stellt man sich aber vor, dafs $M$, in $C$ angekommen, noch einen Impuls nach der Richtung $BC$ empfängt, so ist die Länge und Richtung des Weges von $M$ in der zweiten Secunde offenbar eine andere als $CD$.

Um diesen Weg zu erfahren, substituirt man statt der Länge $CD$ ihre Seitenwege $CE = AC$ und $CF = BC$ in den Verlängerungen von $AC$ und $BC$, so entsteht das ⧣ $CEDF \cong MACB$. Empfängt nun $M$ in $C$ noch einen Impuls, der allein thätig $M$ in einer Secunde durch den Weg $FG$ führen würde, so sind in der zweiten Secunde die Seitengeschwindigkeiten $CE$ und $CG$, und das ⧣ gebildet giebt die Diagonale $CC'$ als Mittelgeschwindigkeit; der Massenpunkt beschreibt also in den beiden ersten Secunden die gebrochene Linie $MCC'$.

Verlängert man $CC'$ um die gleiche Länge $C'H$, substituirt in $C'$ wieder die Seitenwege $C'I = GC'$ und $C'H = EC'$, so dafs das ⧣ $C'IHK \cong CEC'G$ entsteht, nimmt an, dafs in $C'$ wiederum ein Impuls auf $M$ geschehe, der allein thätig $M$ in einer Secunde durch die Länge $KL$ triebe, so erhält man die Diagonale $C'C''$ des ⧣ $C'LC''I$ als den Weg von $M$ in der dritten Secunde, die bisher durchlaufene Bahn von $M$ ist die gebrochene Linie $MCC'C''$ u. s. w.

Denkt man sich, dafs die neuen Impulse nicht von Secunde zu Secunde oder überhaupt absatzweise, sondern ohne Unterbrechung geschehen, wie in dem Art.: „Atwood's Fallmaschine" dies von der Schwerkraft der Erde nachgewiesen ist, die nach den parallelen Richtungen $MA$, $BC$, $EC'$, $IC''$... permanent geschehen, und dafs man in einer grofsen Höhe über der Erdoberfläche die Masse $M$ nach $MB$ horizontal wirft, so werden die einzelnen Rechtecke $AB$, $GE$, $LI$... bis zum Verschwinden nahe an einander gerückt und die gebrochene Linie $MCC'C''$ verwandelt sich in eine stetig krummlinige B. Eine ähnliche krummlinige B. entsteht, wenn man von der Erdoberfläche aus eine Masse $M$ schräg in die Höhe wirft, $M$ steigt in krummer Linie und fällt in krummer Linie zur Erde zurück (s. Bahn geworfener Körper).

4. Stellt man sich vor, dafs die Kraft $P$ oder $P'$, z. B. $P'$ eine Zugkraft ist, deren Sitz dann unterhalb $MA$ gedacht werden mufs, und die von einem constanten Punkt $C$ daselbst ihre Wirkung auf $M$ äufsert, während die andere Kraft $P$ in nur einem augenblicklichen Stofs

der Masse *M* eine Anfangsgeschwindigkeit mittheilt, welche *M* in Folge des Beharrungsvermögens auch in den folgenden Zeiten beibehalten will, so hat man in Fig. 165 die bezügliche Darstellung.

Fig. 165.



Die Masse *M* wird durch einen einmaligen augenblicklichen Impuls in 1 Secunde durch die Gerade *Ma* getrieben; während dieser Zeit wirkt die Zugkraft (Centralkraft) in *C* (dem Kraftpunkt) auf *M*, dafs *M* den Weg *Ma'* durchlaufen würde, wenn *M* nicht zugleich durch *Ma* laufen müfste, *M* läuft also durch die Diagonale *MB* des # *MaBa'*. In Folge des Beharrungsvermögens will *M* nach *MB* geradlinig fortgehen, und in der zweiten Secunde den Weg $Bb = MB$ zurücklegen. *C* wirkt aber auf *M* in *B* nach *BC*, und will *B* durch den Weg *Bb'* führen, der Weg von *M* in der zweiten Sec. ist also *BD*. In der dritten Sec. will *M* den Weg $Dd = BD$ geradlinig fortsetzen, *C* will ihn durch *Dd'* treiben und *M* durchläuft die Linie *DE* u. s. w. Die Bahn von *M* ist *MBDEFGH* u. s. w. Da die Centralkraft nicht absatzweise, sondern permanent wirkt, so kann man jedes # für eine sehr kleine, im Verschwinden begriffene Zeit geltend betrachten, die # rücken also so nahe an einander, dafs die Bahn zu einer stetigen krummen Linie wird, und zwar der Zeichnung nach zu einer Ellipse.

Eine Ellipse ist nämlich die Bahn eines jeden Planeten um die Sonne als Centralkraft, als Zugkraft, Anziehungskraft. Es ist ferner beobachtet, dafs diese Centralkraft um so wirksamer wird, je näher ihr die bewegte Masse *M* kommt, ein Gesetz, das später auch erwiesen worden ist, so wie im Art.: „Attraction" No. 10 angegeben worden, dafs die Wirkung der Centralkraft auf die bewegte Masse umgekehrt wie die Quadrate beider Entfernungen sich verhält. So ist denn die Zeichnung gefertigt und

$$Ff > Ee' > Dd' > Bb' > Ma'$$

angenommen. Von *G* ab entfernt sich die Masse wieder von *C*, die Anziehungskräfte werden wieder kleiner, bis die Masse in *M* zurückkehrt, um von Neuem ihre Bahn zu durchlaufen.

5. Die ad 4 betrachtete Centralbahn, wonach dieselbe elliptisch wird, ist in der Bewegung der Weltkörper, also in der Natur begründet. Der ursprüngliche Impuls auf die Masse *M* kann aber so stark gedacht werden, dafs diese eine Curve beschreibt, die von dem Kraftpunkt sich fortdauernd entfernt. Dies führt auf eine allgemeinere Untersuchung, die in dem Artikel: Bahn der Weltkörper erfolgen soll.

Fig. 166.



6. Vorläufig mache ich auf ein äufserst wichtiges Gesetz aufmerksam, welches für alle Centralbahnen gilt, die Curve sei elliptisch oder anders gestaltet; ein Gesetz, welches aus einer einfachen geometrischen Betrachtung entspringt.

Bei allen Centralbahnen waltet die aus dem Beharrungsgesetz als nothwendig entspringende Bedingung vor, dafs durch

den ersten Impuls auf $M$ in jedem sehr klein zu denkenden Zeittheilchen ein Weg beschrieben wird, der wie $MB$ als gleichförmig durchlaufen zu betrachten ist, und dafs die Masse $M$ denselben Weg wie $Bb = MB$ oder wie $Ff = FE$ in dem folgenden gleichen, sehr kleinen Zeittheilchen und nach gleicher Richtung mit dem vorher beschriebenen sehr kleinen Wege wiederum beschreiben will.

Zieht man in Fig. 165 die Geraden $aC$, $bC$, $dC$, $eC$ u. s. w., so hat man

$$\triangle MCa = \triangle MCB$$

weil beide einerlei Grundlinie $MC$ und gleiche Höhen $aM$, $Ba'$ haben.

$$\triangle MBC = \triangle BbC$$

weil beide gleiche Grundlinien $MB$, $Bb$ und einerlei Höhe haben.

$$\triangle BbC = \triangle BDC$$

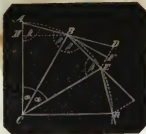
weil beide einerlei Grundlinie $BC$ und gleiche Höhen $bB$, $Db'$ haben,

$$\text{also } \triangle MBC = \triangle BDC$$

Ebenso findet man $\triangle BDC = \triangle DEC = \triangle EFC$ u. s. w., und da die Inhalte der genannten Dreiecke von der Ab- oder Zunahme der Centralkraft ganz unabhängig sind, so hat man das Gesetz: Bei jeder Centralbewegung werden in gleichen Zeiten vom Radius vector (der geraden Linie vom Kraftpunkt $C$ nach dem jedesmaligen Ort der Masse $M$) gleiche Flächenräume beschrieben. Dies Gesetz ist von Kepler durch Beobachtungen gefunden und später von Newton bewiesen worden.

Man hat für die No. 4 und 5 betrachtete Centralbewegung einen eingeschränkten Fall in der Bewegung von Massen in einem Kreise, wie beim Schwungrade, oder wenn man einen Stein an einem straffen Faden im Kreise herumschwingen läfst.

Fig. 167.




Erhält nämlich die Masse $M$ in $A$ durch einen Impuls $P$ (hier Schwungkraft genannt) eine Bewegung von der Geschwindigkeit $V$ per Secunde, so dafs sie in der sehr kleinen Zeit $t$ den Weg $AB = Vt$ zurücklegt, so würde sie in der folgenden gleichen Zeit $t$ die Verlängerung $BD$ zurücklegen, wenn nicht gleichzeitig die in $C$ wirkende Centralkraft $P'$ sie anzöge, so dafs sie einen Weg $BE$ zurücklegen mufs. Soll nun die Bahn der Masse $M$ ein Kreis sein, so mufs $CA = CB = CE = r$ und $BE = BD = AB$ sein, wo dann das dritte um $C$ liegende $\triangle CEG$ und jedes folgende zu $t$ gehörende $\triangle$ dem $\triangle CAB \cong \triangle CBE$ ebenfalls $\cong$ werden mufs.

Aus den mit $\beta$ bezeichneten gleichen Winkeln geht hervor,

$$\begin{array}{ll} \text{dafs} & \angle DBE = 180° - 2\beta \\ \text{und da} & 2\beta = 180° - \alpha \\ \hline \text{so ist} & \angle DBE = \alpha \\ \text{folglich} & \angle BDE = \angle BED = \beta \\ \text{und} & DE \perp BC \end{array}$$

Fällt man also aus $B$ auf $DE$ eine Normale $BF$, so ist diese auch normal auf $BC$, und da $BF$ die Seite $DE$ halbirt, $DF$ die Länge, um welche die Masse $M$ durch die Kraft $P$ innerhalb der Zeit $t$ entfernt werden sollte und um welche zugleich die Centralkraft $P'$ dieselbe zurückgeführt hat.

Da beide Kräfte die Centralkraft $P'$ in $C$ und die Schwungkraft $P$ die Masse $M$ in einerlei Zeit $t$ durch einerlei Weg $DF$ geführt haben, so sind beide Kräfte $P$ und $P'$ einander gleich; $P'$ als absolute Kraft auf $M$ wirkend, giebt die beschleunigende Kraft $\frac{P'}{M} = \frac{P}{M}$, deren Beschleunigung $G$ ist $g \cdot \frac{P}{M}$ und der Weg $DF$ kann ausgedrückt werden durch

$$Gt^2 = g \frac{P}{M} t^2$$

(s. Atwood's Fallmaschine, pag. 171).

Nun ist $DF = BD \cos\beta = AB \cos\beta$; also wenn man die Normale $BH$ auf $AC$ fällt,

$$DF = AH = \frac{AB^2}{2r} = g \frac{P}{M} t^2$$

und da $AB = vt$

$$\frac{v^2 t^2}{2r} = g \frac{P}{M} t^2$$

woraus die Schwungkraft

$$P = \frac{v^2}{2gr} M$$

$$\text{und } v^2 = 2gr \cdot \frac{P}{M}.$$

In der bis zum Verschwinden kleinen Zeit $t$ fallen die Sehnen $AB$, $BE$ ... mit den Bogen zusammen, so wie auch $P$ von $t$ überhaupt unabhängig ist.

Die hier ermittelte Schwungkraft $P$ und die Geschw. $V$ werden in dem Art: Bahn der Weltkörper als äufserst wichtige Gröfsen wieder vorkommen.

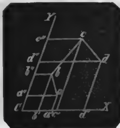
7. Eine geradlinige Bahn entsteht also, wenn auf eine Masse eine Kraft oder mehrere Kräfte durch Impuls wirken und die Masse dann dem Beharrungsstande überlassen. Für eine krummlinige B. ist jedoch aufser einem Impulse noch eine zweite während der ganzen Bewegung auf die Masse permanent einwirkende Kraft vorauszusetzen. Dieses sind freie Bahnen im Raume.

Wirkt aber auf eine Masse ein Impuls mit Beharrungsvermögen oder eine permanente Kraft oder beides zugleich, und wird deren, diesen Einwirkungen entsprechenden Bewegungen ein Hindernifs in bestimmter Gestalt als Leitung entgegengesetzt, so entsteht eine Bahn auf vorgeschriebenem Wege, eine vorgeschriebene Bahn, z. B. der beschränkte freie Fall auf schiefer Ebene, die Pendelschwingungen; auch die in No. 6 gedachte Kreisbewegung gehört hier her.

**Bahnbestimmung aus relativen Bewegungen.** Wenn man die Bahn eines Körpers bestimmen soll, so befindet man sich (mit seinem beobachtenden Auge) entweder innerhalb oder aufserhalb der Bahn, in beiden Fällen entweder in Ruhe oder in Bewegung. Aus diesem Grunde wird in vielen Fällen die Bahn mit Hülfe anderer, an derselben Bewegung nicht Theil nehmender Objecte, also indirect bestimmt, indem man die scheinbaren oder relativen Bewegungen dieser Hülfspunkte in Beziehung auf die bewegte Masse oder gegenseitig beobachtet, und aus diesen die wirkliche Bahn ableitet. Um solche Ableitung zu vermögen, sind die dafür aufgestellten Begriffe und Untersuchungen in Folgendem enthalten.

$CX$ und $CY$ seien zwei unter irgend einem $\angle$ in $C$ zusammentreffende gerade

Fig. 168.




Linien; ein Punkt bewege sich in derselben Ebene und habe in verschiedenen Zeiten die Orte $a$, $b$, $c$, $d$. Zieht man nun $\# CY$ nach $CX$ die Linien $aa'$, $bb'$, $cc'$, $dd'$, $\# CX$ auf $CY$ die Linien $aa''$, $bb''$, $cc''$, $dd''$, so sind die relativen Wege der wirklichen Wege $Ca$, $ab$, $bc$, $cd$ auf $CX$ die Linien $Ca'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und die derselben Wege auf $CY$ die Linien $Ca''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$. Sind $CY$ und $CX$ normal auf einander, so sind die relativen Wege zugleich die Projectionen der wirklichen Wege.

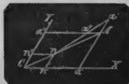
Man nennt die geraden Linien $CX$ und $CY$ auch die Coordinatenaxen einer Bahn, oder der Punkte, der Orte einer Bahn.

Für eine Bew. frei im Raum hat man 3 Coordinatenaxen für die relativen Bewegungen nöthig. Wenn man Fig. 15, pag. 14, die gerade Linie $AP$ gezogen denkt und diese als wirkliche Bew. ansieht, so sind $Ax$, $Ay$, $Az$ deren relative Bewegungen in den 3 Coordinatenaxen $AX$, $AY$, $AZ$.

2. Hat ein Massenpunkt eine geradlinige gleichförmige Bew., so sind auch dessen relative Bewegungen gleichförmig, und sind die relativen Bew. beide gleichförmig, so ist auch die wirkliche Bew. geradlinig und gleichförmig.

Ist z. B. der geradlinige Weg des Massenpunkts $CA$ und hat er die Länge $CA$ in der Zeit $t$ gleichförmig durchlaufen, so sind auch die relativen Wege $Ca'$ und $Ca''$ gleichförmig durchlaufen; denn ist

Fig. 169.




$Cn$ die in der Zeit-Einheit durchlaufene Länge, so ist $CA = Cn \cdot t$

die relativen Wege von $Cn$ sind $Cn'$ und $Cn''$

Es ist aber $Cn' : Ca' = Cn : CA = 1 : t$

und $Cn'' : Ca'' = Cn : CA = 1 : t$

folglich $Ca' = Cn' \cdot t$ und $Ca'' = Cn'' \cdot t$

und so würde jeder Weg $Cm = \frac{n}{m} CA$ in der Zeit $\frac{n}{m} t$ die relativen Bewegungen $Cm' = \frac{n}{m} Ca'$ und $Cm'' = \frac{n}{m} Ca'$ liefern.

Hat man umgekehrt die relativen Bewegungen $Ca'$ und $Ca''$ als gleichförmig durchlaufen beobachtet, so gehört zu beiden Punkten $a'$, $a''$ nur der einzige wirkliche Massenpunkt $A$; zieht man ferner aus den Punkten $n'$ und $n''$, in welchen der Körper nach Verlauf der Zeit-Einheit durchgehend beobachtet wurde, die Parallelen, so treffen diese in dem einzigen Punkt $n$ zusammen.

Verbindet man $C$ mit $n$ und $n$ mit $A$ durch gerade Linien, so hat man zu beweisen, dafs $CnA$ eine gerade Linie ist. Gesetzt, die Verlängerung der geraden Linie $Cn$ wäre nicht $nA$, so müfste sie entweder rechts oder links neben $A$ vorbei gehen und folglich die geraden Linien $Aa'$ und $Aa''$ in 2 verschiedenen Punkten schneiden. Es sei $Cna''a'$ diese gerade Linie, so ist

$$Cn : Ca' = Cn' : Ca' = 1 : t$$
$$Cn : Ca'' = Cn'' : Ca'' = 1 : t$$

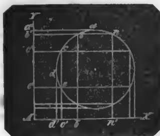
hieraus $Ca' = Ca''$

was nur möglich ist, wenn $a''$ und $a'$ einerlei Punkt sind, der nur $A$ sein kann.

3. Anders ist es bei einer krummlinigen, gleichförmig durchlaufenen Bahn.

Die Bew. geschehe gleichförmig in einem Kreise; die relativen Bew. in den Axen $AX$ und $AY$ gleichzeitig beobachtet, ergeben für die Bew. von $n$ über $a$ nach $b$ den grofsen Weg $n'b'$ und die beiden kleinen Wege $b''a'' + a''b''$; von $c$ über $d$ nach $e$ die beiden kleinen Wege $c'd' + d'c'$ und den grofsen Weg $c''e''$ u. s. w. Es

Fig. 170.



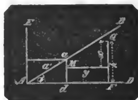
ist aber klar, dafs durch Verzeichnung der Parallelen mit $AX$ und $AY$ bis zu deren Durchschnittspunkten die wirkliche Bew. in dem Kreise sichtbar construirt, also auch berechnet werden kann.

4. Wenn man die Kräfte kennt, die, gemeinschaftlich auf einen Massenpunkt wirkend, dessen Bahn veranlassen, so darf man die Bewegungsaxen nur nach der Richtung dieser Kräfte nehmen, um aus den sodann bekannten Gesetzen der relativen Bewegungen die Bahn der Masse zu finden.

Z. B. die Wurfbewegung.

Es werde ein Körper von $A$ aus nach der Richtung $AB$ unter dem $\angle\alpha$ mit

Fig. 171.



dem Horizont $AD$ in die Höhe geworfen, so ersieht man, dafs die senkrecht abwärts wirkende Schwerkraft den Körper in jedem Augenblick nach dem Horizont herabzuziehen strebt. Aus diesem Grunde ist die eine Seitenaxe $AE$ der Bew. senkrecht zu nehmen, die andere normal darauf, also in der Horizontalen $AD$. Nach der Richtung $\mp EA$ wirkt nun eine Kraft, die als absolut eine gleichförmig verzögerte Bew. veranlafst, während aus der nur in einem Augenblick thätig gewesenen Wurfkraft, die sich in der Horizontalen als zweite Seitenkraft zerlegt, eine gleichförmige Bew. hervorgeht.

Ist $Aa' = c$ der Weg der Masse in der ersten Secunde als deren Anfangsgeschwindigkeit, so ist die relative Anfangsgeschwindigkeit nach $AD = c\cos\alpha$, nach $AE = c\sin\alpha$, und wenn die negative Beschleunigung der Schwere $= g$ gesetzt wird, nach Verlauf von $t$ Secunden der relative Weg $Ad$ nach $AD = c\cdot\cos\alpha\cdot t$ (1)
nach $AE = da - aM = c\sin\alpha\cdot t - gt^2$

$$= gt\left(\frac{c\sin\alpha}{g} - t\right) \qquad (2)$$

so dafs der Massenpunkt unterhalb der geraden Linie $AB$, etwa in $M$ sich befindet.

Da beide letzten Factoren eine constante Summe $= \frac{c\sin\alpha}{g}$ bilden, so ist das Maximum des Werths für $t = \frac{c\sin\alpha}{2g}$, mithin ist die gröfste Höhe $FG = h$ des Wurfs (aus 2)

$$= \frac{c^2\sin^2\alpha}{4g} \qquad (3)$$

und die dazu gehörige Länge $AF$ (aus 1)

$$= c\cdot\cos\alpha\frac{c\sin\alpha}{2g}$$

$$= c^2 \frac{\sin 2\alpha}{4g} \quad (4)$$

beide in der Zeit $\frac{c \sin\alpha}{2g}$

Für $t = \frac{c \sin\alpha}{g}$, also für die doppelte Zeit wird die Höhe $= 0$, der Körper kommt in diesem Augenblick zur Erde, und die Länge in $AD$ dafür (aus Gl. 1)

die Wurfweite $(2AF)$ ist $= c^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}$ (5)

Nimmt man $GF$ zur Abscissenlinie, $G$ als Anfangspunkt, die $\pm AD$ auf $FG$ gezogenen Linien als die Ordinaten, so ist $y = dF = c \cdot \cos\alpha \cdot t_1$, wenn $t_1$ die Zeit ist, in welcher die relative Bew. $= dF$ ist. Es sei die relative Geschw. nach $AE$ in $M = v$, so ist sie in $G$ noch $v - 2gt_1$; sie ist aber in $G$ zugleich Null, weil der Körper von dort ab zu fallen anfängt, mithin $v - 2gt_1 = 0$, und der relative Weg $x = vt_1 - gt_1^2 = 2gt_1 - gt_1^2 = gt_1^2$

Man erhält also aus

$$y = c \cos\alpha t_1$$

und $x = gt_1^2$

wenn man $t_1$ aus der ersten Gleichung eliminirt und den Werth $t_1 = \frac{y}{c \cos\alpha}$ in die zweite Gleichung setzt und entwickelt

$$y^2 = \frac{c^2 \cos^2\alpha}{g} x$$

die Gleichung für die Parabel, deren Axe $GF$ und deren Scheitel $G$ ist. (Vergl. Bahn geworfener Körper, No. 7.)

**Bahn geworfener Körper.** Ein Körper, der geworfen wird, erhält mit dem Wurf einen Impuls zu einer gleichförmigen Bewegung von einer Geschwindigkeit, die mit der Stärke oder der Gröfse des Impulses in Verhältnifs steht, er müfste also nach der Richtung des Wurfs mit der ihm ertheilten Anfangsgeschwindigkeit sich fortbewegen. Allein er kehrt, wie die tägliche Erfahrung lehrt, zur Erdoberfläche zurück, und die Ursache davon ist die fortdauernde Wirkung der Schwerkraft unseres kugelförmigen Erdkörpers, der Anziehungskraft seiner Masse, welche in deren Mittelpunkt vereinigt als Centralkraft wirkt, und die so grofs ist, dafs sie jeden in der Nähe seiner Oberfläche befindlichen Körper erfahrungsmäfsig 15 pariser = $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs in der ersten Secunde dem Erdmittelpunkt näher führt.

Diese Richtungen der Schwerkraft, die lothrechten Linien, bilden, in Summa betrachtet, Strahlen, die eine Erweiterung der Kugeloberfläche bilden, und wenn wir uns auf der Erdoberfläche eine Kreislinie denken, die von uns überall 90° entfernt ist, so hat jeder auf diesem Kreis befindliche Mensch einen Stand, der mit dem unsrigen einen rechten Winkel bildet. Da aber der Erdumkreis 5400 geogr. Meilen beträgt, so können die Lothe in dem Anfangspunkt und dem Endpunkt einer jeden Wurfweite als $\neq$ angenommen werden, denn bei dem Wurf einer 24pfündigen Kugel mit verstärkter Ladung von höchstens 12000 Fufs beträgt der Winkel, den beide Lothe in dieser Entfernung mit einander bilden, nur 2,4 Minuten.

2. Die Schwere als absolute Kraft (s. d.) bewirkt gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung; beschleunigte, wenn die Masse dem Sitz der Schwerkraft, dem Erdmittelpunkt sich nähert, verzögerte, wenn sie von demselben sich entfernt. Die Gleichförmigkeit einer Beschleunigung besteht aber darin, dafs die Geschwindigkeit in gleichen auf einander folgenden Zeiten um gleich viel wächst. Beim freien Fall ist der Weg in der ersten Secunde $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs, welche (die Beschleunigung) mit $g$ bezeichnet wird; in der zweiten Sec. fällt der Körper $3g$, die Schwere allein konnte demselben nur den Weg $g$ mittheilen, mithin ist das Mehr von $2g$ die Wirkung des Beharrungszustandes, d. h. nach Verlauf der ersten Secunde hatte der Körper die Geschwindigkeit $= 2g$. Mithin beträgt die Zunahme der Geschwindigkeit während der zweiten Sec. wieder $2g$, die Endgeschwindigkeit nach Verlauf von 2 Sec. ist $= 4g$, nach 3 Sec. $6g$, nach Verlauf der Zeit $t$ (Secunden) $= 2tg$, und zwar nach lothrechter Richtung.

Es fällt also lothrecht ein Körper vermöge des Beharrungsstandes der erlangten Endgeschwindigkeit während der 2ten Sec. $2g$, während der 3ten $4g$, allgemein während der $t$ten Sec. $2(t-1)g$. In Summa

$$2[1 + 2 + \ldots + (t-1)]g = t(t-1)g$$

In jeder einzelnen Sec. ertheilt ihm die Schwere den Weg der ersten Sec. $= g$, während $t$ Sec. also den Weg $tg$; mithin beträgt sein ganzer Weg

$$[t + t(t-1)]g = gt^2$$

3. Wenn einer Masse $M$ durch Wurf lothrecht aufwärts die Anfangsgeschw. $c$ mitgetheilt wird, so würde sie in Folge des Beharrungsstandes in jeder Sec. die Höhe $c$ ansteigen, in $t$ Sec. also die Höhe $ct$ erreicht haben. Allein die Schwerkraft wirkt der Bewegung entgegen und entzieht ihr (nach No. 2) in der ersten Sec. die Geschw. 2g, weil der freie Fall nach Verlauf einer Sec. die Endgeschw. $2g$ er-

langt hat; in der 2ten Sec. $4g$, weil beim freien Fall nach Verlauf zweier Sec. die Endgeschw. $4g$ ist, nach $t$ Sec. $2gt$.

Nachdem $M$ 1 Sec. gestiegen ist, beträgt deren Geschw. noch $c-2g$; nach 2 Sec. $c-4g$, nach $t$ Sec. $c-2gt$. Ist nun $c-2gt=0$, so hört das fernere Steigen auf und $M$ fängt an zu fallen. Man hat daher das Gesetz

I. **Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ senkrecht aufwärts geworfene Masse steigt $t=\frac{c}{2g}$ Secunden lang, worauf sie zu fallen anfängt.**

Z. B. ein mit 40 Fuſs Geschw. aufgeworfener Körper steigt $\frac{40}{2\cdot 15\frac{5}{8}}=1{,}28$ Sec. lang; und wenn ein Körper 5 Sec. lang senkrecht aufsteigen soll, bedarf er einer Anfangsgeschw. $c=2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 5=156\frac{1}{4}$ Fuſs.

4. Um die Zeit zu finden, in welcher der Körper wieder auf die Erdoberfläche trifft, hat man nur nöthig, die steigende Bewegung sich fortgesetzt zu denken.

Nach $(t+1)$ Sec. hat dann die Schwere dem Körper die Geschwindigkeit $2g(t+1)$ entzogen, seine Geschw. beträgt noch $c-2g(t+1)=-2g$, d. h. $-2g$ aufwärts, also $+2g$ abwärts, also diejenige Geschw., welche ein frei fallender Körper nach Verlauf einer Sec. erhält (s. No. 2) und er ist also wirklich eine Sec. lang gefallen.

Als der Körper $(t-1)$ Sec. lang gestiegen war, hatte er die Geschw.

$$c-2g(t-1)=+2g$$

also nach $(t-1)$ Sec. dieselbe Geschw. aufwärts, welche er nach noch 2 Sec., nämlich nach Verlauf von überhaupt $(t+1)$ Sec. abwärts erhält. Da nun der Körper zuletzt eine volle Sec. gefallen ist, so ist er von der Zeit $(t-1)$ ab eine volle Sec. gestiegen. So findet man, daſs der Körper nach Verlauf von $2t$ Sec. noch die Geschw. $c-4gt=-2gt=-c$ aufwärts, d. h. die Geschw. $+c$ abwärts = der Anfangsgeschw. beim Steigen hat. Man hat also das Gesetz:

II. **Die Anfangsgeschwindigkeit eines $t$ Secunden lang senkrecht aufsteigenden Körpers ist = der Endgeschwindigkeit eines $t$ Secunden lang frei fallenden Körpers. Und ein Körper, der $t$ Secunden lang senkrecht aufsteigt, fällt $t$ Secunden lang senkrecht herab; er kommt, von dem Augenblick des Wurfs ab, nach $2t$ Secunden wieder zur Erde.**

5. Aus No. 4 geht hervor, daſs die Gesetze beim Aufsteigen mit denen beim Fallen eines Körpers dieselben sind, und somit ist auch die beim lothrechten Ansteigen in $t$ Secunden oder mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ erlangte Höhe $h$ gleich der Fallhöhe, zu welcher $t$ Sec. oder die Endgeschwindigkeit $c$ gehört, nämlich (nach No. 2) $h=gt^2$; oder da $t=\frac{c}{2g}$, $h=\frac{c^2}{4g}$.

Bei $c=40$ Fuſs (Beisp. No. 3) ist die Höhe $h$, bis zu welcher der Körper senkrecht ansteigt, $=\frac{40^2}{4\cdot 15\frac{5}{8}}=25{,}6$ Fuſs. In No. 3 ist die Zeit $t$ des Steigens $=1{,}28$ Sec. berechnet, mithin

$$h=15\tfrac{5}{8}\times 1{,}28^2=25{,}6 \text{ Fuſs.}$$

Dieselbe Höhe aber fällt der Körper in 1,28 Sec herab und erlangt dabei dieselbe Endgeschwindigkeit 40 Fuſs. Man hat demnach das Gesetz:

III. **Ein Körper muſs, um eine bestimmte Höhe zu erreichen, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit steigen, welche er als Endgeschwindigkeit beim freien Fall von derselben Höhe erlangt.**

6. Nach No. 3 hat ein Körper, wenn er mit der Geschw. $c$ eine Sec. lang senkrecht aufgestiegen ist, noch die Geschw. $c-2g$; mit dieser Geschw. kann er noch steigen $\frac{(c-2g)^2}{4g}$, er ist also gestiegen $\frac{c^2}{4g}-\frac{(c-2g)^2}{4g}=c-g$, wie auch die einfache Betrachtung zeigt, daſs der Körper vermöge der Beharrung die Höhe $c$ erreichen würde, wenn die Schwere nicht den Weg $g$ zurück verlangte, woher die wirklich angestiegene Höhe nur $c-g$ sein kann.

Ist nun $c=g$, so ist er auf die Höhe $=0$ gestiegen; d. h. er ist in der ersten $\frac{1}{2}$ Sec. auf die Höhe $=\frac{g^2}{4g}=\frac{1}{4}g$ gestiegen und in der 2ten $\frac{1}{2}$ Sec. wieder um $\frac{1}{4}g$ gefallen. Nach $t$ Sec. ist seine Geschw. noch $c-2gt$, er ist also gestiegen

$$\frac{c^2}{4g}-\frac{(c-2gt)^2}{4g}=ct-gt^2$$

wo $ct$ die durch Beharrungsvermögen aufgestiegene Höhe und $gt^2$ die von der Schwere zurück verlangte Höhe ist.

Für $c=gt$ ist der Körper auf die Höhe $=0$ gestiegen, d. h. er ist in der Zeit $\frac{1}{2}t$ auf die Höhe $\frac{c^2}{4g}=\frac{g^2t^2}{4g}=\frac{1}{4}gt^2$ gestie-

gen und in der folgenden Zeit $\frac{1}{2}t$ auf die Höhe $\frac{1}{4}gt^2$ wieder herabgefallen.

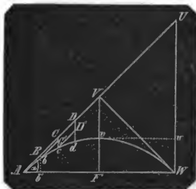
Nennt man bei der Anfangsgeschwindigkeit $c$ diejenige Geschw. $v$, welche der Körper während des Aufsteigens in irgend einem Zeit-Augenblick hat, so ist die ganze Höhe, auf die er steigt,

$$h = \frac{c^2}{4g}$$

Die Höhe, welche er mit der Geschw. $v$ noch steigen kann, $h' = \frac{v^2}{4g}$ und die Höhe $h - h'$, welche er bereits gestiegen, ist $= \frac{c^2 - v^2}{4g}$

7. Wird ein Körper $M$ von $A$ aus unter einem spitzen $\angle \alpha$ mit dem Horizont (dem **Richtungswinkel, Elevationswinkel**) in die Höhe geworfen, so dafs er die Anfangsgeschw. $= c$ erhält, so würde er nach Verlauf einer Sec. in dem Punkt $B$ in der Entfernung $c$ von $A$ sein, wenn ihn die Schwere nicht um den Weg $g = Bb$ senkrecht abwärts triebe

Fig. 172.




und $M$ befindet sich in $b$. In der zweiten Sec. macht er wieder durch Beharrung den Weg $bC' = c$ und $\mathrel{\#} AC$, die Schwere jedoch führt ihn in dieser Sec. den Weg $3g = C'c$ senkrecht abwärts und er befindet sich nach Verlauf der 2ten Sec. in $c$. Nach Verlauf der 3ten Sec. befindet er sich in $d$, indem $cD' \mathrel{\#} AD = c$ und $D'd = 5g$ beträgt. In der ersten Sec. ist $M$ um $g$ gefallen, in den ersten beiden von $C$ aus um $4g$, in den ersten 3 Sec. von $D$ aus $9g$ und nach $t$ Sec., wo er gleichförmig den Weg $ct = AV$ zurückgelegt haben würde, ist er um $gt^2 = Vv$ gefallen und befindet sich in $v$.

Aus $AV = ct$ und $Vv = gt^2$

folgt $Vv = g\left(\frac{AV}{c}\right)^2 = \frac{g}{c^2} AV^2$

Eben so ist $Bb = \frac{g}{c^2} AB^2$

$$Cc = \frac{g}{c^2} AC^2$$

u. s. w.

d. h. die Quadrate der von $A$ aus auf der um $\alpha$ ansteigenden geraden Linie $AV$ genommenen Abscissen ($x$) verhalten sich wie die zu ihnen gehörenden lothrechten Ordinaten ($y$), und die Bahn des geworfenen Körpers wird bestimmt durch die allgemeine Gleichung

$$y = \frac{g}{c^2} x^2$$

Nun hat man aber für eine Parabel, wenn man die Abscissen auf einer Tangente derselben vom Berührungspunkt ab mit $x$, die dazu gehörigen mit der Parabelaxe $\mathrel{\#}$ genommenen Ordinaten mit $y$ und den $\angle$, den die Tangente mit der Axe bildet, mit $\beta$ bezeichnet, die Coordinatengleichung

$$y = \frac{\sin^2\beta}{p} x^2$$

wo $p$ der Parameter der Parabel ist.

Da nun für die Wurfcurve allgemein $y = \frac{g}{c^2} x^2$, so gehören die einzelnen Orte des unter dem $\angle \alpha$ geworfenen Körpers einer Parabel an, von welcher $AV$ in $A$ Tangente, deren Axe lothrecht und bei der $\angle AVv = \beta$ ist.

Aus $y = \frac{\sin^2\beta}{p} x^2$ folgt $y = \frac{\cos^2\alpha}{p} x^2$ und es ergiebt sich, dafs der Parameter der parabolischen Bahn des geworfenen Körpers $p = \frac{c^2}{g} \cos^2\alpha$ ist.

Hieraus erhellt, dafs die Axe rechts von $A$, $\mathrel{\#} Vv$ liegen mufs, und wenn $VF$ durch $v$ selbst die Axe ist, so mufs die Parabel den Horizont in der Entfernung $AW = 2FA$ schneiden, das Parabelstück $vW$ mufs dem Stück $vA \cong$ sein, $WV$ die Tangente in $W$ und $VF$ als Subtangente $= 2vF$

8. Geht man von dieser rein geometrischen Betrachtung auf die Phoronomie zurück, so hat man den Scheitel $v$,

wenn $vF = ct \sin\alpha - gt^2$

ein Maximum ist, also wenn nach Lehren der Differenzialrechnung

$$c \sin\alpha - 2gt = 0$$

oder für $t = \frac{c}{2g} \sin\alpha$

Dasselbe Resultat erhält man anch, wenn man erwägt, dafs ein Steigen des Körpers nnr so lange möglich ist, als die nach der Lothrechten genommene relative Geschw. von $c = c \cdot \sin\alpha = Bb'$, die während der ganzen Bewegung für jede Secnnde constant hleibt, noch die von der Schwere nach derselben Richtung ihm entzogene immer wachsende Geschw. $2gt$ übertrifft. Also für $c \sin\alpha = 2gt$ hleiht der Körper in dem Höhenpnnkt stehen, in dem nächsten Zeittheilchen $\triangle t$ wirkt die Schwere mit der Geschw. $2g(t + \triangle t)$, diese ist nun gröfser als $c \sin\alpha$ und der Körper mufs fallen. Da er nun in der Zeit $t = \frac{c}{2g} \sin\alpha$ gestiegen ist, so fällt er anch während der gleichen Zeit $t$ nnd es ist die Zeit der Bewegung des Körpers durch seine Bahn

$$T = \frac{c}{g} \sin\alpha$$

9. Verlängert man $AV$ his $U$, normal üher $W$, so ist offenhar $AU = cT$ nnd die Wurfweite

$$W = AW = AU \cos\alpha = c \cdot T \cdot \cos\alpha$$
$$= c \frac{c}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{c^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

oder $W = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$

Die Wurfweiten verhalten sich also wie die doppelten Richtungswinkel.

Da $\sin 2\alpha = \sin(180 - 2\alpha)$, so ist

$$W = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{2g} \sin 2(90 - \alpha)$$

d. h. die Wurfweiten bei einerlei Anfangsgeschwindigkeit sind für Richtnngs-Winkel als Complementswinkel einander gleich.

10. Die gröfste Höhe $Fv$, welche der Körper erreicht, ist

$$VF - Vv = H = \tfrac{1}{2} c T \sin\alpha - g(\tfrac{1}{2}T)^2$$

oder für $T$ seinen Werth $\frac{c}{g} \sin\alpha$ gesetzt

$$H = \frac{c^2}{4g} \sin^2\alpha$$

11. Die gröfste Wurfweite $W$ erhält man für $2\alpha = 90°$, also für $\alpha = 45°$. Dann ist

$$W = \frac{c^2}{2g}$$

nnd die zugehörige gröfste Höhe

$$H = \frac{c^2}{4g} \sin^2 45°$$
$$= \frac{c^2}{4g} (\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 = \frac{c^2}{8g}$$

Folglich ist die gröfste Wurfweite bei einem Richtungswinkel von 45° viermal so grofs als die dazu gehörige gröfste Höhe, und doppelt so grofs als die Höhe, welche ein mit derselben Geschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfener Körper erlangt.

12. Für $\alpha = 90°$ erhält man $W = 0$ und $H = \frac{c^2}{4g}$, wie in No. 5 hei senkrecht gerichtetem Wurf erwiesen ist.

Für $\alpha = 0$ erhält man $W = 0$ und $H = 0$

Wenn man jedoch in einer Höhe $H$ von der Erdoberfläche einen Körper mit der Geschw. $c$ horizontal wirft, so hat man sich die halbe Bahn (Fig. 172) $vW$ zu denken: denn während der Körper in der Horizontalen $vu$ den Weg $ct$ machen will, führt ihn die Schwere den Weg $gt^2$ abwärts. Ist nun $H = gt^2$, so trifft der Körper in der Zeit $t$ die Erdoberfläche. Setzt man die Weite $FW = w$, so ist $w = ct$, woraus $t = \frac{w}{c}$

$$\text{mithin } H = g \cdot \frac{w^2}{c^2}$$

$$\text{und } w = c\sqrt{\frac{H}{g}}$$

(Vergl. Bahnbestimmung etc. No. 4.)

13. Man kann die Bahn eines geworfenen Körpers construiren, wenn $c$ nnd $\alpha$ gegeben sind, und wenn man $g = 15\tfrac{5}{8}$ Fufs und $c$ mit einerlei verjüngtem Maafsstah mifst:

Aus $W = \frac{c^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$

nnd $H = \frac{c^2}{4g} \sin^2\alpha$

folgt $H = \tfrac{1}{4} W \operatorname{tg}\alpha$

und $W = 4H \cot\alpha$

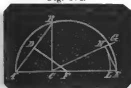
Man kann demnach erst $W$ nnd aus diesem $H$ oder erst $H$ und aus diesem $W$ construiren.

Fig. 173.

Für den ersten Fall nimm auf der geraden Linie $AE$, $AC = g$ die Normale $BC = c$, halbire $AB$ in $D$, errichte auf $AB$ in $D$ das Loth $DF$ bis in $AE$, beschreibe aus $F$ den Halbkreis $ABE$, so ist $CE = \frac{c^2}{g}$ Zeichne die beiden $\angle GCE = ACB = \alpha$, fälle die Normale $EI$ auf $CH$, so ist $\angle IEC = \alpha$ und $CI = \frac{c^2}{g} \sin\alpha$; zeichne den Bogen $IK$ aus $C$, fälle die Normale $KL$ auf $CE$, so ist $CL = \frac{c^2}{g} \sin\alpha \cdot \cos\alpha = W$. Halbirt man nun $CL$ in $M$ und $CM$ in $N$, errichtet die Normalen $NO$ und $MP$, so ist $NO = \frac{1}{4} W \, tg\,\alpha$ und die Normale $OQ$ auf $MP$ giebt den Scheitel $Q$ der Parabel und $QM = \frac{1}{4} W \, tg\,\alpha = H$. Oder man halbirt $PM$ und erhält $Q$ (nach No. 7).

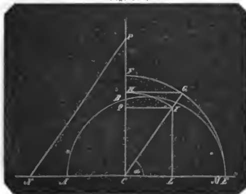
Oder nimm, um $W$ zu construiren, $AC = 2g$, die Normale $BC = g$, construire $F$ wie vorher, zeichne aus $F$ den Halbkreis $ABE$, so ist $CE = \frac{c^2}{2g}$; zeichne $\angle GCE = 2\alpha$, oder wenn $2\alpha > 90^\circ$, $= 2\alpha - 90^\circ$,

Fig. 174.



fälle die Normale $EH$, so ist $\angle HEC = 90 - 2\alpha$ oder $180 - 2\alpha$ und $CH$ in beiden Fällen $= \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$. Zeichne aus $C$ den Bogen $HL$, so ist $CL = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha = W$

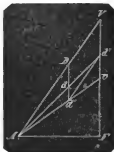
Fig. 175.



Will man zuerst $H$ construiren, so nimm $AC = 4g$, die Normale $CB = c$, zeichne durch $A$ und $B$ den Halbkreis $ABE$, $\angle GCE = \alpha$, zeichne aus $C$ den Quadrant $EF$ bis in die Verlängerung von $CB$, so ist $CF = CG = CE = \frac{c^2}{4g}$, zeichne die Normale $GH$ auf $CF$, so ist $CH = CG \sin\alpha = \frac{c^2}{4g} \sin\alpha$, zeichne den Bogen $HI$, fälle die Normale $IQ$, so ist $CQ = CI \sin\alpha = \frac{c^2}{4g} \sin^2\alpha$, $QC = H$ und $Q$ der Scheitel. Zugleich ist $QI = H \cot\alpha$. Fällt man also die Normale $IL$, nimmt $CM = CN = 2CL$, so ist $NM = 4H \cot\alpha = W$. Oder man nimmt $QP = CQ$, zieht von $P$ aus $PN \# GC$, um $N$ zu erhalten.

Hat man nun die halbe Wurfweite $AF$ (s. zugleich Fig. 171), die gröfste Höhe $Fv$, so construirt man die Parabel am einfachsten nach dem Gesetz No. 7. Man zieht nämlich $AV$, nachdem man

Fig. 176.



$FV = 2Fv$ gemacht hat, so ist $\angle VAF = \alpha$ und es verhalten sich die senkrechten Ordinaten wie die Quadrate, deren Abstände auf der Linie $AV$ von $A$ aus genommen. Um also die Ordinate $Dd$ zu erhalten, ziehe man $Av$, $Dd' \# Vv$, $d'd'' \# AV$ und $Ad''$. Der Durchschnittspunkt $d$ zwischen $Dd'$ und $Ad''$ ist der zur Abscisse $AD$ gehörende Parabelpunkt. Denn es soll sein $Vv : Dd = AV^2 : AD^2$

mithin $Dd = \frac{Vv \cdot AD^2}{AV^2}$

Nun ist durch Construction

$AV : Vv = AD : Dd'$

also $Dd' = \frac{Vv \cdot AD}{AV}$

mithin $Dd = \frac{AD}{AV} \cdot Dd'$

Nnn ist construirt $Vd' = Dd'$
ferner $AV : Vd' = AD : Dd$

worans $Dd = \frac{AD}{AV} Vd' = \frac{AD}{AV} Dd' = \frac{Vv \cdot AD^2}{AV^2}$

nnd $d$ ein Punkt der Wurflinie.

**Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft eines Weltkörpers bewegt wird.** Im vor. Artikel ist die Schwere als censtante Kraft angesehen werden; dies ist jedoch nur näherungsweise richtig, wenn der ven der Schwerkraft ergriffene Körper nahe über der Erdeberfläche sich befindet und ven dieser seine Bew. begrenzt wird. Die Schwerkraft wirkt, wie später nachgewiesen werden wird, iu nmgekehrtem Verhältnifs nach den Quadraten des zwischen dem angezogenen Körper und dem Sitz der Schwerkraft bestehenden Abstandes.

Jeder an der Erdeherfläche befindliche Kërper ist um den Erdhalbmesser ven c. 860 Meilen von dem Schwerpnnkt des Erdkërpers entfernt, die Beschleunigung in dieser Entfernung beträgt (s. d. vor. Art.) $15\frac{5}{8}$ pr. Fufs; ein Körper von 860 Ml. über der Erdeberfläche, also bei zweifacher Entfernnng, hat nur $\frac{1}{4}$ der Beschlennigung $= \frac{1}{4} \cdot 15\frac{5}{8} = 3\frac{29}{32}$ Fufs, d. h. er fällt in der ersten Secunde nur $3\frac{29}{32}$ Fnfs, und wenn der Mond bei etwa 60 Erdhalbmesseru Entferuung veu der Erde frei auf dieselbe herabfiele, würde er in der ersten Sec. $\frac{15\frac{5}{8}}{60^2}$ Fufs oder in eiuer Minute $= 60$ Sec. nur $15\frac{5}{8}$ Fufs falleu.

Es ist also zunächst die Bahu zu nntersuchen, welche ein Körper dnrchlänft, wenn dessen Beschleunigung in jedem Ort der Bahn stets dem Qnadrate der Entfernnng dieses Orts von einem hestimmten, in der Richtung seiner Bahn befindlichen Punkt (dem Centralpunkt) umgekehrt proportional ist.

Es sei $A$ der Anfangspnnkt der Bew., von dem ans alse die Bew. veu der Ruhe ans beginnt, $C$ der Centralpunkt, der Abstand $AC = a$. Nach Verlauf vou $t$ Secnnden befinde sich der Körper in $B$, der von demselben znrückgelegte Weg $AB$ sei $= s$, seine Beschleunigung in $B = \gamma$, seine Geschwindigkeit daselbst $= v$, die Beschleunigung des Körpers in der Entfernnng $= 1$ von $C$ sei $g'$.

Man denke sich die Länge $AB$ in $n$ gleiche Theile getheilt, der erste Theil, ven $B$ ab gezählt, habe ven $C$ den Abstand $a_1$; der zweite den Ahstand $a_2$; der $(m-1)$te den Abstand $a_{m-1}$; der $m$te den $a_m$; die Beschleunigungen in diesen Ahständen seien $\gamma_1$; $\gamma_2$; $\gamma_{m-1}$; $\gamma_m$; die in diesen Pnnkteu erlangten Geschwindigkeiten $v_1$; $v_2$; $v_{m-1}$; $v_m \ldots$; so ist nach der Voraussetzung

$$\gamma_1 = \frac{g'}{a_1^2};\ \gamma_{m-1} = \frac{g'}{a_{m-1}^2};\ \gamma_m = \frac{g'}{a_m^2};$$

$$\gamma_n = \frac{g'}{a^2}$$

die Beschleunigungen nehmen also von $A$ ah immer zn, nnd

$$\gamma_n < \gamma_{n-1} \cdots < \gamma_m < \gamma_{m-1} \cdots < \gamma_1 < \gamma$$

Wäre nnn der Weg $a_m - a_{m-1} = \frac{s}{n}$ mit der kleineren Beschlennigung $\gamma_m$,

Fig. 177.




dieselbe constant gedacht, dnrchlanfen, se hat man nach der allgemeinen phoronemischen Formel:

$$S = \frac{C^2 - c^2}{4G}$$

für die gleichförmig beschleunigte Bewegnng, in welcher $S$ den Weg, $C$ die Endgeschwindigkeit, $c$ die Anfangsgeschw. nnd $G$ die Beschleunigung hedeuten:

$$\frac{s}{n} = \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_m}$$

und wäre derselbe Weg mit der grëfseren Beschleunigung $\gamma_{m-1}$ durchlaufen:

$$\frac{s}{n} = \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_{m-1}}$$

Da nun der Weg $\frac{s}{n}$ mit einer mittleren Beschlennigung dnrchlaufen wird, se ist der Weg $\frac{s}{n}$ das erste Mal zu grofs

und das zweite Mal zu klein ausgedrückt, also

$$\frac{s}{n} < \frac{v^2_{m-1} - v^2_m}{4\gamma_m}$$

$$> \frac{v^2_{m-1} - v^2_m}{4\gamma_{m-1}}$$

oder $v^2_{m-1} - v^2_m > 4\frac{s}{n}\cdot\gamma_m$

$$< 4\frac{s}{n}\cdot\gamma_{m-1}$$

Diese Vergleichung ist für jeden der $n$ Abstände, also allgemein gültig, und deshalb hat man bei Zusammenstellung und Summirung sämmtlicher $n$ Vergleichungen von $v^2_{n-1} - v^2_n$ bis $v^2 - v^2_1$

$$\left.\begin{array}{l} v^2 - v^2_1 \begin{array}{l} < \gamma \\ > \gamma_1 \end{array} \\ v^2_1 - v^2_2 \begin{array}{l} < \gamma_1 \\ > \gamma_2 \end{array} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^2_{n-1} - v^2_n \begin{array}{l} < \gamma_{n-1} \\ > \gamma \end{array} \end{array}\right\} \times \frac{4s}{n}$$

wo links jedes additive Glied mit dem subtractiven der folgenden Vergleichung sich aufhebt, und als Summe nur übrig bleibt:

$$v^2 - v^2_n < \frac{4s}{n}\left[\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_{n-1}\right]$$

$$> \frac{4s}{n}\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_n\right]$$

Mit beliebiger Zunahme von $n$ können die beiden Gröfsen, welche $v^2 - v^2_n$ einschliefsen, beliebig klein werden; man darf daher nur eine andere Gröfse aufsuchen, welche ebenfalls zwischen denselben Grenzen begriffen ist, welche dann $= v^2 - v^2_n$ ist.

Nun ist $\gamma_{m-1} = \frac{g'}{a^2_{m-1}} > \frac{g'}{a_m \cdot a_{m-1}}$

$$\gamma_m = \frac{g'}{a^2_m} < \frac{g'}{a_m \cdot a_{m-1}}$$

und da $a_m - a_{m-1} = \frac{1}{n}s$

so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n}s\,\gamma_{m-1} > \\ \frac{1}{n}s\,\gamma_m \quad < \end{array}\right\} g'\frac{a_m - a_{m-1}}{a_m \cdot a_{m-1}}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{n}s\,\gamma_{m-1} > \\ \frac{4}{n}s\,\gamma_m \quad < \end{array}\right. 4g'\left(\frac{1}{a_{m-1}} - \frac{1}{a_m}\right)$$

Schreibt man wieder die Vergleichungen von

$$\frac{4s}{n}\gamma > 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right)$$

$$\frac{4s}{n}\gamma_1 \begin{cases} > 4g'\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \\ < 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) \end{cases}$$

. . . . . . . . . . . . .

$$\frac{4s}{n}\gamma_{n-1} \begin{cases} > 4g'\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) \\ < 4g'\left(\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) \end{cases}$$

$$\frac{4s}{n}\gamma_n < 4g'\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

unter einander und bemerkt, dafs in jeder von beiden Vergleichungen rechts jedes subtractive Glied mit dem additiven der nächstfolgenden Vergleichung sich aufhebt, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4s}{n}(\gamma + \gamma_1 + \cdots \gamma_{n-1}) > \\ \frac{4s}{n}(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_n) < \end{array}\right\} 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$$

folglich ist die rechts gefundene Gröfse $4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$ zwischen denselben Gröfsen eingeschlossen, wie die Gröfse $v^2 - v^2_n$ und es ist

$$v^2 - v^2_n = 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$$

Es ist aber $v_n$ die Geschw. in dem Punkt $A$, also der Voraussetzung nach = Null; ferner $a_0$ der Abstand zwischen $B$ und $C$, also $= a - s$ und

$$a_n = AC = a$$

daher hat man

$$v^2 = 4g'\left(\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a}\right) = 4g'\cdot\frac{s}{a(a-s)}$$

und

$$v = 2\sqrt{\frac{g's}{a(a-s)}} \qquad \text{I}$$

die Geschwindigkeit also durch die Figur ausgedrückt

in dem Punkt $D = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AD}{AC\cdot CD}}$

in dem Punkt $E = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AE}{AC\cdot CE}}$

2. Dieses Gesetz giebt ein Mittel, die während eines Weges $s$ verflossene Zeit $t$ zu bestimmen.

Es sei die Zeit $= \tau$, in welcher der kleine Weg $DE$ (vor. Fig.) $= \frac{1}{n} s$, mit der Anfangsgeschw. $v_m$ und der Endgeschw. $v_{m-1}$ zurückgelegt wird. Da die Geschw. von $A$ ab mit den Beschleunigungen fortwährend wachsen, so ist $\tau$ kleiner als die Zeit, in welcher der Weg $DE$ mit der Anfangsgeschw. $v_m$, und gröfser als die Zeit, in welcher der Weg $DE$ mit der Endgeschw. $v_{m-1}$ gleichförmig zurückgelegt wird, indem also im ersten Fall die kleinere Geschw. $v_m$, im zweiten die gröfsere $v_{m-1}$ während des Weges $DE$ constant bleibt.

Nun ist nach No. I

$$v_m = 2\sqrt{g'} \cdot \sqrt{\frac{AD}{AC \cdot CD}}$$

$$v_{m-1} = 2\sqrt{g'} \cdot \sqrt{\frac{AE}{AC \cdot CE}}$$

und da bei gleichförmiger Bew. die Zeit = ist dem Quotient des Weges durch die Geschw., so ist die gröfsere Zeit $= \frac{DE}{v_m}$; die kleinere Zeit $= \frac{DE}{v_{m-1}}$; und man hat

$$\frac{DE}{2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AD}{AC \cdot CD}}} > \tau > \frac{DE}{2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AE}{AC \cdot CE}}}$$

oder

$$\frac{DE}{2\sqrt{g'}}\sqrt{\frac{AC \cdot CD}{AD}} > \tau > \frac{DE}{2\sqrt{g'}}\sqrt{\frac{AC \cdot CE}{AE}}$$

Mit Hülfe der Figur und nach No. 1 hat man

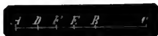
$AC = a$, $CE = CD - \frac{s}{n}$; $AE = AD + \frac{s}{n}$

mithin

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE\sqrt{\frac{CD}{AD}} > \tau > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE\sqrt{\frac{CD - \frac{s}{n}}{AD + \frac{s}{n}}}$$

Mit beliebiger Vergröfserung von $n$, d. h. mit beliebiger Verkleinerung des Theilweges $DE$ kann man die einschliefsenden Gröfsen einander beliebig nahe bringen, um so mehr also dem Werthe von $\tau$. Kann man daher eine Gröfse finden, die ebenfalls zwischen den äufseren Gliedern eingeschlossen wird, so ist diese $= \tau$

Fig. 178.




Da nun die Geschw. $v_m$ in $D$ zu klein, die Geschw. $v_{m-1}$ in $E$ zu grofs ist, so giebt es jedenfalls zwischen $D$ und $E$, etwa in $F$, eine Geschw. $v_m^1$; mit welcher der Weg $DE$ in der gesuchten Zeit $\tau' = \tau$ gleichförmig durchlaufen wird. Es ist dann

$$v_m^1 = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AF}{AC \cdot CF}}$$

und die Zeit $\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CF}{AF}}$

Denn schreibt man in der obigen Vergleichung wieder $CE$ für $CD - \frac{s}{n}$ und $AE$ für $AD + \frac{s}{n}$, so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CD}{AD}} > \tau > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\sqrt{\frac{CE}{AE}}$$

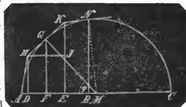
und man ersieht, dafs

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CF}{AF}}$$

zwischen den beiden äufseren Gliedern der Vergleichung begriffen ist.

Für jeden anderen Wegtheil zwischen $AB$ wird die zugehörige Zeit $\tau_x$ auf dieselbe Weise bestimmt, und die Summe aller $\tau_x$ ist = der Zeit $t$, in welcher der Weg $AB = s$ zurückgelegt wird. Es kann aber der Weg $\tau'$ construirt werden wie folgt:

Fig. 179.



Multiplicirt man Zähler und Nenner der letzten $\sqrt{}$ mit $CF$, so hat man die Zeit

$$\tau' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE \cdot \frac{CF}{\sqrt{AF \cdot CF}}$$

und da $\sqrt{AF \cdot CF}$ die Ordinate des Halbkreises über $AC$ in $F$ ist, so hat man (Fig. 179)

$$\tau' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE \cdot \frac{CF}{FG}$$

Zieht man nun den Halbmesser $MG$, an $G$ die Tangente $HK$, die Ordinaten $DH$, $EK$, und aus $H$ die Linie $HI \mathrel{\#} AC$, so ist

$$\triangle HKI \sim \triangle GMF$$

und da $HI = DE$

$$DE : FG = HK : MG$$

woraus $\dfrac{DE}{FG} = \dfrac{HK}{MG}$

und $\tau' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot CF \cdot \frac{HK}{MG}$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, HK \cdot \frac{CM + MF}{MG}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, HK\left(1 + \frac{MF}{MG}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\left[HK + \frac{HK \cdot MF}{MG}\right]$$

Da nun $MG : HK = MF : KI$

so ist $\tau' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\,[HK + KI]$

Die Zeit $\tau'$ für den Weg $DE$ ist also = dem zwischen beiden in $D$ und $E$ rechtwinkligen Ordinaten befindlichen Tangentenstück + der Projection dieses Tangentenstücks auf der Endordinate; die Summe beider multiplicirt mit $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}$

Die Zeit $\tau_r$ für jeden anderen Wegtheil wie $DE$ wird aber eben so bestimmt, und folglich ist $t$ = dem unveränderlichen Factor $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}$, multiplicirt mit 2 Summen, von denen die erste aus sämmtlichen Tangentenstücken besteht, die zwischen $A$ und dem Endpunkt $N$ der zu $B$ gehörigen rechtwinkligen Ordinate $BN$ begriffen sind, und die zweite aus sämmtlichen rechtwinkligen Projectionen derselben, welche Summe = der Ordinate $BN$ ist.

Mit beliebiger Abnahme eines jeden der zwischen $A$ und $B$ begriffenen $n$ Wegtheile wie $DE$ kann aber jedes Tangentenstück dem zwischen den Ordinaten begriffenen Bogenstück beliebig nahe gebracht werden, mithin ist der Bogen $AN$ die Werthgrenze der ersten Summe; folglich ist

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\,(BN + \text{Bogen } AN)$$

Bezeichnet man $\angle AMN$ mit $\varphi$, so ist Bogen $AN = \tfrac{1}{2}AC \cdot \varphi = \tfrac{1}{2}a\varphi$

und da $\cos\varphi = \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a} = \dfrac{a - 2s}{a}$

so ist Bogen $AN = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{arc}\left(\cos = \dfrac{a-2s}{a}\right)$

$$BN = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{s(a-s)}$$

folglich $t =$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\left[\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a-2s}{a} + \sqrt{s(a-s)}\right]$$

3. Legt man die Schwerkraft der Erde zu Grunde, nämlich die Beschleunigung $g' = 15\tfrac{5}{8}$ preufs. Fufs $= g$ in Entfernung 860 Meilen $= r$ vom Erdmittelpunkt, so hat man, da in No. 1 und 2, in der Entfernung $= 1$, die Beschleunigung $= g'$ gesetzt worden,

$$1 : r^2 = g : g', \text{ woraus}$$
$$g' = r^2 g$$

und man hat aus No 1 und 2

$$v = 2r\sqrt{\frac{gs}{a(a-s)}} \qquad \mathrm{I}$$

$t =$

$$\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a-2s}{a} + \sqrt{s(a-s)}\right] \qquad \mathrm{II}$$

Denkt man sich den Körper in der Entfernung $a$ vom Mittelpunkt der Erde, so hat man die Geschw., mit welcher er die Erdoberfläche trifft, und die Zeit, in welcher dies geschieht, wenn man $s = a - r$ setzt, also

$$v = 2r\sqrt{\frac{g(a-r)}{ar}} = 2\sqrt{gr\left(1 - \frac{r}{a}\right)} \qquad \mathrm{III}$$

und $t =$

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{a}{4r}\,\mathrm{arc\,cos}\left(\frac{2r}{a} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r} - 1}\right] \qquad \mathrm{IV}$$

4. Beispiel. Es soll die Zeit $t$ gefunden werden, in welcher der Mond auf die Erde fallen würde, wenn dessen Centrifugalkraft zu wirken aufhörte, und die Geschwindigkeit $v$, mit welcher er die Erdoberfläche trifft.

Der Mond hat von dem Mittelpunkt der Erde je nach dem Ort seiner Bahn, in welchem er sich befindet, verschiedene Entfernungen, im Mittel und rund beträgt dieselbe $a = 50000$ Meilen, der Halbmesser $r$ der Erde nahe 860 Meilen, der Weg $s = 50000 - 860 = 49140$ Meilen, die

Meile 24000 Fuſs, $g = 15\frac{5}{8}$ Fuſs: also nach Formel IV:

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{50000 \cdot 24000}{15\frac{5}{8}}} = 8763{,}5609$$

$$\frac{a}{4r} = \frac{50000}{4 \cdot 860} = 14{,}53488$$

$$cos\left(\frac{2r}{a} - 1\right) = cos\left(\frac{2 \cdot 860}{50000} - 1\right)$$
$$= cos\,(-0{,}9656000$$
$$= -cos\,15^\circ\,4'\,19'' = cos\,164^\circ\,55'\,41''$$
$$arc\,164^\circ\,55'\,41'' = 2{,}8785376$$

daher

$$\frac{a}{4r}\, arc\,cos\left(\frac{2r}{a} - 1\right) = 14{,}53488 \times 2{,}8785376 = 41{,}83919$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r} - 1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{50000}{860} - 1} \qquad = \phantom{0}3{,}77954$$

$$\text{Summa} = 45{,}61873$$

$t = 8763{,}5609 \times 45{,}61873 = 399782$ Secunden.
$= 111$ Stunden 3 Minuten 2 Secunden.

Um die Endgeschw. $v$ zu finden, hat man nach Formel III:

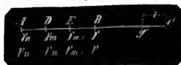
$$2\sqrt{gr\left(1 - \frac{r}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{125}{8}\, 860 \cdot 24000 \cdot \frac{49140}{50000}} = 35606 \text{ Fuſs}$$

also die Geschwindigkeit in der letzten Secunde ist nahe $1\frac{1}{2}$ Meilen.

5. Denkt man sich in der ruhenden Erde eine hinreichend weite cylindrische Oeffnung um den Durchmesser, durch welche der Mond hindurchfällt, so kann man fragen, mit welcher Geschw. er im Erdmittelpunkt ankommt, und wie er seine Bahn jenseits fortsetzt.

Hierbei ist zu bemerken, daſs die Beschleunigung im Innern der Erde, wie in dem Art.: Gravitation nachgewiesen werden wird, einem ganz anderen Gesetze folgt, daſs nämlich ein Körper, je näher er dem Mittelpunkt kommt, die über ihm befindliche Erdmasse immer gröſser wird, und eine immer gröſser werdende Anziehung nach entgegengesetzter Richtung auf ihn ausübt, so daſs die Summe der Anziehungskräfte nach vorwärts und nach rückwärts im Erdmittelpunkt = Null wird. Die Wirkung dieser Kräfte geschieht nach dem Gesetz, daſs die Beschleunigung mit der Annäherung des Körpers an den Erdmittelpunkt proportional abnimmt, und es ist die Bahn zu untersuchen, welche ein Körper durchläuft, wenn er in jedem Ort derselben stets der Entfernung dieses Orts von einem bestimmten, in der Richtung seiner Bahn befindlichen Punkt (dem Centralpunkt) proportional ist.

Fig. 180.




Es sei wieder, wie in No. 3 und Fig. 177, $A$ der Anfangspunkt der Bew. von der Ruhe aus, $C$ der Centralpunkt, $AC = a$. Nach $t$ Secunden befinde sich der Massenpunkt in $B$, $AB = s$, seine Beschleunigung in $B = \gamma$; seine Geschwindigkeit in $B = v$; die Beschleunigung in der Entfernung $= 1$ von $C$ sei $g'$. Theilt man, wie in Fig. 177, $AB$ in $n$ gleiche Theile, bezeichnet deren Entfernungen von $C$, die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in den Theilpunkten wie dort, so ist hier nach der Voraussetzung

$$\gamma_1 = g' \cdot a_1;\; \gamma_{m-1} = g' \cdot a_{m-1};$$
$$\gamma_m = g' \cdot a_m;\; \gamma_n = g' \cdot a$$

die Beschleunigungen nehmen also von $A$ aus immer ab und

$$\gamma_n > \gamma_{n-1} \cdots > \gamma_m > \gamma_{m-1} \cdots > \gamma_1 > \gamma$$

und da $\gamma_n - \gamma_{n-1} = g'\,(a_n - a_{n-1}) = g'\,\frac{s}{n}$

eben so $\gamma_m - \gamma_{m-1} = g'\,(a_m - a_{m-1}) = g'\,\frac{s}{n}$

Die Differenz je zweier auf einander folgender Beschleunigungen also constant, so bilden die Beschleunigungen in den auf einander folgenden Theilpunkten von $B$ nach $A$ hin eine steigende arithmetische Progression von $n$ Gliedern, deren erstes Glied $\gamma$ und deren letztes $\gamma_n$ ist. Eben so hat man, wie in No. 3, wenn der Weg $a_m - a_{m-1} = \frac{s}{n}$ mit der gröſseren unveränderten Beschleunigung $\gamma_m$ durchlaufen wäre,

$$\frac{s}{n} > \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_m}$$

nnd mit der kleineren nnveränderten Beschlennigung $\gamma_{m-1}$ durchlaufen.

$$\frac{s}{n} < \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_{m-1}}$$

also

$$4\frac{s}{n}\gamma_{m-1} < v_{m-1}^2 - v_m^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_m$$

nnd bei der Allgemeingültigkeit dieser Vergleichung für jeden der zwischen $A$ nnd $B$ belegenen $n$ kleinen Wege

$$4\frac{s}{n}\gamma < v^2 - v_1^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_1$$

$$4\frac{s}{n}\gamma_1 < v_1^2 - v_2^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_2$$

. . . . . . . . . . . . .

$$4\frac{s}{n}\gamma_{n-2} < v_{n-2}^2 - v_{n-1}^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_{n-1}$$

$$4\frac{s}{n}\gamma_{n-1} < v_{n-1}^2 - v_n^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_n$$

daher summirt

$$4\frac{s}{n}(\gamma + \gamma_1 + \dots \gamma_{n-1})$$
$$< v^2 - v_n^2 < 4\frac{s}{n}(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots \gamma_n)$$

Da die einschliefseuden Klammergröfseu arithmetische Progressioneu sind, so ist

$$\gamma + \dots \gamma_{n-1} = \frac{\gamma + \gamma_{n-1}}{2} \cdot n$$

$$\text{und } \gamma_1 + \dots \gamma_n = \frac{\gamma_1 + \gamma_n}{2} \cdot n$$

und da für die Bewegung von der Ruhe aus $v_n^2 = 0$ ist, so hat man

$$2s(\gamma + \gamma_{n-1}) < v^2 < 2s(\gamma_1 + \gamma_n)$$

In den einschliefsenden Gröfsen ist

$$\gamma + \gamma_{n-1} < \gamma_1 + \gamma_n$$

Nnn ist $\gamma_1 > \gamma$ nnd $\gamma_n > \gamma_{n-1}$
daher ist $\gamma + \gamma_n > \gamma + \gamma_{n-1}$
und $\gamma + \gamma_n < \gamma_1 + \gamma_n$
folglich ist
$2s(\gamma + \gamma_{n-1}) < 2s(\gamma + \gamma_n) < 2s(\gamma_1 + \gamma_n)$
aher anch
$2s(\gamma + \gamma_{n-1}) < v^2 < 2s(\gamma_1 + \gamma_n)$

Da nun mit beliebiger Zunahme von $n$ die Differenz beider einschliefsenden Gröfsen beliehig klein werden kann, so ist

$$v^2 = 2s(\gamma + \gamma_n)$$

Nnn ist $\gamma_n = g' \cdot a$ nnd $\gamma = g'(a - s)$
also $v^2 = 2g'(2a - s)s$
woraus $v = \sqrt{2g's(2a-s)}$
oder in Beziehnng auf die Figur ausgedrückt

die Geschw. in $D = \sqrt{2g'AD(2AC - AD)}$
" " " $E = \sqrt{2g'AE(2AC - AE)}$

6. Für $s = a$ hat man die Geschw. iu dem Centralpnnkt $C = a\sqrt{2g'}$

Da die Summe $s + (2a - s) = 2a$ heider Factoren des veränderlichen Prodncts $s(2a - s)$ constant ist, folglich $s(2a - s)$ ein Maximum wird für $s = 2a - s$, also für $s = a$, so ist die Geschw. im Centralpunkt $C = a\sqrt{2g'}$ die gröfste Geschw. auf der ganzen Bahn von $A$ his $C$, die Geschwindigkeit von Null in $A$ bis $C$ also fortwährend im Znnehmen.

Setzt der Körper mit dieser Geschw. seine Bew über $C$ weiter fort, so nehmen, der Voranssetzung nach, weil $C$ als Centralpunkt verbleibt, die Beschleunigungen wieder zu und zwar nach entgegengesetzter Richtung. Ist $CE' = CE$, $CD' = CD$, $CA' = CA$, so ist in $E'$ nach der Richtung $E'C$ dieselbe Beschlennigung, wie sie iu $E$ nach der Richtnng $EC$ war, in $D'$ nach $D'C$ hin, wie in $D$ nach $DC$, in $A'$ nach $A'C$, wie in $A$ nach $AC$. Wenn

Fig. 181.




also die von $A$ nach $C$ abnehmenden Beschleunigungen von der Geschw. = Null in $A$ ah das Maximum der Geschwindigkeit $= a\sqrt{2g'}$ in $C$ hervorgebracht haben, so müssen die entgegengesetzt nach demselben Gesetz zunehmenden Beschleunigungen aus der Geschw. $a\sqrt{2g'}$ in $C$ in $A'$ wiederum die Geschw. $= 0$ hervorhringen; die Bew. ist also eine perpetnell pendulirende zwischen $A$ und $A'$.

Es findet sich dieses Gesetz auch unmittelbar aus der Formel:

die Geschw. in $D$ war $\sqrt{2g'AD(2AC - AD)}$

Setzt man, um die Geschw. in $D'$ zu erhalten, $-g'$ für $g$, $AD'$ für $AD$, so hat man

$$\sqrt{2(-g')AD'(2AC - AD')}$$
$$= \sqrt{-2g'(AA' - A'D')(AA' - AD')}$$
$$= \sqrt{-2g'(2AC - AD)A'D'}$$
$$= \sqrt{-2g'(2AC - AD)(-AD)}$$
$$= \sqrt{2g'AD(2AC - AD)}$$

und um die Geschw. in $A'$ zu erhalten

$$\sqrt{2g' \cdot AA'(AA' - AA')} = \text{Null}.$$

7. Um die Zeit $t$ zu finden, in welcher der Körper von $A$ nach $B$ den Weg $s$ durchläuft, bezeichne man wieder, wie No 2, die Zeit, in welcher eln Wegtheil,

z. B. $DE = \frac{s}{n}$ mit der Anfangsgeschw. $v_m$ und der Endgeschw. $v_{m-1}$ zurückgelegt wird, mit $\tau$. Da nun die Geschw. von $A$ nach $B$ immerfort wachsen, so ist $\tau$ offenbar kleiner als die Zeit, in welcher $DE$ mit der kleineren Geschw. $v_m$ gleichförmig durchlaufen wird, und größer, als wenn $DE$ mit der größeren Geschw. $v_{m-1}$ gleichförmig durchlaufen würde.

Die erste Zeit ist

$$\frac{DE}{v_m} = \frac{DE}{\sqrt{2g'\,AD(AA'-AD)}}$$

die zweite ist

$$\frac{DE}{v_{m-1}} = \frac{DE}{\sqrt{2g'\,AE\,(AA'-AE)}}$$

und man hat die Vergleichung:

$$\frac{DE}{\sqrt{2g'\,AD\,(AA'-AD)}} > \tau > \frac{DE}{\sqrt{2g'\,AE\,(AA'-AE)}} \qquad (1)$$

Nun sind aber die Producte $AE(AA'-AE)$ u. s. w. offenbar = den Quadraten der Ordinaten in $E$ u. s. w. bis zur Peripherie des über $AA'$ gezeichneten Halbkreises.

Fig. 182.

Beschreibt man daher über $AA'$ einen Halbkreis, zeichnet in $D$, $E$ die Ordinaten $DF$, $EG$, so hat man

$$\frac{DE}{DF\sqrt{2g'}} > \tau > \frac{DE}{EG\sqrt{2g'}} \qquad (2)$$

Zeichnet man nun die Halbmesser $CF$, $CG$, errichtet in $F$, $G$ auf $CF$ und $CG$ Normalen, also Tangenten $FJ$ und $GH$ bis in die Verlängerungen von $EG$ und $DF$, zieht $FK \parallel DE$, so ist, weil $FK$ normal mit $DF$ und $FJ$ normal mit $CF$,

$$\triangle FKJ \sim \triangle FDC$$

und

$$CF : FJ = DF : FK = DF : DE$$

daher

$$\frac{FJ}{CF} = \frac{DE}{DF}$$

eben so folgt

$$\frac{GH}{CG} = \frac{DE}{EG}$$

Diese Werthe in die Vergleichung 2 substituirt und für $CF = CG = a$ gesetzt, giebt

$$\frac{FJ}{a\sqrt{2g'}} > \tau > \frac{GH}{a\sqrt{2g'}}$$

Zieht man die Linie $FL \parallel HG$, so ist $FL = HG$, zugleich $FL < FJ$, und denkt man sich $DE = FK$ bis zum Verschwinden abnehmend, so daß Bogen $FG$ als gerade Linie betrachtet werden kann, so ist $FJ > FG > FL$. Da nun Bogen $FG$ ebenfalls wie $\tau$ zwischen beiden Tangenten $FJ$ und $GH$ begriffen ist, und diese mit beliebiger Verminderung von $DE$ einander beliebig nahe gebracht werden können, so ist $\tau = \frac{\text{Bogen } FG}{a\sqrt{2g'}}$.

Was nun von $\tau$ zwischen $D$ und $E$ gilt, gilt ebenso von jedem andern $\tau_x$ zwischen jedem der $n$ zwischen $A$ und $B$ befindlichen kleinen Wegtheile; die Summe sämmtlicher $\tau_x$ ($\leqq t$) der zwischen $A$ und $B$ befindlichen Wegtheile ist aber $= t$, die Summe sämmtlicher Bogenstücke von $A$ bis zum Endpunkt $M$ der zu $B$ gehörenden Ordinate $BM$ ist Bogen $AM$; man hat also $t = \frac{\text{Bogen } AM}{a\sqrt{2g'}}$.

Nun ist Bogen $AM = AC \cdot arc\cos \frac{BC}{CM}$

$$= a \cdot arc\cos \frac{a-s}{a}$$

mithin

$$t = \frac{arc\cos \frac{a-s}{a}}{\sqrt{2g'}}$$

8. In dem Centralpunkt $C$, wo (nach No. 6) die Geschw. $= a\sqrt{2g'}$, hat man $s = a$, also

$$T = \frac{arc\cos\,(=0)}{\sqrt{2g'}}$$

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{2g'}}$$

Setzt der Körper seine Bew. von $C$ ab weiter fort, so beschreibt er, nach No. 6, den Weg mit abnehmender Geschw. bis zu dem Endpunkt $A'$, wo dieselbe $= 0$ ist, wie sie in $A$ mit 0 angefangen hat, mithin braucht er für die Durchlaufung des Weges $CA$ die Zeit $T$ und für den Weg $AA'$ die Zeit $2T = \frac{\pi}{\sqrt{2g'}}$ wie auch

die Formel lehrt, nach welcher die von $A$ bis $A'$ erforderliche Zeit

$$= \frac{arc\cos\frac{a-2a}{a}}{\sqrt{2g'}} = \frac{arc\cos(-1)}{\sqrt{2g'}} = \frac{\pi}{\sqrt{2g'}}$$

Ist $AD' = AD$, so ist nach No. 6 in $D'$ dieselbe Geschw. wie in $D$; die Zeit für den Weg $AD'$ ist also die, welche der Körper von $A$ bis $C$ gebraucht hat, + der, welche erforderlich ist, um den Körper aus der in $C$ stattgehabten größten Geschw. in die zu $D$ gehörige geringere Geschw. zurückzuführen, in Summa also die doppelte Zeit für Durchlaufung des Weges $AC$ — der für den Weg $AD$ erforderlichen Zeit, d. h.

$$\frac{2\pi - arc\cos\frac{CD}{AC}}{\sqrt{2g'}} = \frac{\frac{1}{a}(\text{Bog.}AMA' - \text{Bg.}AF)}{\sqrt{2g'}}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\,\text{Bogen } AMF}{\sqrt{2g'}} = \frac{arc\cos\frac{CD'}{AC}}{\sqrt{2g'}}$$

welchen letzteren Ausdruck die Formel unmittelbar giebt.

9. Nimmt man für $AA'$ den Durchmesser der Erde, wie dies auch ad 5 die vorstehende Aufgabe veranlaſst hat, so ist in der Entfernung $a$ (jetzt $r$), nämlich in $A$ die Beschleunigung $= g = 15\frac{5}{8}$ Fuſs, und $g : g' = r : 1$

woraus $g' = \frac{g}{r}$

Dann ist die Geschw. (s. No. 5) in dem Augenblick, wo von $A$ nach dem Mittelpunkt $C$ der Erde hin der Weg $s$ durchlaufen ist,

$$v = \sqrt{2gs\frac{2r-s}{r}}$$

Die Geschw. im Mittelpunkt $C$ der Erde (s. No. 6):

$$v = \sqrt{2gr}$$

Die Zeit, in welcher der Körper den Weg $s$ von $A$ aus nach $C$ hin zurückgelegt hat (s. No. 7):

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot arc\cos\frac{r-s}{r}$$

und die Zeit, nach welcher er von $A$ aus in dem Mittelpunkt $C$ der Erde eintrifft, (s. No. 8):

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

und die Zeit, in welcher der Körper den ganzen Durchmesser der Erde durchläuft,

$$2T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

Für die Geschw. = Null in $A$ ist die Geschw. im Erdmittelpunkt

$$V = \sqrt{2\frac{125}{8} \cdot 860 \cdot 24000} = 25397 \text{ Fuſs}$$

und die Zeit

$$2T = 3{,}14159\ldots\sqrt{\frac{860 \cdot 24000}{2} \cdot \frac{8}{125}}$$

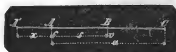
$= 2553$ Secunden

$= 42$ Minuten $33$ Secunden

wonach der Körper denselben Weg in derselben Zeit wieder zurückkehrt.

10. In No. 5 ist angenommen, daſs der Mond durch die Erdhöhlung hindurch falle, dieser kommt aber in $A$ mit schon bedeutender Geschw. an. Dies führt auf die Untersuchung, wie $V$ in $C$ und $T$ sich ändern, wenn ein Körper von $A$ aus mit der Geschw. $c$ statt von der Ruhe aus durch die Erde zu fallen beginnt.

Fig. 183.




Hat der Körper im Anfangspunkt $A$ seiner Bew. die Geschw. $c$, so sei $A_1$ der Punkt in der Entfernung $A_1A = x$ von $A_1$, in welchem der Körper von der Ruhe aus nach $c$ hin sich bewegen müſste, um nach Durchlaufung des Weges $x$ die Geschw. $c$ zu erlangen. Dann findet man $x$ unmittelbar aus der Formel No. 5:

$$v = \sqrt{2g's(2a-s)}$$

wenn man $c$ für $v$, $x$ für $s$ und $(x+a)$ für $a$ setzt. Und es ist:

$$c = \sqrt{2g'x[2(a+x)-x]}$$

also $c^2 = 2g'x(2a+x)$

$$\text{woraus } x = -a + \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{2g'}}$$

Man erhält nun $v$, die Geschw. in $B$, aus derselben Formel, wenn man $(s+x)$ für $s$ und $(a+x)$ für $a$ setzt, nämlich

$$v = \sqrt{2g'(s+x)[2(a+x)-(s+x)]}$$

$$= \sqrt{2g'(s+x)(2a+x-s)}$$

$$= \sqrt{2g'[(2a+x)x+2as-s^2]}$$

$$v = \sqrt{2g's(2a-s)+c^2} \qquad (1)$$

Nun findet man $t$ für den Weg $AB = s$, wenn man in die Formel No. 7:

$$t = \frac{arc\cos\frac{a-s}{a}}{\sqrt{2g'}}$$

zuerst $a+x$ für $a$ und $x$ für $s$ setzt

hierauf $a+x$ für $a$ beibehält, $s+x$ für $s$ setzt und den ersten Werth von dem zweiten abzieht, also:

$$t=\frac{arc\cos\frac{a+x-(s+x)}{a+x}}{\sqrt{2g'}}-\frac{arc\cos\frac{a+x-x}{a+x}}{\sqrt{2g'}}$$

$$=\frac{arc\cos\frac{a-s}{a+x}-arc\cos\frac{a}{a+x}}{\sqrt{2g'}}$$

$$=\left(arc\cos\frac{a-s}{\sqrt{a^2+\frac{c^2}{2g'}}}-arc\cos\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{c^2}{2g'}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2g'}} \qquad (2)$$

11. Werden nun die beiden Formeln No. 10 für $v$ und $t$ auf die Erde bezogen, wie in No. 9, so erhält man für den Weg bis zum Mittelpunkt $C$ derselben $a=r$, $s=r$,

$$g'=\frac{g}{r}$$

$$V=\sqrt{2gr+c^2} \qquad (1)$$

$$T=\sqrt{\frac{r}{2g}}\left[arc\cos 0-arc\cos\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{c^2r}{2g}}}\right]$$

$$T=\sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\frac{\pi}{2}-arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

Setzt man in die Formel 1, No. 10, $s=2a$, so erhält man $v=\sqrt{0+c^2}=c$; fällt also ein Körper mit der Anfangsgeschw. $c$ durch die Erde, so erhält er an der entgegengesetzten Oberfläche dieselbe Anfangsgeschw. als Endgeschw., demnach ist

$$2T=2\sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\frac{\pi}{2}-arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\pi-2\,arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

Nun war (No. 4) die Geschw., mit welcher der Mond die Erde trifft, $=35606$ Fufs.

Nach No. 9 ist $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}=2553$ Sec. hiervon ist abzuziehen

$$2\sqrt{\frac{r}{2g}}\,arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{860\cdot 24000}{2\cdot 15\frac{5}{8}}}\cdot arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{35606^2}{2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 860\cdot 24000}}}$$

| | |
|---|---|
| $\log 2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 860\cdot 24000$ | $=8{,}8095598$ |
| $\log 35606^2$ | $=9{,}1030464$ |
| Differenz | $=0{,}2934866$ |
| Quotient | $=1{,}96556$ |
| $\sqrt{\frac{1}{41{,}96556}}$ | $=0{,}5806930$ |
| | $=\cos 54°\,30'\,30''$ |
| $arc\cos 54°\,30'\,30''$ | $=0{,}9512190$ |
| $2\,arc\cos 54°\,30'\,30''$ | $=1{,}9024380$ |
| $\log\sqrt{\frac{860\cdot 24000}{2\cdot 15\frac{5}{8}}}$ | $=2{,}9049298$ |
| $\log 1{,}902438$ | $=0{,}2793105$ |
| Summa | $3{,}1842403$ |
| Numerus ab mit | 1528 S. |
| Zeit, in welcher der Mond durch die Erde fällt | 1025 S. |

$=17$ Minuten 5 Secunden.

Nach No. 4 fällt der Mond bis auf die Oberfläche der Erde 111 Std. 3 Min. 2 Sec.
bis zum Mittelpunkt noch — „ 8 „ $32\frac{1}{2}$ „
in Summa 111 Std. 11 Min. $34\frac{1}{2}$ Sec.

Er hat dort sein Maximum von Geschwindigkeit (No. 11, Formel 1)

$$\sqrt{2\cdot\frac{125}{8}\cdot 860\cdot 24000+35606^2}=43735 \text{ Fufs}$$

Mit dieser Geschw. entfernt sich der Mond von dem Mittelpunkt der Erde, kommt mit der verminderten Geschw 356006 Fufs an die entgegengesetzte Erdoberfläche und geht von dort weiter, bis in Entfernung von 50000 Meilen seine Geschw. = Null wird, und fängt seine pendulirende Bew. von Neuem an.

**Bahn der Weltkörper.** (Allgemeine Untersuchung.) In dem Art.: „Attraction", No. 4 ist die Entstehung der Bahnen von Weltkörpern hypothetisch, in dem Art.: „Bahn", No. 4 und 5 dynamisch und geometrisch im Allgemeinen dargestellt. Aus dem Letzteren ist zu ersehen, dafs die genauere Einsicht in die Sache auf der Auflösung folgender Aufgabe beruht.

Die translatorische Bew. eines Körpers in einer Ebene wird dadurch beschränkt, dafs eine in einem und demselben Punkt befindliche Kraft auf den Körper anziehend wirkt, deren Gröfse mit dem Quadrat ihres Abstandes von dem Körper umgekehrt proportional ist; die Bahn des Körpers zu bestimmen.

Bei der folgenden Auflösung ist zu bemerken, dafs die Entwickelung und Begründung der hier als bekannt vorausgesetzten phoronomischen und dynamischen Fundamentalgesetze und Formeln den Artikeln: „Bewegung etc." vorbehalten bleiben müssen.

Fig. 184.




Es sei $C$ der Sitz der anziehenden Kraft (der Centralpunkt), $m$ die sich bewegende Masse; in der Entfernung $R$ der Masse von $C$ sei die auf dieselbe wirkende Kraft $= P$, nach Verlauf der Zeit $t$ habe $m$ den Abstand $r$ von $C$, so ist der Voraussetzung nach in diesem Angenblick die bewegende Kraft $= \frac{R^2}{r^2} P$ und die beschleunigende Kraft $= \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{P}{m}$ (oder wenn man die Constante $\frac{R^2 P}{m} = A$ setzt) $= \frac{A}{r^2}$

$X$, $Y$, zwei durch $C$ gerichtete rechtwinklige Coordinatenaxen geben also (siehe „Bahnbestimmung aus relativen Bewegungen") die beschleunigende Seitenkraft nach $X = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = A \frac{x}{r^3}$

nach $Y = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = A \frac{y}{r^3}$

wenn $x$ und $y$ die in $X$ und $Y$ liegenden zu $r$ gehörenden Ordinaten bezeichnen.

Bedeutet nun $G$ die Beschleunigung der Massen-Einheit gegen die anziehende Kraft-Einheit in der Entfernung $R$ beider, so ist die Beschleunigung der Masse $m$ in der Entfernung $R = G \frac{P}{m}$, d. h. der Weg, den die Masse $m$ in der Entfernung $R$ von der Ruhe aus in geradliniger Bewegung nach $P$ hin gerichtet in der ersten Secunde zurücklegen würde; die Beschleunigung der Masse $m$ in der Entfernung $r$ von $P = G \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{P}{m} = G \frac{A}{r^2}$, und die Seitenbeschleunigungen nach den Richtungen $CX$ und $CY$ unter den Ordinaten $x$ und $y$

$$= GA \frac{x}{r^3} \text{ und } GA \frac{y}{r^3}$$

Da aber mit dem Wachsthum der Zeit zugleich die Ordinaten wachsen, während die denselben entgegengesetzt wirkenden Kräfte immerfort abnehmen, so sind die Beschleunigungen negativ, und man hat die Seitenbeschleunigungen $- GA \frac{x}{r^3}$ und $- GA \frac{y}{r^3}$

Nun ist phoronomisch allgemein

$$G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\Delta t^2}$$

daher hat man

$$- GA \frac{x}{r^3} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} \qquad (1)$$

$$- GA \frac{y}{r^3} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\Delta t^2} \qquad (2)$$

indem $x$ und $y$ als die zu dem wirklichen Weg $r$ der Masse gehörenden Seitenwege betrachtet werden müssen. Die erste Gl. mit $4 \frac{\partial x}{\Delta t}$, die aweite mit $4 \frac{\partial y}{\Delta t}$ multiplicirt, beide Gl. addirt, gieht

$$2 \frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} \cdot \frac{\partial x}{\Delta t} + 2 \frac{\partial^2 y}{\Delta t^2} \cdot \frac{\partial y}{\Delta t} = - \frac{4 GA}{r^3} \left( x \frac{\partial x}{\Delta t} + y \frac{\partial y}{\Delta t} \right)$$

und integrirt

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = -4GA\int \frac{x\frac{\partial x}{\Delta t}+y\frac{\partial y}{\Delta t}}{r^3}\cdot\partial t \qquad (3)$$

Um das Integral auf $r$ statt auf $t$ als Urveränderlichen nehmen zu können, hat man aus der Figur:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

dies differenzirt und mit 2 dividirt, giebt

$$r\frac{\partial r}{\Delta t} = x\frac{\partial x}{\Delta t} + y\frac{\partial y}{\Delta t}$$

Diesen Werth in Gl. 3 substituirt:

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = -4GA\int \frac{\frac{\partial r}{\Delta t}}{r^2}\cdot\partial t$$

$$= -4GA\int r^{-2}\cdot\partial r$$

mithin

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = +\frac{4GA}{r} + (K = \text{Const.}) \qquad (4)$$

Um die Gl. zu vereinfachen und statt der beiden Ordinaten $x$ und $y$ nur **eine** Veränderliche zu erhalten, setze man den Bogen für den Halbmesser $= 1$ zwischen den Schenkeln des $\angle rx = \varphi$, so hat man

$$x = r\cos\varphi \qquad (5)$$

$$y = r\sin\varphi \qquad (6)$$

Beide Gl. nach $t$ differenzirt:

$$\frac{\partial x}{\Delta t} = -r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta t} + \cos\varphi\frac{\partial r}{\Delta t} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\Delta t} = r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta t} + \sin\varphi\frac{\partial r}{\Delta t} \qquad (8)$$

Diese beiden Gl. quadrirt und addirt, geben die Gl.

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2$$

Mithin hat man mit Hülfe von Gl. (4)

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K \qquad (9)$$

Es kommt nun darauf an, aus dieser Gl. die Zeit $t$ zu eliminiren, um eine Differenzialgleichung zwischen $r$ und $\varphi$ zu erhalten, d. h. eine Polargleichung der zu findenden Bahn, indem $r$ der nach Verlauf der Zeit $t$ bestehende Radius vector ist.

Multiplicirt man aber die beiden Beschleunigungsgleichungen (1) und (2), die erste mit $y$, die zweite mit $x$, und subtrahirt, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} - x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right) = 0 \qquad (10)$$

mithin ist

$$\int\left[y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} - x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right] = \text{einer Constante.}$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int \varphi x\cdot fx\cdot\partial x = \varphi x\int fx\cdot\partial x - \int\left[\frac{\partial\varphi x}{\Delta x}\int fx\cdot\partial x\right]$$

ist aber

$$\int y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t = y\int\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t - \int\left[\frac{\partial y}{\Delta t}\cdot\int\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t\right]$$

also

$$\int y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t = y\frac{\partial x}{\Delta t} - \int\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\cdot\frac{\partial x}{\Delta t}\right)\partial t$$

Eben so

$$\int x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\partial t = x\frac{\partial y}{\Delta t} - \int\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\cdot\frac{\partial y}{\Delta t}\right)\partial t$$

folglich beide letzten Gl. von einander subtrahirt

$$\int\left[y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} - x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right]\partial t = y\frac{\partial x}{\Delta t} - x\frac{\partial y}{\Delta t} = \text{Constante.}$$

Substituirt man hierin für $y$, $x$, $\frac{\partial y}{\Delta t}$, $\frac{\partial x}{\Delta t}$ aus den Gl. (5) bis (8) die Polarwerthe, so erhält man

$$-\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \text{Constante}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = -\text{Constante}$$

und wenn man diese subtractive Constante mit $k$ bezeichnet

$$\frac{\partial \varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2} \tag{11}$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{\partial r}{\Delta \varphi}$ so hat man

$$\frac{\partial r}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\Delta \varphi}$$

woraus

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2} \frac{\partial r}{\Delta \varphi} \tag{12}$$

Setzt man die in Gl. (11) und (12) gefundenen Werthe für $\frac{\partial \varphi}{\Delta t}$ und $\frac{\partial r}{\Delta t}$ in Gl. (9), so erhält man die von $t$ unabhängige Gleichung

$$\frac{4k^2}{r^2} + \frac{4k^2}{r^4}\left(\frac{\partial r}{\Delta \varphi}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Dividirt man diese Gl. mit 4, setzt $\frac{K}{4} = C$ und ordnet nach $\frac{1}{r}$, so hat man

$$\frac{k^2}{r^4}\left(\frac{\partial r}{\Delta \varphi}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} - \frac{GA}{r} - C = 0 \tag{13}$$

Setzt man nun, um leichter integriren zu können

$$r = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta \varphi} = -s^{-2}\frac{\partial s}{\Delta \varphi} = \frac{-\frac{\partial s}{\Delta \varphi}}{s^2}$$

Diese Werthe für $r$ und $\frac{\partial r}{\Delta \varphi}$ in Gl. (13) gesetzt und reducirt, giebt

$$k^2\left(\frac{\partial s}{\Delta \varphi}\right)^2 + k^2 s^2 - GAs - C = 0 \tag{14}$$

woraus

$$\left(\frac{\partial s}{\Delta \varphi}\right)^2 = \frac{C}{k^2} + \frac{GAs}{k^2} - s^2$$

Hieraus die $\sqrt[2]{}$ gezogen und in 1 dividirt:

$$\frac{\partial \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{k^2} + \frac{GAs}{k^2} - s^2}}$$

woraus

$$\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{k^2} + \frac{GAs}{k^2} - s^2}} \partial s \tag{15}$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, arc \sin \frac{-b + 2cx}{\sqrt{4ac + b^2}}$$

hat man

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1}} \, arc \sin \frac{-\frac{GA}{k^2} + 2s}{\sqrt{4\frac{C}{k^2} + \frac{G^2A^2}{k^4}}} + (\text{Cnst} = C^1)$$

$$= arc \sin \frac{-GA + 2k^2 s}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}} + C'$$

Oder wenn man (da $GA = G\frac{R^2 P}{m}$ ist und $2k^2 s = \frac{2k^2}{r}$ mit dem Wachsthum von $r$ gegen die Constante $GA$ immerfort abnimmt) das constante Glied $GA$ additiv und das variable $2k^2 s$ subtractiv nimmt

$$\varphi = arc \cos \frac{GA - 2k^2 s}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}} + C'$$

Setzt man $C' = \alpha$, so erhält man

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{GA - 2k^2 s}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}}$$

Für $s$ seinen Werth $\frac{1}{r}$ gesetzt und die Nenner fortgeschafft

$$r\left[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} \cdot \cos(\varphi - \alpha)\right] = 2k^2 \tag{16}$$

als Polargleichung der gesuchten Bahncurve.

Fig. 185.

Um diese in eine Coordinatengleichung zu verwandeln, nehme man zur neuen Coordinatenaxe der $X'$ die von dem Centralpunkt $C$ aus gezogene gerade Linie, welche mit der ersten Axe der $X$ den $\angle \alpha$ nach $M$ hin bildet und die Axe der $Y'$ rechtwinklig darauf. Alsdann ist

$$x_1 = r \cos(\varphi - \alpha)$$
$$y_1 = r \sin(\varphi - \alpha)$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

mithin

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\left[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right] = 2k^2$$

oder

$$GA\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2k^2 + \sqrt{4Ck^2+G^2A^2}\cdot x_1 \qquad (17)$$

Die Gleichung quadrirt, reducirt, geordnet, und $y$; $x$ für $y_1$; $x_1$ gesetzt:

$$y^2 - \frac{4Ck^2}{G^2A^2}x^2 - \frac{4k^2}{G^2A^2}x\sqrt{4Ck^2+G^2A^2} - \frac{4k^4}{G^2A^2} = 0 \qquad (18)$$

2. Die Bahn der Masse $m$ erweist sich durch Gl. (18) als einen Kegelschnitt, für den die rechtwinkligen Ordinaten $y$ durch die Abscissen $x$ ausgedrückt sind, welche in dem Centralpunkt $C$ ihren Anfangspunkt haben.

Da die Gl. ein absolutes Glied $\frac{4k^4}{G^2A^2}$ hat, so liegt der Centralpunkt als Anfangspunkt der Abscissen nicht in der Curve selbst.

Da für $x=0$, $y^2=\frac{4k^4}{G^2A^2}$, also $y=\pm\frac{2k^2}{GA}$ in zwei gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Längen ausgesprochen ist, so liegt der Centralpunkt in einem Durchmesser des Kegelschnitts, und, da zugleich die Coordinaten normal auf einander sind, mit der Abscissenlinie selbst in der Axe des Kegelschnitts.

Gl. (17) mit $GA$ dividirt, giebt

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2k^2}{GA} + \frac{x}{GA}\sqrt{4Ck^2+G^2A^2}$$

Nun ist $\sqrt{x^2+y^2}$ offenbar der Abstand der Masse $m$ vom Centralpunkt $C$, durch den die Abscissenlinie gelegt ist. Dieser Abstand ist aber ganz allgemein, wie die Gl. zeigt, rational durch die Abscisse $x$ ausgedrückt, und es hat nur ein Punkt innerhalb einer Kegelschnittsebene als Anfangspunkt der Abscissen diese Eigenschaft, nämlich der Brennpunkt. Demnach ist der Sitz der anziehenden Kraft als Centralpunkt der Bewegung der Brennpunkt des Kegelschnitts.

3. Es soll nun der Kegelschnitt selbst näher ermittelt werden, in welchem die Bahn der Masse besteht, und man ersieht, daſs derselbe sowohl in Art als auch in Form von den beiden Constanten $C$ und $k$ abhängt. Die zunächst wichtigste dieser beiden Bedingungsgröſsen ist offenbar die Constante $C$, weil diese, in einfacher Potenz unter der $\sqrt[2]{\ }$ stehend, durch einen negativen Werth eine Bahn ganz unmöglich machen kann, während $k^2$ daselbst immer positiv ist.

a) Ist $C$ negativ, so ist eine Bahn nur möglich, wenn

$$C \leqq \frac{G^2A^2}{4k^2}$$

Für den ersten Fall, daſs $C<\frac{G^2A^2}{4k^2}$ wird das zweite Glied der Gl. (18) positiv und die Gl. ist von der Form

$$y^2+Ex^2-Bx-D=0$$

Für eine positive Abscisse $x$ kann $x$ nun so groſs genommen werden, daſs

$$Ex^2>Bx+D$$

Dann wird $y^2$ negativ, also unmöglich.

b) Für eine negative Abscisse bleibt $Ax^2$ positiv, $Bx$ wird positiv und es kann $x$ wieder so groſs genommen werden, daſs

$$Ex^2+Bx>D$$

wo dann wieder $y^2$ negativ und unmöglich wird.

c) Für $Ex^2=Bx+D$ und für $E\cdot(-x)^2-B\cdot(-x)=D$ wird $y=0$; $Ex^2<Bx+D$ und $E\cdot(-x)^2-B\cdot(-x)<D$ geben reelle Werthe für $y$. Da nun zugleich für $x=0$ ein reeller Werth für $y$, nämlich $y=\pm\frac{2k^2}{GA}$ entsteht, so ist die Abscisse nach beiden Richtungen in ihrer Länge beschränkt; d. h. die Bahn ist eine geschlossene Curve, also eine Ellipse oder ein Kreis.

Die Länge der Abscisse für beide Endpunkte oder für die Scheitel giebt Gl. (18) für $y=0$, nämlich

$$Cx^2 - x\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2} - k^2 = 0$$

woraus

$$x=\frac{1}{2C}\left[\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}\pm GA\right]$$

zwei Abscissen, die eine positiv, die andere negativ, beide von ungleicher Länge, die Curve also eine Ellipse. Die absolute Länge der negativen Abscisse ist

$$\frac{1}{2C}\left[GA-\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}\right]$$

die der positiven

$$\frac{1}{2C}\left[GA+\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}\right]$$

Die absolute Summe beider giebt die Länge der groſsen Axe $\frac{GA}{C}$

Die Differenz beider die Excentricität (die Entfernung beider Brennpunkte)

$$\frac{1}{C}\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}$$

Je gröfser $C$ ist, desto kleiner wird die Excentricität, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; je kleiner $C$ ist, desto kleiner ist die negative Abscisse, d. h. desto kleiner die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel, desto gröfser der Unterschied zwischen beiden Abscissen, und desto gestreckter die Ellipse.

4. Für den zweiten Fall, dafs $C = \frac{G^2 A^2}{4 k^2}$ wo die Excentricität der eben gedachten Ellipse = 0 wird, die Curve also ein Kreis ist, hat man dies Ergebnifs unmittelbar aus Gl. (18), denn diese verwandelt sich in

$$y^2 + x^2 - \frac{4 k^4}{G^2 A^2} = 0$$

woraus

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{2 k^2}{G A}\right)^2 - x^2}$$

zwei Ordinaten, beide von gleicher Länge und in entgegengesetzter Richtung.

5. Ist in Gl. (18) $C$ positiv, also

$$\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}$$

immer möglich, so ist für jede positive und jede negative Abscisse $x$, die Ordinate $y$ reell, die Curve also eine Hyperbel, sofern diese 2 Aeste hat.

Sucht man die Abscisse $x$, für welche die Ordinate $y = 0$ wird, so erhält man aus Gl. (18) nachdem man reducirt hat:

$$-x^2 - x\frac{\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}}{C} - \frac{k^2}{C} = 0$$

woraus hervorgeht, dafs $x$ nicht positiv sein kann, wie auch die Natur der Hyperbel bedingt, indem von einem Brennpunkte aus die Scheitel beider Aeste der fortschreitenden Richtung der Abscissen entgegengesetzt liegen.

Für ein negatives $x$ hat man

$$-x^2 + x\frac{\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}}{C} - \frac{k^2}{C} = 0$$

oder

$$x^2 - \frac{x}{C}\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} + \frac{k^2}{C} = 0$$

woraus

$$x = \frac{1}{2C}\left[\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} \pm GA\right]$$

also 2 Längen für beide Scheitel. Die Differenz beider Längen $\frac{GA}{C}$ ist offenbar die Entfernung beider Scheitel von einander, die Hauptaxe der beiden Hyperbeln; die kleinere Abscisse

$$\frac{1}{2C}\left[\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} - GA\right]$$

die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt desselben Astes.

6. Für $C = 0$ in der Gl. (18) verwandelt sich diese in

$$y^2 - \frac{4 k^2}{GA} x - \frac{4 k^4}{G^2 A^2} = 0$$

die Bahn ist eine Parabel.

$$y = \pm \frac{2 k}{GA}\sqrt{k^2 + GAx}$$

Für jedes positive $x$ giebt es also zwei gleiche entgegengesetzt liegende Ordinaten $y$; die negativen Werthe von $x$ sind jedoch beschränkt und zwar mufs $x < \frac{k^2}{GA}$ bleiben; für $x = -\frac{k^2}{GA}$ wird $y = 0$, und $\frac{k^2}{GA}$ ist die Länge vom Brennpunkt bis zum Scheitel.

7. Nach diesen allgemeinen Untersuchungen ist nun erforderlich, die Constanten $C$ und $k$ zu bestimmen und die obigen Bedingungen für die Art und die Form der Kegelschnittsbahnen durch dynamische Elemente auszudrücken.

1. Constante $C$.

Die allgemeine dynamische Gl. No 4 ist

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4 GA}{r} + K$$

Von Gl. (13) ab ist $C = \frac{K}{4}$

Bezeichnet man mit $\frac{\partial s}{\Delta t}$ das Differenzial des Weges in der Bahn während der Zeit $t$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\Delta t}\right)^2$$

und bezeichnet $v$ die Geschw. der Masse am Ende der Zeit $t$, so ist $v^2 = \left(\frac{\partial s}{\Delta t}\right)^2$ folglich hat man

$$v^2 = \frac{4 GA}{r} + 4C$$

Bezeichnet man mit $V$ die Geschw. der Masse zu Anfang der Zeit $t$, also bei dem Abstande $R$ der Masse von dem Centralpunkt, so wird für $v = V$, auch $r = R$, und es ist

$$V^2 = \frac{4GA}{R} + 4C$$

$$= GR\frac{P}{m} + 4C$$

und

$$C = \frac{1}{4}\left[V^2 - 4 GR\frac{P}{m}\right] \quad (19)$$

Da nun $\frac{P}{m}$ die auf die Masse $m$ in deren Entfernung $= R$ vom Centralpunkt wirkende beschleunigende Kraft ist, so ist: $4 GR\frac{P}{m}$ = dem Quadrat der Geschw., mit welcher die Masse $m$ in den

Centralpunkt eintreffen würde, wenn sie in der Entfernung $R$ von der Ruhe aus mit unveränderter beschleunigender Kraft geradlinig nach dem Centralpunkt hin sich bewegte.

Ist nun die Geschw. $V$ nach der Richtung des Bahn-Elements in der Entfernung $R$ vom Centralpunkt gröfser als die eben gedachte Endgeschwindigkeit bei der geradlinigen Bewegung nach dem Centralpunkt hin, so ist $C$ positiv, die Bahn also nach No. 5 eine Hyperbel.

Ist die Geschw. $V$ in der Bahn kleiner als die Endgeschw. bei der Bew. nach dem Centrum, so wird $C$ negativ und die Bahn ist nach No. 3 und 4 entweder eine Ellipse oder ein Kreis.

Ist endlich $V =$ der geradlinig nach dem Centralpunkt erlangten Endgeschw., so ist $C = 0$ und die Bahn nach No. 6 eine Parabel.

8. 2. Constante $k$.

Die dynamische Polargleichung (9) ist

$$r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Aus Gl. (11) ist

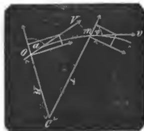
$$\frac{\partial \varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}$$

diesen Werth von $\frac{\partial \varphi}{\Delta t}$ in die vorige Gl. eingeführt und $4C$ für $K$ gesetzt giebt

$$\frac{4k^2}{r^2} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + 4C \qquad (20)$$

Nun ist $\frac{\partial r}{\Delta t}$ die Geschw. in der Richtung ($Cm$) des Radius vector nach Verlauf der Zeit $t$, wenn man die Geschw. $v$ in der

Fig. 186.




Bahnrichtung nach 2 Seitengeschw. zerlegt, von denen die eine in den Radius vector, die andere normal darauf gerichtet ist. Bezeichnet man den Winkel, den das Bahn-Element in dem Abstand $r$ vom Centralpunkt mit dem Radius vector $r$ bildet, mit $\psi$, so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = v \cos \psi$$

Die Gl. (20) gilt aber für jeden Punkt der Bahn, also auch für den Punkt $O$ in dem Abstande $R$ vom Centralpunkt, in welchem die Geschw. nach der Bahnrichtung $= V$ ist. Setzt man den Winkel zwischen $R$ und dem Bahn-Element $= \alpha$, so wird

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{\partial R}{\Delta t} = V \cos \alpha$$

folglich hat man aus Gl. 20

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2 \cos^2 \alpha = \frac{4GA}{R} + 4C$$

Für $C$ den in Gleichung (19) gefundenen Werth gesetzt:

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2 \cos^2 \alpha = \frac{4GA}{R} + V^2 - 4GR\frac{P}{m}$$

und da

$$A = R^2 \frac{P}{m}$$

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2 \cos^2 \alpha \; V^2$$

woraus

$$\frac{4k^2}{R^2} = V^2 \sin^2 \alpha$$

und

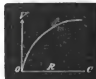
$$k = \tfrac{1}{2} RV \sin \alpha$$

Versteht man unter $R$ den Abstand des Scheitels der Curve vom Brennpunkt, so ist

$$\alpha = 90^0 \text{ und}$$
$$k = \tfrac{1}{2} RV$$

9. Von hier ab wird also unter $V$ die Geschw. in dem Scheitel des

Fig. 187.




Kegelschnitts verstanden, der von dem Centralpunkt, dem Brennpunkt $C$ des Kegelschnitts um die Länge $R$ entfernt ist, $V$ normal auf $R$ und $V$ und $R$ constant gegeben.

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so ist die Masse $m$ (der Planet) in einem der beiden Scheitel, die Centralkraft (die Sonne) in dem diesem Scheitel zunächst liegenden Brennpunkt, also innerhalb der hohlen Curve; $R$ ist der kleinste Radius

vector und deshalb $V$ die gröfste Geschw. des Planeten in seiner Bahn. Der Ort $O$ des Planeten ist das Perihelium, das Aphelium ist unendlich fern von der Sonne.

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so steht der Planet in dem einzigen Scheitel; alles Uebrige ist wie bei der Hyperbel.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so kann der Scheitel, in dem der Planet sich befindet, der Sonne am nächsten und am entferntesten sein, da die Ellipse zwei Brennpunkte hat. Der Consequenz wegen soll unter $O$ das Perihelium, unter $V$ also die gröfste Geschw. des Planeten in seiner Bahn verstanden werden.

Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so befindet sich die Sonne im Mittelpunkt, der Planet in irgend einem Ort der Peripherie, und da alle Radii vectoren gleich lang sind, so ist die Geschw. in allen Orten der Bahn gleich grofs $= V$.

10. Die Bedingung für die Möglichkeit einer Bahn ist nach Gl (19) No. 7 entweder

$$1)\quad V^2 \geqq 4GR\frac{P}{m}$$

oder

$$2)\quad \text{wenn } V^2 < 4GR\frac{P}{m}$$

$$\text{dafs}\quad C \leqq -\frac{G^2A^2}{4k^2}$$

so dafs der gröfste negative Werth, den $C$ annehmen darf $= \frac{G^2A^2}{4k^2}$ ist.

Dieser zweite einschränkende Fall ist für die Möglichkeit der Bahn nur allein zu untersuchen, und indem für $C$ und $k$ die dynamischen Werthe eingesetzt werden, die dynamischen Bedingungen für die Existenz einer Bahn der Weltkörper zu bestimmen. Gl. (19) besagt:

$$C = \tfrac{1}{4}\left(V^2 - 4GR\frac{P}{m}\right)$$

also wenn $C$ negativ ist

$$C = \tfrac{1}{4}\left(4GR\frac{P}{m} - V^2\right)$$

ferner ist

$$\frac{G^2R^2}{4k^2} = \frac{G^2}{4}\,\frac{\left(R^2\frac{P}{m}\right)^2}{(\frac{1}{2}RV)^2}$$

Die Bedingung für die Existenz einer Bahn ist also

$$\tfrac{1}{4}\left(4GR\frac{P}{m} - V^2\right) \gtrless \tfrac{1}{4}G^2\,\frac{R^4\frac{P^2}{m^2}}{\frac{1}{4}R^2V^2}$$

und reducirt

$$0 \gtrless 4G^2R^2\frac{P^2}{m^2} - 4GR\frac{P}{m}V^2 + V^4$$

oder

$$0 \gtrless \left(2GR\frac{P}{m} - V^2\right)^2$$

Da nun jedes Quadrat zwei gleiche entgegengesetzte Wurzeln hat, so ist die Bedingung

$$0 \gtrless \pm\left(2GR\frac{P}{m} - V^2\right)$$

Es ist mithin nur das Gleichheitsverhältnifs

$$0 = 2GR\frac{P}{m} - V^2$$

d. h.

$$V^2 = 2GR\frac{P}{m}$$

als Bedingung für die Möglichkait einer Bahn zuverlässig, die zweite Bedingung

$$V^2 \lesseqgtr 2GR\frac{P}{m}$$

bleibt unbestimmt. Soviel aber steht schon fest, dafs die Existenz einer Bahncurve eben so wie die Gestalt und die Natur der Curve von der Gröfse von $V$, der Geschw. im Perihel, einzig und allein abhängt

Da nun nach No. 6 für $C = 0$, also nach No. 7 für $V^2 = 4GR\frac{P}{m}$ dem gröfsten Werth von $v^2$, eine Parabel, für $V^2 < 4GR\frac{P}{m}$ eine Ellipse, und für $V^2 = 2GR\frac{P}{m}$ ein Kreis entsteht, so scheint dieser letzte Werth von $V^2$ die Grenze, das Minimum von $V = \sqrt{2GR\frac{P}{m}}$ anzugeben und in der obigen unbestimmt gebliebenen Vergleichung

$$V^2 > 2GR\frac{P}{m}$$

als Bedingung für die Existenz einer Bahn die richtige zu sein, wie schon der Satz No. 6 im Art. Bahn vermuthen läfst.

Man mag aber in dem maafsgebenden Factor $\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}$ von $x$ in Gl. (18), also nach Substitution der dynamischen Werthe für $C$ und $k$ in

$$R\sqrt{G^2R^2\frac{P^2}{m^2} - GR\frac{P}{m}V^2 + \tfrac{1}{4}V^4}$$

$V^2 >$ oder $< 2GR\frac{P}{m}$ setzen, die Gröfse unter der $\sqrt{\ }$ bleibt positiv und die Bahn in sofern möglich. Man mufs also die Untersuchung weiter ausdehnen.

11. Man setze die noch unbestimmte Gröfse allgemein

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

wo $n$ eine positive beliebige Zahl bedeutet.

Schreibt man nun Gl. (18):

$$y^2 - \frac{4k^2}{G^2A^2}\left[Cx^2 + x\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} + k^2\right] = 0$$

so erhält man, für $k$ seinen Werth $\frac{1}{2}RV$ gesetzt,

$$\frac{4k^2}{G^2A^2} = \frac{V^2}{G^2R^2\frac{P^2}{m^2}} = \frac{n}{GR\frac{P}{m}}$$

$$C = \frac{n-4}{4}\,GR\frac{P}{m}$$

$$\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} = \frac{n-2}{2}\,GR^2\frac{P}{m}$$

und Gl. (18) verändert sich in

$$y^2 - \frac{n(n-4)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0 \quad (21)$$

Für $n < 2$ hat man

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}x^2 + \frac{n(2-n)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

Nun ist für $x = -R$ bedingungsmäfsig $y = 0$ die Ordinate für den dem Brennpunkt nächsten Scheitel, es mufs also für $x = +R$ die Ordinate entweder $= 0$, nämlich für den Kreis, oder eine mögliche Gröfse sein für jeden anderen Kegelschnitt. Schreibt man aber $+R$ für $x$, so erhält man die Gl.

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}R^2 + \frac{2n(2-n)}{4}R^2 - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus

$$y^2 = \frac{R^2}{4}\left[-4n + n^2 - 4n + 2n^2 + n^2\right]$$

$$= nR^2(-2 + n)$$

also, da $n < 2$ ist, $y^2$ eine negative Gröfse, welches unmöglich ist. Die ad 10 ausgesprochene Vermuthung, dafs $2\,GR\frac{P}{m}$ die Grenze und zwar das Minimum von $V^2$ sein werde, sobald der Punkt für die Abscisse $x = -R$ der dem Brennpunkt **nächste** Scheitel ist, ist demnach als richtig erwiesen.

Setzt man, um die Curve (Gl. 21) näher zu untersuchen, $y = 0$, so erhält man aus Gl. 21 offenbar die Abscisse $x$ für einen Scheitel in

$$\frac{n(4-n)}{4}x^2 + \frac{2n(2-n)}{4}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus

$$x^2 + \frac{2(2-n)}{4-n}Rx - \frac{n}{4-n}R^2 = 0$$

und

$$x = \frac{2-n \pm 2}{4-n}R$$

also $x$ entweder $= R$

oder $\qquad = -\frac{n}{4-n}R$

da nun $n < 2$, so ist der Zähler $(n) < 2$, der Nenner $(4-n) > 2$, mithin **die negative Abscisse gegen die Bedingung kleiner als** $R$; ferner die positive Abscisse $= R$ gröfser als die negative Abscisse; Perihel und Aphel haben mit einander gewechselt, im Aphel in dem Abstande $R$ vom Brennpunkt ist die Geschwindigkeit $= V$, die kleinste in der Bahn, während sie als die gröfste im Perihel festgesetzt worden und die gröfste Geschw. im Perihel ist nun:

$$= V \cdot \frac{R^2}{\left(\frac{n}{4-n}\right)^2 R^2} = \left(\frac{4-n}{n}\right)^2 V$$

sie wird erst für $n = 2$ mit dem Abstand $R$ von $C$ ebenfalls $= V$ wo die Curve zum Kreise wird.

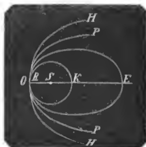
Hiernach ist erwiesen, **dafs bei einem Abstand** $R$ **des Bahnscheitels die Bahngeschw.** $V$ **daselbst mindestens** $= 2GR\frac{P}{m}$ **sein mufs.** Die Geschw. in jedem anderen Punkt der Bahn **wird entweder kleiner, indem jeder andere Radius vector gröfser als** $R$ **wird, der Scheitel mithin das Perihel ist; oder sie wird gröfser, indem jeder andere Radius vector kleiner als** $R$ **wird, der Scheitel mithin das Aphel ist;** oder die Geschw. bleibt dieselbe, indem jeder andere Radius vector $= R$ bleibt.

Bei einer Geschw. $V < 2GR\frac{P}{m}$ im Perihel, wenn der Abstand des Perihels $= R$, ist demnach keine Bahn möglich.

12. Es sind nun aus dem Vorigen folgende Gesetze für die Bahn der Planeten um deren Sonne entwickelt worden:

A. Bedeutet $S$ die Sonne, $O$ das Perihel einer Planetenbahn, $R$ den Abstand $AS$, $m$ die Masse des Planeten, $P$ die anziehende Kraft der Sonne, $G$ die Beschleunigungs-Einheit im Ab-

Fig. 188.



stand $R$, so ist die geringst mögliche Geschw., die der Planet in $O$ haben kann:

$$V = \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$$

und der Planet durchläuft den Kreis $Ok$.

B. Für $V^2 \begin{cases} > 2\,GR\frac{P}{m} \\ < 4\,GR\frac{P}{m} \end{cases}$

durchläuft der Planet eine Ellipse $OE$.

C. Für $V^2 = 4\,GR\frac{P}{m}$

durchläuft der Planet eine Parabel $POP$.

D. Für $V^2 > 4\,GR\frac{P}{m}$

durchläuft der Planet eine Hyperbel $HOH$.

13. In Bezug auf die Fälle $A, B, C, D$ No. 12 hat man aus Gl. (21) die Form und Gröfse einer Planetenbahn, wenn $n$ gegeben ist, wenn also bei gleichbleibenden $P, m, R$ die Geschw. $V$ im Perihel gegeben ist, wie folgt:

Für $A$ bei $n = 2$ wird die Gl. (21)

$$y^2 + x^2 - R^2 = 0$$

woraus

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

Für $x = \mp R$ wird $y = 0$: der Planet steht für $-R$ in $O$, für $+R$ in $K$; für $x = 0$ ist $y = \pm R$: der Planet steht entweder über oder unter $S$, normal auf $OK$ genommen.

14. Für $B$, bei $n \begin{smallmatrix} > 4 \\ < 2 \end{smallmatrix}$ wird Gl. (21)

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0 \qquad (22)$$

so dafs für jedes gegebene $x$ die beiden Ordinaten $y$ gefunden werden können.

Für $y = 0$ erhält man die beiden Scheitel der Ellipse.

Die Gl. ist

$$\frac{n(4-n)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus reducirt und geordnet

$$x^2 - \frac{2(n-2)}{4-n}Rx - \frac{n}{4-n}R^2 = 0 \qquad (23)$$

und

$$x = \frac{n-2\pm 2}{4-n}\cdot R$$

Hieraus die negative Abscisse $= -R$

die positive Abscisse $= \frac{n}{4-n}R$ (24)

Setzt man

$$n = 2 + m$$

wo $m = 1$ und jede gebrochene Zahl zwischen 0 und 2 bedeutet, so hat man die positive Abscisse für das Aphel

$$x^1 = \frac{2+m}{2-m}R$$

für $m = 0$ entsteht $x^1 = R$, die Kreisbahn; für $m = 2$ entsteht $x^1 = \infty$, die Bahn ist eine Parabel und zwar die einzige, welche existiren kann, weil für $m > 2$ also $n > 4$ eine Hyperbel entsteht.

Je kleiner $m$ ist, desto näher kommt die Ellipse dem Kreise, je näher $m$ an 2, desto gestreckter wird sie, und dies findet namentlich bei den Kometen statt, wo also $V^2$ sehr nahe der Gröfse $4\,GR\frac{P}{m}$ sein mufs; nämlich bei den bekannten wiederkehrenden Kometen, die nur im Perihel und in der Nähe desselben uns sichtbar werden. Auch möchte anzunehmen sein, dafs der Schöpfer nicht die Absicht hat, irgend einem Weltkörper bis in's Unendliche fortschreitende Bewegung zu geben, sondern jeden derselben irgend einem System als bleibend einzuverleiben, wo dann weder Parabeln noch Hyperbeln beschrieben werden würden mit Ausnahme der Fälle, wo Kometen anderen Sonnensystemen einverleibt werden sollen.

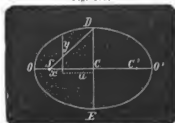
Die Hypothese (Attraction No. 4, pag. 167 mit Fig. 104) auf die ich hier mit einigen Worten zurückkomme, stimmt mit den hier streng mathematisch nachgewiesenen Gesetzen und mit der Annahme, dafs kein Weltkörper in einer anderen Bahn als einer Ellipse läuft, ganz gut. Denn die Sonnengaskugel $S$ hatte den Halbmesser $Ca = R$, der Theil $ab$ mufste also bei der Geschw. $V = \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$ der $S$ noch verbleiben, weil unter dieser Geschw. Gleichgewicht zwischen der Schwungkraft $V$ und der Centripetalkraft $\frac{P}{m}$ stattfindet. Erst wenn vielleicht durch Aufschwellung und dadurch vergröfserte Entfernung von $C$ die Masse $ab = m$ nicht mehr zu dem normalen $R$ zurückkehren konnte, also bei $V > \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$ konnte $m$ sich entfernen.

Eine Masse $m$ widersteht ihrem Entweichen vom Centralpunkt $C$ um so mehr, je gröfser sie ist und die Anziehung einer schweren Masse $m$ in ihrer Wirkung auf $C$ ist von ebenfalls einiger Bedeutung; daher entweicht eine leichtere Masse schneller als eine schwere. Somit mufsten die

Kometen mit gröfserer Anfangsgeschw. sich entfernen; da aber bei den wiederkehrenden Kometen die eben gedachten Umstände nicht so weitgreifend sein konnten, dafs plötzlich eine Geschw. bis zu $4GR\frac{P}{m}$ und noch darüber hinaus hervorgeht, ebenfalls Ellipsen, aber gestrecktere als die Planeten beschreiben.

15. Die Ellipse als die einzige Bahn der Weltkörper ist also für uns hier die wichtigste aller Kegelschnittslinien, und sie mufs in Beziehung auf die bisher gewonnenen dynamischen Werthe näher erwogen werden.

Fig. 189.




Setzt man die halbe grofse Axe $OC$ der Ellipse $= a$, die halbe kleine Axe $DC = c$, und bezeichnet die Abscissen vom Mittelpunkt $C$ aus mit $u$, so hat man allgemein

$$y^2 - \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2) = 0 \qquad (25)$$

Nun ist die grofse Axe $2a = R$ + der positiven Abscisse Gl. (24) für $y = 0$, daher

$$2a = R + \frac{n}{4-n}R = \frac{4}{4-n}R \qquad (26)$$

und die halbe grofse Axe

$$a = \frac{2}{4-n}R \qquad (27)$$

Die Excentricität $CS = CC^1$ ist

$$\sqrt{a^2 - c^2} = a - R = \left(\frac{2}{4-n} - 1\right)R = \frac{n-2}{4-n}R \qquad (28)$$

Die halbe kleine Axe $CD = CE$ ist $\sqrt{SD^2 - SC^2}$ also

$$c = R\sqrt{\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 - \left(\frac{n-2}{4-n}\right)^2} = R\sqrt{\frac{n}{4-n}} \qquad (29)$$

Die grofse Axe verhält sich also zur kleinen Axe, oder

$$a : c = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{n(4-n)} = \frac{2}{\sqrt{n(4-n)}} : 1$$

der Parameter der grofsen Axe $2a$ ist

$$p = \frac{2c^2}{a} = nR \qquad (30)$$

der Parameter der kleinen Axe $2c$ ist

$$p^1 = \frac{2a^2}{c} = \frac{8R}{\sqrt{n(4-n)^3}} \qquad (31)$$

Nun ist

$$x = CS - u = \sqrt{a^2 - c^2} - u = \frac{n-2}{4-n}R - u$$

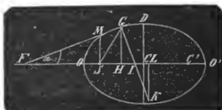
diesen Werth für $x$ in Gl. (22) gesetzt und reducirt, giebt die dynamische Gl.

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}u^2 - \frac{n}{4-n}R^2 = 0 \qquad (32)$$

woraus $y$ für jeden Werth von $u$ gefunden werden kann.

16. Für einen beliebigen Punkt $G$ der Bahn sei $FG$ die Tangente, $GI$ die Normale, $FH$ die Subtangente, $HI$ die Subnormale, $GK$ der Krümmungshalbmesser, $OL$ die Abscisse und $KL$ die Ordinate für den Mittelpunkt $K$ der Krümmung, $\alpha$

Fig. 190.




der Winkel, den die Tangente mit der grofsen Axe bildet, so ist

$$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y} = \tfrac{1}{4}(4-n)\frac{u}{y} \qquad (33)$$

$$FH = \frac{a^2 - u^2}{u} = \frac{4}{(4-n)^2}\frac{R^2}{u} - u \qquad (34)$$

$$HI = \frac{c^2}{a^2}u = \tfrac{1}{4}n(4-n)u \qquad (35)$$

Die Subnormale ist also immer kleiner als $u$, d. h. die Normale in irgend einem Punkte des Quadranten $AD$ mufs immer diesseits C fallen, nur die Normalen der Punkte $A$ und $D$ sind durch $C$ gerichtet; noch ein Beweis, dafs die Schwerlinien aus dem Quadrant *adep*, Fig. 11, pag. 12 diesseits des Erdmittelpunkts fallen.

$$FG^2 = (a^2 - u^2)\left[\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - u^2}{u^2} = \left[\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 R^2 - u^2\right]\left[\frac{n(4-n)}{4} + \left(\frac{2}{4-n}\right)^2 \frac{R^2}{u^2} - 1\right] \right. \quad (36)$$

$$GI^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[a^2 - \frac{a^2-c^2}{a^2} u^2\right] = \frac{n}{4}(4-n)\left[\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 R^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 u^2\right] \quad (37)$$

$$OL = a - \frac{a^2-c^2}{a^4} u^2 = \frac{2}{4-n} R - \left(\frac{4-n}{4}\right)^2 (n-2)^2 \frac{u^2}{R^3} \quad (38)$$

$$KL = \frac{a^2-c^2}{c^4} y^2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \cdot \frac{y^2}{R^2} \quad (39)$$

$$KG = \frac{(a^4 y^2 + c^4 u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 c^4} = \frac{[16 y^2 + n^2 (4-n)^2 u^2]^{\frac{3}{2}}}{16 n^2} \quad (40)$$

$$SG = a + \frac{u}{a}\sqrt{a^2-c^2} = \frac{2}{4-n} R + \frac{n-2}{2} u \quad (41)$$

17. Für den Pnnkt $O$ oder $O'$, also für $x = -R$ nnd $(2a - R)$ oder $-R$ und $\frac{n}{4-n} R$ oder $u = \mp a = \mp \frac{2}{4-n} R$ und $y = 0$ hat man ans No. 16 mit Hülfe von Gl. (27) n. (29):

$tg\,\alpha = \infty$, weil die Tangenten in $A$ nnd $B$ normal anf $AB$ stehen, also $\alpha = 90°$ ist.

$FH$ (Snbtg.) = Null, nämlich der Punkt $A$ oder $B$.

$HI$ (Snbn.) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$

$FG$ (Tang.) = Nnll, wie denn anch die Tangente in $A$ oder $B$ von dem Berührungspnnkt $A$ oder $B$ bis zur Axe als ein Punkt verschwindet.

$GI$ (Norm.) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = der Snbnormale, mit der sie dieselbe Linie anamacht.

$OL$ (die Abscisse des Krümmungsmittels) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = der Normale = der Subnormale, mit der sie als eine Linie znsammenfällt.

$KL$ (die Ordiuate des Krümmungsmittels) = Null, weil der Krümmungshalbmesser in der Axe liegt.

$KG$ (Krümmnngshalbmesser) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = dessen Abscisse, der Normale und der Subnormale.

Da $n > 2$, so ist der Krümmungshalbmesser für das Perihel gröfser als $R$, und es ist somit die Richtigkeit der Fig. 188 nachgewiesen, dafs nämlich die Ellipse $OE$ den Kreis $OK$ niemals schneiden kann, sondern denselben einschliefsen mufs.

$SO$ (für $SG$, Radins vector in $O$) $=$
$a - \sqrt{a^2 - c^2} = R$

$SO'$ (für $SG$, Radins vector in $O'$) $=$
$a + \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{c^2}{R} = \frac{n}{4-n} R$

18. Für die Punkte $D$ und $E$, also für $x$ = der Excentricität $= a - R = \frac{n-2}{4-n} R$ od. $u = 0$ und $y = \pm c = \pm R \sqrt{\frac{n}{4-n}}$ hat man

$tg\,\alpha = 0$. Denn die Tangente länft mit der grofsen Axe ‡ nnd bildet also mit derselben den Winkel = Null.

$FH$ (Subtg.) $= \infty$

$HI$ (Subn.) = 0, weil die Normale lothrecht anf der grofsen Axe steht; sie ist ein Punkt.

$FG$ (Tang.) $= a^2 \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{0}\right) = \infty$, nämlich ‡ der grofsen Axe, die sie daher nie treffen kann.

$GI$ (Norm.) $= c = R \sqrt{\frac{n}{4-n}}$

$OL$ (Absc. des Krümmungsmittels) $= a = \frac{2}{4-n} R$, weil der Krümmnngshalbmesser in der Richtung $DE$ liegt.

$KL$ (Ordinate des Krümmnngsmittels) $= \frac{a^2 - c^2}{c} = \left(\frac{n-2}{4-n}\right)^2 R \sqrt{\frac{4-n}{n}}$

$KG$ (Krümmungshalbmesser) $= \frac{a^2}{c} = \frac{4R}{n(4-n)} \sqrt{\frac{n}{4-n}}$

Die Krümmungshalbmesser in $A$ nnd $D$ verhalten sich also wie $\frac{c^2}{a} : \frac{a^2}{c} = c^3 : a^3$, nmgekehrt wie die Kubi der Axen, in welchen sie sich befinden.

$SD$ (Radius vector) $= a = \frac{2}{4-n} R$

19. Für den Pnnkt $M$, normal über $S$, nnd die übrigen drei über den Brennpunkten befindlichen Curvenpnnkte, also bei $x = 0$ oder $= 2a - R$ oder $u$ = der Excentricität $= \pm\sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{n-2}{4-n} R$ hat man

$y = \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = dem Krümmungshalbmesser im Scheitel

$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{n-2}{2}$

$FH$ (Subtg.) $= \frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{n}{n-2} R$

$HI$ (Subnorm.) $= \frac{c^2}{a^2} \sqrt{a^2-c^2} = \frac{n(n-2)}{4} R$

$FG$ (Tang.) $= \frac{c^2}{a} \sqrt{\frac{2a^2-c^2}{a^2-c^2}}$

$= \frac{n}{2(n-2)} R \sqrt{n^2-4n+8}$

$GI$ (Norm.) $= \frac{c^2}{a^2} \sqrt{2a^2-c^2} = \frac{1}{4} nR \sqrt{n^2-4n+8}$

Tang. : Norm. $= 2 : n-2$

$OL$ (Absc. des Krümmungsmittels)

$= a - \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)^2 \sqrt{a^2-c^2} = \frac{2^3-(n-2)^3}{16(4-n)} R$

$KL$ (Ordinate des Krümmungsmittels)

$= \frac{c^2}{a^3}(a^2-c^2) = \frac{c^2}{a} - \frac{c^4}{a^3} = \frac{1}{8} n(n-2)^2 R$

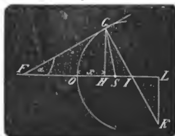
$KG$ (Krümmungshalbm.) $= \frac{c^2}{a^4} \sqrt{(2a^2-c^2)^3}$

$= \frac{1}{16} nR \sqrt{(n^2-4n+8)^3}$

$SM$ (Radius vector) $= \frac{c^2}{a} = \frac{n-2}{n-4} R$

20. Um die einzige Parabel kennen zu lernen, welche nach No. 14 als Bahn nur

Fig. 191.




existiren kann, wenn $P$, $M$, $R$ gegeben sind, nämlich bei $n = 4$, also

$$V^2 = 4\,GR \frac{P}{\mu}$$

setze man den Werth 4 für $n$ in Gl. (21), man erhält:

$$y^2 - 4Rx - 4R^2 = 0 \qquad (42)$$

wo der Kraftpunkt der Anfangspunkt der Abscissen ist. Schreibt man Gl. (41)

$$y^2 - 4R(x+R) = 0$$

und setzt $x + R = x^1$, so dafs $x = x^1 - R$, so hat man den Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel, und $x^1$ wieder mit $x$ bezeichnet:

$$y^2 = 4Rx$$

demnach ist

$p$, der Parameter der Parabel $= 4R$

$tg\,\alpha = \frac{p}{2y} = \sqrt{\frac{R}{x}}$

Subtg. $FH = 2x$

Subnorm. $HI = \frac{p}{2} = 2R$

Tang. $FG = \sqrt{4x^2 + px} = 2\sqrt{x(R+x)}$

Norm. $GI = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4px} = 2\sqrt{R(R+x)}$

(Norm. : Tang. $= \sqrt{R} : \sqrt{x}$)

Abscisse $OL$ des Kr. Halbm. $= 3x + \frac{1}{2}p$
$= 3x + 2R$

Ordinate $KL$ d. Kr. Halbm. $= \frac{4x^2}{y} = 2x\sqrt{\frac{x}{R}}$

Krümmungshalbm. $GK = \sqrt{\frac{(4x+p)^3}{4p}}$

$= 2\sqrt{\frac{(R+x)^3}{R}}$

Radius vector $SG = x + \frac{p}{4} = x + R$

21. Für den Scheitel $O$, also für $x = 0$ ist

$y = 0$
$tg\,\alpha = \infty$, $\alpha = 90°$
Subtg. $= 0$
Subnorm. $OI = 2R$
Tang. $= 0$
Norm. $OI = 2R$
Absc. $OL = 2R$
Ordin. zu $OL = 0$
Krümmungshalbmesser $= 2R$

Radius vector $SO = \frac{p}{4} = R$

Der Krümmungshalbmesser der Ellipse (No. 17) war $= \frac{1}{2}nR$; da nun hier $n < 4$ ist, so ist derselbe $< 2R$, mithin Fig. 188 richtig, nämlich dafs die Parabel $POP$ die Ellipse $EO$ nicht schneidet, sondern diese umschliefst.

22. Für den Punkt normal auf der Axe über $S$, also für $x = R$ hat man

$y = 2R$
$tg\,\alpha = 1$; $\alpha = 45°$
Subtg. $FH = 2R$
Subnorm. $HI = 2R$
Tang. $FG = 2R\sqrt{2}$
Norm. $GI = 2R\sqrt{2}$
Absc. $OL = 5R$
Ordin. $KL = 2R$
Krümmungshalbm. $GK = 4R\sqrt{2}$
Radius vector $SG = 2R$

23. Gl. (27) ist $a = \frac{2}{4-n} R$

Gl. (28) ist $e = \frac{n-2}{4-n} R$

hieraus folgt $\frac{e}{a} = \frac{n-2}{2}$

und gegenseitig $n = 2\left[1 + \frac{e}{a}\right]$

mithin $n$ allein durch die astronomische Excentricität ausgedrückt und unabhängig von den Dimensionen der Bahn.

Mercur hat $\frac{e}{a} = 0{,}205616$ also $n = 2{,}411232$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Venus | „ | = 0,006862 | „ | 2,013724 |
| Erde | „ | = 0,016792 | „ | 2,033584 |
| Mars | „ | 0,093217 | „ | 2,186434 |
| Vesta | „ | 0,08856 | „ | 2,17712 |
| Juno | „ | 0,25556 | „ | 2,51112 |
| Ceres | „ | 0,07674 | „ | 2,15348 |
| Pallas | „ | 0,24200 | „ | 2,48400 |
| Jupiter | „ | 0,048162 | „ | 2,096324 |
| Saturn | „ | 0,056150 | „ | 2,112300 |
| Uranus | „ | 0,046611 | „ | 2,093222 |

Die Geschwindigkeit im Perihel ist also bei den Planetenbahnen nur wenig mehr als $2GR\frac{P}{m}$ und die Bahnen selbst nähern sich dem Kreise.

Bei den Kometen ist das Verhältnifs gröfser, so z. B. beträgt bei dem Enke'schen Komet $\frac{e}{a} = \sin 57^\circ\ 41'\ 43{,}95'' = 0{,}84522$ und folglich $n = 3{,}69044$; die Geschw. durfte also nur $0{,}31\ GR\frac{P}{m}$ gröfser sein und der Komet beschrieb eine Parabel.

Der im Jahre 1835 zuletzt erschienene Halley'sche Komet mit einer Umlaufszeit von 75 Jahren hat die Excentricität = 0,97; mithin $n = 3{,}94$ und die Geschw. im Perihel um nur $0{,}06\ GR\frac{P}{m}$ vergröfsert würde eine parabolische Bahn und einen nie wiederkehrenden Kometen erzeugt haben.

**24. Beispiel für Anwendung der vorstehenden Formeln.**

**Die Bahn der Erde um die Sonne.**

Um die aus den vorstehenden allgemeinen Untersuchungen entwickelte Formel

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

zu praktischer Anwendung zu bringen, ist Folgendes zu beachten.

Es bezeichne $G^1$ die Beschleunigungs-Einheit; d. h. den Weg in der ersten Secunde, den eine Masse = 1 in der Entfernung = 1 von der Ruhe aus nach einem Körper hinfällt, von dem jene Masse mit der Kraft = 1 angezogen wird.

Es sei $g$ die Beschleunigung eines an der Erdoberfläche befindlichen Massenpunkts gegen den Erdmittelpunkt

$r$ der Halbmesser der Erde
$p$ deren Anziehungskraft
$m$ deren Masse, so ist

$$g\ (= 15\tfrac{5}{8}\ \text{preufs. Fufs}) = G'\frac{p}{mr^2}$$

woraus also $\qquad G' = g\frac{m}{p}r^2$

In der Formel $V^2 = nGR\frac{P}{m}$ bezeichnet nun

$P$ die Anziehungskraft der Sonne
$m$ die Masse des Planeten, hier also die Masse der Erde
$G$ die Beschleunigungseinheit $G'$ in der Entfernung $R$, also $G = \frac{G'}{R^2}$
$R$ die Entfernung des Perihels der Planetenbahn, hier der Erdbahn.

Die Formel ist also zu schreiben

$$V^2 = n\frac{G'}{R^2}R\frac{P}{m} = nG'\frac{P}{mR}$$

für $G'$ den obigen Werth $g\frac{m}{p}r^2$ gesetzt und reducirt giebt

$$V^2 = ng\frac{r^2}{R}\cdot\frac{P}{p}$$

Die anziehenden (unbekannten) Kräfte $P, p$ verhalten sich wie die zu ihnen gehörenden (ermittelungsfähigen) Massen $M$, $m$. Daher hat man die Formel

$$V^2 = ng\frac{r^2}{R}\frac{M}{m} \qquad (43)$$

$M$ wird in Verhältnifs zu $m$ ausgedrückt, $\frac{M}{m}$ ist also eine abstracte Zahl, $R$ und $r$ werden in geographischen Meilen angegeben; um also $V$ in geogr. Ml. zu erhalten, hat man zu setzen

$$g = \frac{15\frac{5}{8}}{24000}\ \text{preufs. Ml.} = \frac{15{,}625}{0{,}9850876 \times 24000}$$
$$= \frac{15{,}625}{23642}\ \text{geogr. Ml.}$$

**Elemente der Bahn.**

Die astronomische Excentricität der Ekliptik $\frac{e}{a}$ ist festgestellt auf 0,016792

Die halbe grofse Axe $a$ der Ekl. wird je nach verschiedenen Beobachtungen und Berechnungen verschieden angegeben, und zwar von 20 644130 bis 20 682329 geogr. Ml. Letztere Angabe in Vega, Logarithmen, herausgegeben von Dr. Bremiker.

Die Entfernung der Sonne vom Perihel ist =

$$a(1 - 0{,}016792) = 0{,}983208 \cdot a$$

die Entfernung vom Aphel

$$a(1 + 0{,}016792) = 1{,}016792 \cdot a$$

A. bei $a = 20\,644130$ g. M. ist

| | | |
|---|---|---|
| die Entf. v. Perihel | = 20 297474 | g. M. |
| „ „ „ Aphel | = 20 990786 | „ „ |
| die grofse Axe | = 41 288260 | g. M. |

B. bei $a = 20\,682329$ g. M. ist
die Entf. v. Perihel $= 20\,335031$ g. M.
„ „ „ Aphel $= 21\,029627$ „ „
die grofse Axe $= 41\,364658$ g. M.
Nach No. 23 ist

C. $n = 2 \cdot \left(1 + \frac{e}{a}\right) = 2 \cdot 1{,}016792 = 2{,}033584$

Die Geschw. $V$ im Perihel findet sich folgender Art:
Der Umlauf der Erde um die Sonne geschieht in 365,256384 Tagen zu 24 Stunden,

mithin die mittlere tägliche Bewegung der Erde

in Bogen $= \frac{2\pi}{365{,}256384} = 0{,}0172021255$

in Graden $= \frac{360^0}{365{,}256384} = 59'\ 8{,}19275''$

D. also die mittlere tägliche Bewegung in wirklicher Länge
$= 0{,}017\,2021\,255 \times a = 355780$ geogr. M.
und die mittlere Geschw. der Erde

per Stunde $= \frac{355780}{24} = 14824{,}166$ ... geogr. Ml.

„ Minute $= \frac{355780}{24 \cdot 60} = 247{,}0694$ ... geogr. Ml.

„ Secunde $= c = \frac{355780}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}11782$ (407 Per.) g. M.

Im Artikel Bahn No. 6 ist nachgewiesen, dafs in gleichen Zeiten von dem Radius vector gleiche Flächenräume durchlaufen werden; betrachtet man daher die beiden Geschwindigkeiten $V$ und $V'$ per Secunde im Perihel und Aphel als Kreisbogen, nennt die beiden Abstände von der Sonne $R$ und $R'$, so hat man

$$\tfrac{1}{2} VR = \tfrac{1}{2} V'R'$$

also $V : V' = R' : R$

oder $V : \frac{V + V'}{2} = R' : \frac{R' + R}{2} = 1 + \frac{e}{a} : 1$

Nun ist $\frac{V + V'}{2}$ die halbe Summe der kleinsten und der gröfsten Geschw., also = der mittleren Geschw. $= c$ und $\frac{R' + R}{2}$ = der halben grofsen Axe; folglich

E. $V = \frac{a + e}{a} c = \left(1 + \frac{e}{a}\right) c$
$= 1{,}016792 \times 4{,}117824 = 4{,}18697$ g.M. und zwar für beide verschieden angegebenen halben grofsen Axen.

Ferner ist der Halbmesser $r$ der Erde $= 859{,}5$ geogr. M.

Anwendung der Formel.

Substituirt man nun die vorstehenden Werthe in Formel (43), so erhält man

1) Für $a = 20\,644130$ g. M.

$$4{,}18697^2 = 2{,}033584 \cdot \frac{15{,}625}{23642} \cdot \frac{859{,}5^2}{20297474} \cdot \frac{M}{m}$$

2) Für $a = 20\,682329$ g. M.

$$4{,}18697^2 = 2{,}033584 \cdot \frac{15{,}625}{23642} \cdot \frac{859{,}5^2}{20335031} \cdot \frac{M}{m}$$

Man sieht hieraus, dafs man mit Hülfe möglichst genauer Beobachtungen das Verhältnifs $\frac{M}{m}$ der Sonnenmasse zur Erdmasse finden kann.

Für d. 1ste Annahme findet man $\frac{M}{m} = 358387$

„ „ 2te „ „ „ $\frac{M}{m} = 359050$

Dieses Massenverhältnifs wird von den Astronomen von 334936 bis zu 365412 angegeben.

25. Die Massenberechnung No. 24 ist nur auf unsre Erde, nicht aber auf andere Planeten anwendbar, denn in Formel 43 No. 23

$$V^2 = ng \frac{r^2}{R} \frac{M}{m}$$

ist die Gröfse $gr^2 \frac{M}{m}$ für alle Weltkörper die um die Masse $M$ des Centralkörpers laufen, also auch für alle Planeten und Kometen unsres Sonnensystems eine Constante. Beziehen sich nämlich $g$; $r$; $m$ auf einen beliebigen Planet, $g_1$; $r_1$; $m_1$ auf die Erde, so ist

$$g_1 : g = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m}{r^2} \text{ woraus}$$

$$g = g_1 \frac{m}{m_1} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$$

mithin den Werth von $g$ substituirt

$$V^2 = ng_1 \frac{m}{m_1} \frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{R} \frac{M}{m_1} = ng_1 \frac{r_1^2}{R} \cdot \frac{M}{m_1}$$

daher $gr^2 \frac{M}{m} = g_1 r_1^2 \frac{M}{m_1}$ = Constante $C$

und $V^2 = ng_1 \frac{r_1^2}{R} \frac{M}{m}$

für jeden beliebigen Planet, wo nur $V$, $n$ und $R$ auf denselben, die übrigen Gröfsen $g_1$; $r_1$; $m_1$ auf unsere Erde sich beziehen

also $V^2 = \frac{n}{R} C$

und hierin $C = \frac{15{,}625}{23642} \cdot 859{,}5^2 \cdot \frac{M}{m}$

wo $\frac{M}{m}$ zwischen 334936 und 365412 schwankend ist, also $C$ zwischen 163 524717 und 178 406380.

Die Geschw. $V$ im Perihel ist also nur abhängig von $n$, einem Coefficient der $< 4$ und $> 2$ ist, und von $R$ der Entfernung des Perihels von der Sonne; sonst von keiner anderen Gröfse, weder von Dimensionen noch von Massen der Weltkörper.

26. Kennt man die aus der Masse $m$ eines Planet hervorgehende Beschleunigung durch die Beobachtung eines Trabanten und ist dieselbe in der Entfernung $r$ unsres Erdhalbmessers $= g$, so hat man

$$m : m_1 = g : g_1$$

woraus $$m = \frac{g}{g} m_1$$

wo $g_1$ $m_1$ sich auf unsre Erde beziehen

folglich $$\frac{M}{m} = \frac{M}{m^1} \frac{g'}{g}$$

27. Für unsre Erde ist nach No. 24 $C$

$$n = 2{,}033584$$

daher $$GR\frac{P}{m} = \frac{V^2}{n} = \frac{V^2}{2{,}033584}$$

und $$2\,GR\frac{P}{m} = \frac{2V^2}{n} = \left(V\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}}\right)^2$$

Also bei einer Geschwindigkeit

$$V^1 = V\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}} = 4{,}18697\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}} = 4{,}15225$$

geogr. Meilen würde die Erde in einer Kreisbahn sich bewegen.

Die Differenz beider Geschw. beträgt 0,03472 geogr. Ml. = 821 preufsische Fufse. Wenn also die Erde mit 822 pr. Fufs geringerer Geschw. sich bewegte, so würde das Perihel zum Aphel werden (s. No. 11), die Geschw. der Erde würde hier die kleinste sein und während des Laufs sich vermehren, anstatt dafs sie sich jetzt vermindert.

**Bahn der Weltkörper, die Ellipse.** Es steht nunmehr unwiderleglich fest, dafs die Bahn eines jeden Weltkörpers eine Ellipse ist; es ist nun erforderlich, einen Weltkörper in seiner Bahn verfolgen zu können, wenn die Elemente derselben bekannt sind. Zu dem Ende gehe ich auf eine Gl. des vor. Art. zurück, durch welche die Abhängigkeit zwischen der Zeit $t$ und dem Radius vector $r$ gegeben wird, und diese ist Gl. (9) pag. 46

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Gl. (11) pag. 47 ist

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}$$

Diesen Werth für $\frac{\partial\varphi}{\Delta t}$ und für $K$, wie für Gl. (13) den Werth $4C$ gesetzt, giebt

$$\frac{4k^2}{r^2} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + 4C \qquad (1)$$

Nach No. 7 ist $4C = V^2 - 4GR\frac{P}{m}$ für die elliptische Bahn

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

wo $2 < n < 4$; daher

$$4C = -(4-n)GR\frac{P}{m}$$

Nach No. 8 ist $k = \frac{1}{2}RV$

nach No. 1 $$A = R^2\frac{P}{m}$$

Diese Werthe in Gl. 1 gesetzt, erhält man

$$nG\frac{R^2}{r^2}\frac{P}{m} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = 4G\frac{R^2}{r}\frac{P}{m} - (4-n)\,GR\frac{P}{m}$$

woraus

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = G\frac{R}{r^2}\frac{P}{m}\left[4Rr - (4-n)r^2 - nR^2\right]$$

Da $n$ nicht zu den Elementen der Bahn gehört, auch nicht gegeben wird, so nehme ich

$$\text{aus Gl. (26)}: (4-n) = \frac{2R}{a}$$

$$\text{„ „ (30)}: \quad n = \frac{2c^2}{aR}$$

Diese Werthe in die vorstehende Gl. gesetzt und reducirt giebt

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = 2G\frac{R^2}{r}\frac{P}{m}\left(2r - \frac{r^2+c^2}{a}\right)$$

Schreibt man der Kürze wegen wieder $A$ für $R^2\frac{P}{m}$, so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{1}{r}\sqrt{2GA\left(2r - \frac{r^2+c^2}{a}\right)} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2GA}{a}(2ar - r^2 - c^2)}$$

und gegenseitig

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{2ar - r^2 - c^2}}$$

Setzt man unter das $\sqrt{\ }$zeichen des Nenners noch $+a^2 - a^2$, so erhält man

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + a^2 - c^2}}$$

und bezeichnet man die Excentricität der Ellipse mit $e$

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}} \qquad (2)$$

2. Die vorstehende Differenzialformel kann man auch ohne Hülfe der Gleichungen für $C$, $k$ und $n$ unmittelbar aus Gl. (1) aus folgender Betrachtung entwickeln. Gl. (1) enthält den Radius vector $r$, mithin dessen kleinsten und dessen größten Werth, deren Summe = der grofsen Axe $= 2a$ ist. Für jeden von beiden Werthen wird aber nach der Lehre vom Maximum und Minimum das erste Differenzial von $r$, nämlich $\frac{\partial r}{\Delta t} =$ Null.

Setzt man also in Gl. (1) $\frac{\partial r}{\Delta t} = 0$, so erhält man die Gl.:

$$\frac{4k^2}{r^2} + 0 = \frac{4GA}{r} + 4C$$

geordnet

$$r^2 + \frac{GA}{C} r - \frac{k^2}{C} = 0$$

eine Gl., welche nur den kleinsten und den größten Werth von $r$ enthalten kann, d. h.

$$r = a - e \text{ und } r = a + e$$

Nun ist aber in jeder quadratischen Gl. der entgegengesetzte Coefficient der einfachen Unbekannten $\left(\text{hier } \frac{GA}{C}\right)$ = der Summe der Wurzeln, und das bekannte Glied $\left(\text{hier} - \frac{k^2}{C}\right)$ = dem Product beider Wurzeln der Gl., d. h.

$$-\frac{GA}{C} = a - e + a + e = 2a$$

$$-\frac{k^2}{C} = (a - e)(a + e) = a^2 - e^2$$

Hieraus ist

$$C = -\frac{GA}{2a}$$

$$-k^2 = (a^2 - e^2)\,C = (a^2 - e^2)\left(-\frac{GA}{2a}\right)$$

und $k = \sqrt{\frac{GA}{2} \cdot \frac{a^2 - e^2}{a}}$

Diese Werthe in Gl. (1) gesetzt, giebt

$$2 \cdot \frac{GA}{r^2} \cdot \frac{a^2 - e^2}{a} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} - \frac{2GA}{a}$$

woraus

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{GA}{ar^2}\left[2ar - r^2 - (a^2 - e^2)\right]$$

und

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}}$$

3. Aus der vorstehenden Differenzialgleichung erhält man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \int \frac{r\partial r}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}} \qquad (3)$$

Es ist

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (a - r)^2}} = \int \frac{(-a + a + r)\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (a - r)^2}}$$

$$= \int \frac{(a - r)\,\partial(a - r)}{\sqrt{e^2 - (a - r)^2}} - a \int \frac{\partial(a - r)}{\sqrt{e^2 - (a - r)^2}} \qquad (4)$$

Eben so

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (r - a)^2}} = \int \frac{(-a + a + r)\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (r - a)^2}}$$

$$= \int \frac{(r - a)\,\partial(r - a)}{\sqrt{e^2 - (r - a)^2}} + a \int \frac{\partial(r - a)}{\sqrt{e^2 - (r - a)^2}} \qquad (5)$$

Für 5 und 6 hat man die allgemeinen Integralformeln:

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a - x^2}} = -\sqrt{a - x^2}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a - x^2}} = Arc\,sin\,x\sqrt{\frac{1}{a}}$$

folglich aus 4

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2 - (a - r)^2} - a\,Arc\,sin\,\frac{a - r}{e}\right] + C \qquad (6)$$

und aus 5

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2 - (r - a)^2} + a\,Arc\,sin\,\frac{r - a}{e}\right] + C \qquad (7)$$

Denkt man sich den Anfang der Bewegung im Perihel, dann ist für $r = a - e$ die Zeit $t = 0$, mithin aus 6:

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2 - e^2} - a\,Arc\,sin\,\frac{e}{e}\right] + C$$

woraus $\quad C = +a\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2GA}}$

aus 7:

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2 - e^2} + a\,Arc\,sin\,\frac{e}{e}\right] + C$$

woraus $\quad C = -\frac{a\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2GA}}$

Man hat also entweder

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(a-r)^2} - a\,Arc\sin\frac{a-r}{e}\right] \qquad (8)$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(r-a)^2} + a\,Arc\sin\frac{r-a}{e}\right] \qquad (9)$$

und man ersieht, dafs man beide Ausdrücke für $t$ zusammenfassen kann in

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(\pm r \mp a)^2} \mp a\,Arc\sin\left(\pm\frac{a-r}{e}\right)\right] \qquad (10)$$

Setzt man $\frac{a-r}{e} = \sin\varphi$, formt $\sqrt{e^2-(\pm a \mp r)^2}$ um in

$$e\sqrt{1-\left(\frac{\pm a \mp r}{e}\right)^2} = e\sqrt{1-\sin^2(\pm\varphi)} = e\cos(\pm\varphi) = e\cos\varphi$$

und

$$\mp a\,Arc\sin\pm\frac{a-r}{e} = \mp a(\pm\varphi) = -a\varphi$$

so hat man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right] \qquad (11)$$

4. Bevor ich weiter gehe, will ich in Bezug auf Formel 11 erinnern, dafs $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-x^2}}$ nicht nur $= Arc\sin x\sqrt{\frac{1}{a}}+C$ sondern auch $-Arc\cos x\sqrt{\frac{1}{a}}+C'$ ist. Entwickelt man, um die Uebereinstimmung beider Integralformeln bei deren verschiedenen Constanten $C$ und $C'$ zu zeigen, nach der letzten Integral-Formel, so schreibt man $+a\,Arc\cos\frac{a-r}{e}$ oder $-a\,Arc\cos\frac{r-a}{e}$ für $-a\,Arc\sin\frac{a-r}{e}$

Im ersten Fall hat man statt No. 6

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2-(a-r)^2} + a\,Arc\cos\frac{a-r}{e}\right] + C'$$

Für die Constante ist

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[a\,Arc\cos(=1)] + C'$$

woraus $C' = 0$, und vollständig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[-\sqrt{e^2-(a-r)^2} \pm a\,Arc\cos\left(\pm\frac{a-r}{e}\right)\right]$$

Setzt man hierin $\frac{a-r}{e} = \cos\psi$, so hat man, da $\sqrt{e^2-(a-r)^2} = e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{e}\right)^2}$ $= e\sqrt{1-\cos^2\psi} = e\sin\psi$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[-e\sin\psi \pm a(\pm\psi)] \text{ oder}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[-e\sin\psi + a\psi] \qquad (12)$$

Diese Formel ist nun mit Formel 11 übereinstimmend, denn da

$$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi = \cos\psi$$

so ist

$$\sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \cos\varphi$$

und

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Diese Werthe in Formel 12 gesetzt ergiebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[\mp e\cos\varphi + a\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wie Gl. 11

Im zweiten Fall hat man statt No. 7

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[-\sqrt{e^2-(r-a)^2} - a\,Arc\cos\frac{r-a}{e}\right] + C_1$$

Für die Constante ist

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\,[-a\,Arc\cos(-1)] + C_1$$

woraus $C_1 = +a\pi$, daher

$$t = \sqrt{\frac{a}{2\,GA}}\left[a\pi - \sqrt{e^2-(r-a)^2} - a\,Arc\cos\frac{r-a}{e}\right]$$

Setzt man hierin $\frac{r-a}{e} = \cos\omega$, so hat man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[a\pi - e\sin\omega - a\omega] \tag{13}$$

eine ebenfalls mit F. 11 übereinstimmende Formel.

$$\text{Denn}\quad \frac{r-a}{e} = \cos\omega$$

$$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi$$

$$\text{folglich}\quad \sin\varphi = -\cos\omega = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{folglich}\quad \varphi = \omega - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{also}\quad \omega = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{und}\quad \sin\omega = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

Diese beiden letzten Werthe in Gl. 13 gesetzt, ergiebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\pi - e\cos\varphi - a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wie Gl. 11.

5. Setzt man unter die $\sqrt{\ }$ in Formel 11, 12 oder 13 für $A$ seinen Werth $R^2\frac{M}{m}$ wo $R$ die Entfernung des Perihels vom Sonnenmittel, $M$ die Masse der Sonne und $m$ die Masse des Planeten bedeuten, so hat man

$$\sqrt{\frac{a}{2GR^2\frac{M}{m}}}$$

Setzt man nun die Beschleunigung gegen unsern Erdmittelpunkt $g$; die Masse der Erde $m_1$; $R_1$ = der Entfernung des Perihels der Ekliptik von der Sonne, so verhalten sich die Beschleunigungen des Erdkörpers und des Planetenkörpers in Beziehung auf einen im Mittelpunkt der Sonne befindlichen Massenpunkt, oder, was dasselbe ist, in Beziehung auf die Sonne selbst

$$g_1 : G = \frac{m_1}{R_1^2} : \frac{m}{R^2}$$

$$\text{woraus}\quad G = g_1\,\frac{m}{m_1}\,\frac{R_1^2}{R^2}$$

$$\text{mithin}\quad 2GR^2\frac{M}{m} = 2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}$$

und

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}}}\left[a\,\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wo $g_1$ die bekannte Zahl 15,625 pr. Fuſs bedeutet.

6. Die drei Formeln 11, 12, 13 können zu einer einzigen vereinigt werden; denn wenn man in 11: $\frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha$, in 12: $\psi = \psi$ und in 13: $\pi - \omega = \gamma$ setzt, so erhält man für $t$ und $r$ einerlei Ausdrücke.

Für $\frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha$ in Gl. 11 entsteht:

$$a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi = a\alpha - e\sin\alpha$$

und aus

$$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi\,;\ r = a - e\cos\alpha$$

Für $\psi = \psi$ in Gl. 12 bleibt $a\psi - e\sin\psi$ und $\frac{a-r}{e} = \cos\psi$ wird $r = a - e\cos\psi$

Für $\pi - \omega = \gamma$ in Gl. 13 entsteht

$$a\pi - e\sin\omega - a\omega = a\gamma - e\sin(\pi-\gamma)$$
$$= a\gamma - e\sin\gamma$$

und aus $\frac{r-a}{e}\cos\omega = \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$

wird $r = a - e\cos\gamma$

Man hat also aus 11, 12 und 13

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}}}\,(a\alpha - e\sin\alpha) \tag{15}$$

$$r = a - e\cos\alpha \tag{16}$$

In diesen beiden Formeln ist $a$ die halbe groſse Axe, $e$ die Excentricität $\sqrt{a^2-c^2}$. Sind nun diese und der Radius vector $r$ für einen beliebigen Punkt der Bahn gegeben, so findet man zunächst $\alpha$ und hieraus mit Hülfe der auf unsre Erde sich beziehenden constanten dynamischen Gröſsen auch die Zeit $t$, welche der Planet vom Perihel aus bis zu dem zu $r$ gehörenden Bahnpunkt verwendet hat. Ist die Zeit $t$ gegeben, so erhält man $\alpha$ und hieraus auch die Länge $r$ des Radius vector.

7. Um den Ort des Planeten in seiner Bahn angeben zu können, ist nur noch der Winkel erforderlich, den der jedesmalige Radius vector mit der grofsen Axe bildet. Also offenbar der $\angle(\varphi - \alpha)$ in Gl. 16 mit Fig. 185, indem nach Feststellung der Constante $= a$ zur neuen Abscissenaxe (jetzt die grofse Axe der Ellipse) $CX$, genommen worden ist. Gl. 16 ist

$$r\,[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} \cdot \cos(\varphi - \alpha)] = 2k^2$$

die Polargleichung der Bahn.

Man erhält daraus

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{GAr - 2k^2}{r\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}}$$

Setzt man wieder nach No. 11

$$C = -\frac{4-n}{4}\,GR\,\frac{P}{m}$$

$$k^2 = \frac{n}{4}\,GR^3\,\frac{P}{m}$$

$$A = R^2\,\frac{P}{m}$$

so erhält man mit Hülfe von No. 11

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{GR^3\frac{P}{m}\,[r - \frac{n}{2}R]}{r\frac{n-2}{2}\,GR^3\,\frac{P}{m}} = \frac{2r - nR}{(n-2)r}$$

Nun ist nach Gl. 30:

$$n = \frac{2c^2}{aR}$$

daher

$$\cos(\varphi - \alpha) = a\frac{R}{r}\,\frac{ar - c^2}{c^2 - aR} = \frac{ar - (a^2 - e^2)}{er} \quad (17)$$

Man bezeichne den $\angle(\varphi - \alpha)$ zwischen dem Radius vector $r$ und der grofsen Axe $a$ mit $\varrho$, so gehört dieser Winkel während des Laufs des Planeten nach und nach allen Quadranten an. Zwischen dem Perihel und den beiden Punkten über der Sonne senkrecht auf der Axe ist $\cos\varrho$ positiv, zwischen den letzten beiden Punkten und dem Aphel negativ, für die beiden senkrechten Radien $= 0$.

Für das Perihel ist $r = a - e$. Diesen Werth in Gl. 17 gesetzt, giebt aber

$$\cos\varrho = \frac{a(a-e) - (a^2 - e^2)}{e(a-e)} = \frac{e(e-a)}{e(a-e)}$$
$$= -1 \text{ (statt } +1)$$

Für das Aphel ist $r = a + e$. Diesen Werth eingesetzt, giebt

$$\cos\varrho = \frac{a(a+e) - (a^2 - e^2)}{e(a+e)} = \frac{e(a+e)}{e(a+e)}$$
$$= +1 \text{ (statt } -1)$$

Mithin ist die Formel für $\varrho = (\varphi - \alpha)$ Gl. 17 zu schreiben

$$\cos\varrho = \frac{a^2 - e^2 - ar}{er} \quad (18)$$

Für den dritten und vierten Quadrant darf man $r$ nicht negativ setzen, denn es wäre dann

$$\cos\varrho = \frac{a^2 - e^2 + ar}{er}$$

Da nun $a^2 - e^2$ immer positiv und $ar$ immer $> er$ ist, so würde der Zähler $>$ als der Nenner sein, und $\cos\varrho > 1$ werden. Jeder $\cos\varrho$ für ein bestimmtes $r$ gibt also 2 Werthe von $\varrho$; für den positiven $\cos$ liegt $\varrho$ entweder im ersten oder im vierten, für den negativen $\cos$ im zweiten oder dritten Quadrant.

8. Anwendung der Formeln.

In der Formel 15:

$$t = \frac{\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha)}{\sqrt{2g_1 R_1^2 \frac{M}{m_1}}}$$

ist nur der Zähler von den fraglichen Bahnelementen des Planeten abhängig. Der Nenner, dessen Factoren auf unsre Erde sich beziehen, ist constant.

$g_1$ ist $= 15{,}625$ preufs. Fufs $= \frac{15{,}625}{23642}$ g. Ml.

$R_1$ die Entfernung des Perihels von der Sonne, schwankt nach No. 24 des vor. Art. zwischen 20297474 und 20335031 geogr. Ml.

$\frac{M}{m_1}$ das Verhältnifs der Sonnenmasse zur Erdmasse schwankt nach No 25 des vor. Art. zwischen 334936 und 365412.

Nennt man den noch unsicheren constanten Nenner $N$, so hat man

$$t = \frac{\sqrt{a}}{N}(a\alpha - e\sin\alpha)$$

Die Zeit $t$ in Secunden hat mit $g$ in preufs. Fufsen Zusammenhang; es mufs also entweder $R$, $a$ und e durch Multiplication mit 23642 in preufs. Fufsen ausgedrückt werden, um $t$ in Secunden zu erhalten oder es ist $R$, $a$, e in geogr. Meilen beizubehalten und das gefundene $t$ mit 23642 zu multipliciren. Demnach ist

$$t = \frac{23642}{N}\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Secunden}$$

und da man $t$ bei Weltkörpern, um Reductionen aus Secunden zu vermeiden, sogleich in Tagen ausdrückt, so hat man

$$t = \frac{23642}{60 \cdot 60 \cdot 24\,N}\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Tage.}$$

Man ersieht übrigens, dafs $N =$ ist der $\sqrt[2]{}$ eines in geogr. Kubikmeilen ausgedrückten Würfels, so dafs $t$ als abstracte Zahl erscheint.

Setzt man (aus Vega's Logarithmen, herausgegeben von Dr. Bremiker) $\frac{M}{m} = 354936$

nach le Verrier, die halbe grofse Axe der Ekliptik = 20682329 geogr. Ml. also (s. No. 24, B des vor. Art.) $R_1 = 20\,335031$ geogr. Ml. dann ist

$$t = \frac{23642 \sqrt{a}\,[a\alpha - e \sin \alpha]}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 20\,335031 \sqrt{2 \cdot \frac{15{,}625}{23642}\, 354936}} = \frac{\sqrt{a}\,[a\alpha - e \sin \alpha]}{1609\,653150} \text{ in Tagen.}$$

9. Es leuchtet ein, dafs die Auffindung des richtigen Nenners für die gesammte Astronomie von der gröfsten Wichtigkeit ist, und es geschieht dies auf folgende Weise. Setzt man der Kürze wegen den Werth der constanten Zahlen im Ausdruck für $t = \frac{1}{k}$, also

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{a}(a\alpha \quad e \sin \alpha) \text{ Tage} \qquad (19)$$

so ist für $r = R$ in Gl. 16

$$\cos \alpha = \frac{a - R}{e} = \frac{a - (a - e)}{e} = 1$$

mithin $\alpha$ entweder $= 0$ oder $= 2\pi$

Mithin nach Gl. 19 $t$ entweder $= 0$ oder die ganze Umlaufszeit des Planeten

$$T = \frac{2\pi}{k} \sqrt{a^3}$$

Betrachtet man $a$ als die halbe grofse Axe der Erdbahn, setzt diese = 1, und $T$ die bekannte Umlaufszeit = ein Jahr = 365,256384 Tage, so hat man aus $T = \frac{2\pi}{k}$

$$k = \frac{2\pi}{365{,}256384}$$

Man findet $\log k = 0{,}2355821 - 2$
und $k = 0{,}0172021$

Diese Zahl $k$ heifst die Charakteristik des Sonnensystems, und sie ist gleichbedeutend mit der mittleren täglichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn.

Da diese Zahl $k$ in Theilen der halben grofsen Axe unsrer Ekliptik angegeben ist, so mufs man diese wiederum kennen, um eine Anwendung auf andre Planeten machen zu können, oder man drückt die halben Axen anderer Bahnen als Theile oder Vielfache der halben Erdbahnaxe aus.

Bezeichnet man die halbe Erdbahnaxe mit $A$, die eines anderen Planeten mit $a$, setzt $a = nA$, so hat man die Umlaufszeit desselben

$$T = \frac{2\pi}{k} \sqrt{n^3}$$

oder $$T = \frac{2\pi}{k} \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{A^3}}$$

Für $A = 20682329$ geogr. Ml. hat man

$$\log k\sqrt{A^3} = 9{,}2089812$$

also $k\sqrt{A^3}$ etwa 1618000000

Bei recht genauen Beobachtungen und Berechnungen der halben grofsen Erdbahnaxe ist man also auch im Stande, das in diesem und dem vor. Art. schon oft betrachtete fragliche $\frac{M}{m}$ zwischen Sonnen- und Erdmasse eben so genau zu finden. Nach No. 8 hat man, wenn $A = 20682329$ und $R^1$ = der Entfernung des Perihels von der Sonne = 20335031 für $\frac{M}{m}$ die Gl.

$$\frac{23642}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 20\,335031 \sqrt{\left(2 \cdot \frac{15{,}625}{23642} \cdot \frac{M}{m}\right)}} = \frac{1}{0{,}0172021 \sqrt{20682329^3}}$$

10. Statt der Formel 15:

$$t = \frac{\sqrt{a}\,[a\alpha - e \sin \alpha]}{\sqrt{2 g_1 R_1^2 \frac{M}{m_1}}}$$

deren Constanten No. 8 in Zahlenwerthen angegeben, hat man nun die einfachere

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{a}\,(a\alpha - e \sin \alpha) \text{ Tage.} \qquad (20)$$

und für die ganze Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi}{k} \sqrt{a^3} \text{ Tage} \qquad (21)$$

wo $k = 0{,}0172021$
und $a$ die halbe grofse Axe als Theil oder Vielfaches der halben grofsen Erdbahnaxe bedeutet.

Oder $$t = \frac{\sqrt{a}\,(a\alpha - e \sin \alpha)}{k\sqrt{A^3}} \text{ Tage} \qquad (22)$$

und $$T = \frac{2\pi}{k} \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{A^3}} \text{ Tage} \qquad (23)$$

wenn $a$ in ihrer Länge angegeben wird, und $A$ die halbe grofse Erdbahnaxe bedentet.

Beispiel. Für den Planet Jupiter wird von den Astronomen angegeben $a$ = 107525000 geogr. Ml.

Für $A = 20682329$ geogr. Ml. hat man

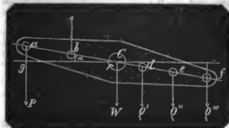
$$T = \frac{2\pi}{k} \cdot \sqrt{\left(\frac{107\,525000}{20\,682329}\right)^3}$$

| | |
|---|---|
| $\log$ 107525000 | = 8,0315095 |
| $\log$ 20682329 | = 7,3155994 |
| $\log$ Quotient | = 0,7159101 |
| $\log$ Kubus | = 2,1477303 |
| $\log \sqrt[2]{\ }$ | = 1,0738651 5 |
| $\log$ 2 | = 0,3010300 |
| $\log \pi$ | = 0,4971498 7 |
| $\log$ Zähler | = 1,8720450 |
| $\log k$ | = 0,2355821−2 |
| $\log T$ | = 3,6364629 |
| und $T$ | = 4329,751 Tage |

Das Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tage giebt $T = 11$ Jahr 312 Tage. Die Umlaufszeit des Jupiter wird von den Astronomen 11 Jahr $310\frac{1}{2}$ Tage bis 11 Jahr 314 Tage 20 Stunden angegeben.

**Balancier.** Ein hebelförmiger Maschinentheil, durch welchen die Kraft auf Lasten einwirkt, und der wie ein Waagebalken auf und niederschwingt, wiewohl man auch einarmige B. hat. Es sei Fig. 192 der zu einer Niederdruckmaschine gehörende B. links in seinem höchsten, also rechts in seinem niedrigsten Stande unter dem $\angle \alpha$ mit dem Horizont. $P$ sei die abwärts wirkende Kraft des über den Kolben getretenen Dampfes, $Q$ der aufwärts wirkende Widerstand der Luftpumpe, $Q'$ der abwärts wirkende Widerstand der Kesselspeisepumpe, $Q''$ der der zum Condensator erforderlichen Kaltwasserpumpe, mit welcher in der Regel die Speisepumpe von derselben Welle aus betrieben wird, $Q'''$ der der Treibstange des Krummzapfens, $W$ das Gewicht des B. Die Abstände der Kraft und der Widerstände vom Mittel $C$ seien der Reihe nach $a$, $b$, $d$, $e$, $f$, der Halbmesser des B.-Zapfens $C$ sei $r$, der Reibungscoefficient $\mu$, so hat man mit alleiniger Berücksichtigung der Reibung des B.-Zapfens in seinem Lager die Gleichung für das Gleichgewicht:

Fig. 192.



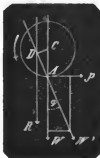

$$Pa \cos \alpha = Qb \cos \alpha + Q'd \cos \alpha + Q'' e \cos \alpha + Q''' f \cos \alpha + \mu r(P - Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$$

woraus $P$ gefunden werden kann, wenn alle übrigen Gröfsen bekannt sind; und zwar ist

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''s + Q'''f)\cos \alpha + \mu r(-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)}{a \cos \alpha - \mu r} \qquad (1)$$

2. Später hat man statt des Reibungscoefficienten $\mu$ einen Reibungswinkel eingeführt: Es sei Fig. 193 der Mittelzapfen. Durch den Druck $W$ wird der Zapfen in $A$ gegen das Lager geprefst, die dadurch entstehende Reibung widersetzt sich der Umdrehung des Zapfens nach der Pfeilrichtung, und es mufs zu deren Ueberwindung eine Kraft $p$ waagerecht angebracht werden. Fürs Gleichgew. zwischen $W$ und $p$ entsteht aus dem # der Kräfte die Mittelkraft $W'$, durch deren alleinige Thätigkeit die Reibung überwunden wird. Bezeichnet man den $\angle WAW'$ mit $\varphi$, so ist $W' = W \sec \varphi$, und sie wirkt mit dem Hebelsarm $CD = r \sin \varphi$, mithin das Moment von $W' = W \sec \varphi \; r \sin \varphi = Wr \operatorname{tg} \varphi$.

Fig. 193.




Man ersieht, dafs $p = W \operatorname{tg} \varphi$, dafs $p$ aber nichts anderes sein kann, als $\mu W$ und $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, so dafs die Gl. 1 sich abändert in

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos \alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W) r \operatorname{tg} \varphi}{a \cos \alpha - r \operatorname{tg} \varphi} \qquad (2)$$

worin $\varphi$ den Winkel bedeutet, dessen Tangente = dem Reibungscoefficient ist, und der **Reibungswinkel** genannt wird.

3. In der neueren Mechanik wird nachgewiesen, dafs die Resultante $R$ der Kraft und sämmtlicher Widerstände in einen Punkt auf der Seite der Kraft in der Entfernung $DC = r \sin \varphi$ (Fig. 193) vom Mittel $C$ fällt, man nimmt die Momente auf diesen Punkt, so dafs der Hebelsarm von $R = 0$ wird und hat:

$$P(a\cos\alpha - r\sin\varphi) = Q(b\cos\alpha - r\sin\varphi) + Q'(d\cos\alpha + r\sin\varphi) + Q''(e\cos\alpha + r\sin\varphi) + Q'''(f\cos\alpha + r\sin\varphi) + Wr\sin\varphi$$

woraus

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)\,r\sin\varphi}{a\cos\alpha - r\sin\varphi} \qquad (3)$$

Zum Vergleich dieser Formel mit der Formel 1 hat man

$$\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sec\varphi} = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

welcher Ausdruck an die Stelle von $\mu$ (Formel 1) gesetzt ist. Diese Formel 3 ist die richtigere.

4. Bei Berücksichtigung der Reibungswiderstände zwischen den Zapfen und Lagern der Anfhängepunkte sämmtlicher Lenkstangen ist zu erwägen, dafs zwischen jedem dieser Zapfen und Lager dieselbe Erscheinung (Fig. 193) vorkommt, dafs nämlich statt der Druckkraft im Mittel die Resultante aus diesem Druck und dem Reibungswerth in Entfernung wie $DC = r\sin\varphi$ vom Mittel wirksam wird, welche den Hebelsarm der Kraft um solche Länge vermindert und den eines Widerstandes zum Nachtheil der Kraft vermehrt.

Sind $r'$, $\varrho$, $\varrho'$, $\varrho''$, $\varrho'''$ die Halbmesser der Zapfen, die Reibungscoefficienten oder Winkel bei einerlei Metall mit dem von $r$ gleich grofs, so erhält man nun die Gleichung:

$$P[a\cos\alpha - (r+r')\sin\varphi] = Q[b\cos\alpha - (r-\varrho)\sin\varphi] + Q'[d\cos\alpha + (r+\varrho')\sin\varphi] + Q''[e\cos\alpha + (r+\varrho'')\sin\varphi] + Q'''[f\cos\alpha + (r+\varrho''')\sin\varphi] + Wr\sin\varphi$$

woraus

$$P = [(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)\,r\sin\varphi + (Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi] : [a\cos\alpha - (r+r')\sin\varphi] \qquad (4)$$

### 5. Anwendung.

Bei der Berechnung der Kraft $P$ ist zu berücksichtigen, dafs bei der gezeichneten Lage des B., wo die linke Seite im Begriff ist, niederzugehen, die rechts aufsteigenden Nebenbelastungen, bestehend in zwei Kolbenstangen nebst Kolben und einer Bläulstange, von der Kraft $P$ mit aufgezogen, deren Gewichte also von $P$ mit überwunden werden müssen, dafs dagegen, wenn die Kraft $P$ in der entgegengesetzten Lage des B. anfängt, senkrecht aufwärts zu wirken, die genannten Nebenlasten senkrecht abwärts wirkend zur Gewältigung der Lasten $Q'$, $Q''$, $Q'''$ mit beitragen. Die links befindlichen Nebenlasten, die Kolben und Kolbenstangen von $P$ und $Q$ wirken in der gezeichneten Lage der Kraft zum Vortheil, beim Aufsteigen zum Nachtheil der Kraft. Die beiden Hälften des B. selbst wirken immer einander entgegengesetzt; demnach sind die genannten Nebenlasten nur als Belastung des B.zapfens $C$ in Rechnung zu bringen. Die Reibungswiderstände zwischen den Kolben und den Cylinder- und Stiefelwandungen wirken der Kraft immer entgegen, und müssen mit den eigentlichen Widerständen summirt werden.

Z. B. für eine Niederdruck-Dampfmaschine von 20 Pferden Kraft wiegt der B. bei 12 Fufs Länge, einer Höhe von 20 Zoll in der Mitte und einer Dicke von 2 Zoll excl. der Verstärkungen circa 2400 Pfd. Die Gewichte der Kolben, der Kolbenstangen und der Bläulstange sind auf beide Seiten des B. ziemlich gleichmäfsig vertheilt und betragen etwa eben so viel, als das Gewicht des B.; mithin kann

1) $W = 4800$ Pfd. gesetzt werden.

Die Welle $C$ des B. ist etwa 3 Fufs lang, hat in der Mitte $4\frac{1}{3}$ Zoll, in den Lagern 3 Zoll Durchmesser bei $5\frac{1}{4}$ Zoll Länge in denselben.

Der Dampfkolbenhub soll 4 Fufs, die Kolbenbewegung per Minute 200 Fufs, die Geschwindigkeit per Secunde also $3\frac{1}{3}$ Fufs betragen; dieselbe Geschw. hat nun die Bläulstange des Krummzapfens, und in dieser mufs der ganze Nutz-Effect von 20 Pferden Kraft vereinigt angesehen werden.

1 Pferdekraft ist 510 in Pfund und Fufs per Secunde, also hat man den Druck $Q'''$ aus der Gleichung

2) $20\cdot 510 = 3\frac{1}{3}\cdot Q'''$

woraus $Q''' = 3060$ Pfd.

die Länge $f = 6$ Fufs.

Die Welle für die Bläulstange beträgt etwa 1 Fufs $4\frac{1}{2}$ Zoll, ihre Stärke innerhalb des B. 3 Zoll, in den Lagern der Bläulstange $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser bei 3 Zoll Länge in denselben.

Die Kaltwasserpumpe für die Druckkraft $Q''$ hat 8 Zoll Durchmesser, mithin 50,265 □Zoll; der Druck auf den Kolben pro □Zoll kann = 10 Pfund gesetzt werden, die Reibung zwischen Kolben, Kolbenstange und Wandungen = $\frac{1}{10}$ gesetzt, giebt

3) $Q'' = 11\times 50{,}265 = 553$ Pfd.

die Länge $e = 3\frac{1}{2}$ Fufs.

Die Welle im B. ist etwa 1 Fuſs lang, in der Mitte $1\frac{3}{4}$ Zoll stark, in den Lagern des Bügels der Kolbenstange $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser bei 1,6 Zoll Länge in denselben.

Die Speisepumpe für die Druckkraft $Q'$ hat $3\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser = 8,29 □Zoll Querschnitt. Der Druck auf den Kolben pro □Zoll $6\frac{1}{2}$ Pfd., die Reibung = $\frac{1}{10}$ gesetzt, giebt

4) $Q' = \frac{11}{10} \cdot 8{,}29 \cdot 6\frac{1}{2} = 59$ Pfund

die Länge $d = 2$ Fuſs.

Welle und Zapfen im B. wie bei der Kaltwasserpumpe, mit der die Speisepumpe übrigens auch an einerlei Welle betrieben wird.

Die Luftpumpe für die Druckkraft $Q$ hat 16 Zoll Durchmesser = 201 □Zoll Querschnitt; der Druck auf den Kolben wegen der unvollkommenen Luftleere = 15 − 1,4 = 13,6 Pfund pro □Zoll, die Reibung = $\frac{1}{10}$ gesetzt, giebt

5) $Q = \frac{11}{10} \cdot 13{,}6 \cdot 201 = 3007$ Pfd.

die Länge $b = 3$ Fuſs.

Die Welle im B. ist 1 Fuſs $4\frac{1}{2}$ Zoll lang, in der Mitte 3 Zoll, in den Lagern $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser bei 3 Zoll Länge in denselben; die Länge $a = 6$ Fuſs.

6) Welle und Zapfen für $P$ im B. wie bei der Bläulstange.

Nun ist $aC = 6$ Fuſs, und da $gh$ die Horizontale bedeutet, $ag = fh$ = dem halben Hube von 4 Fuſs = 2 Fuſs, mithin

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6^2 - 2^2}}{6} = \tfrac{1}{3}\sqrt{8} = 0{,}9428090$$

Setzt man nun den Reibungscoefficienten

$$\mu = tg\,\varphi = \tfrac{1}{8}$$

so hat man

$$\varphi = Arc\,(tg = \tfrac{1}{8}) = 7^\circ 7' 30''$$
$$\sin\varphi = 0{,}124034$$

Man findet demnach für die Berechnung der Kraft $P$ nach den obigen Formeln 1 bis 4:

$$Qb + Q'd + Q''e + Q'''f = 3007 \cdot 3 + 59 \cdot 2 + 553 \cdot 3\tfrac{1}{2} + 3060 \cdot 6 = 29434{,}5 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$29434{,}5 \times (\cos\alpha = 0{,}942809) = 27751{,}1 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$-Q + Q' + Q'' + Q''' + W = -3007 + 59 + 553 + 3060 + 4800 = 5465 \text{ (Pfund)}$$
$$r = 1\tfrac{1}{2} \text{ Zoll} = \tfrac{1}{8} \text{ Fuſs}$$
$$\mu r = r\,tg\varphi = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{64} = 0{,}015625 \text{ Fuſs}$$
$$5465 \times r\,tg\varphi = 5465 \times \tfrac{1}{64} = 85{,}40 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$5465 \cdot r \cdot \sin\varphi = 5465 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}124034 = 84{,}73 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$(Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi = (3007 \cdot \tfrac{5}{48} + 59 \cdot \tfrac{1}{16} + 553 \cdot \tfrac{1}{16} + 3060 \cdot \tfrac{5}{48})\sin\varphi$$
$$= 670{,}23 \cdot 0{,}124034 = 82{,}13 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$a\cos\alpha = 6 \cdot 0{,}942809 = 5{,}656854 \text{ Fuſs}$$
$$r\sin\varphi = \tfrac{1}{8} \times 0{,}124034 = 0{,}015504 \text{ Fuſs}$$
$$(r + r')\sin\varphi = (\tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{48}) \cdot 0{,}124034 = 0{,}028424 \text{ Fuſs.}$$

Es ist mithin nach Formel 1 und 2:

$$P' = \frac{27751{,}10 + 85{,}40}{5{,}656854 - 0{,}015625} = 4934{,}47 \text{ Pfd.}$$

nach Formel 3:

$$P'' = \frac{27751{,}10 + 84{,}73}{5{,}656854 - 0{,}015504} = 4934{,}25 \text{ Pfd.}$$

nach Formel 4:

$$P = \frac{27751{,}10 + 84{,}73 + 82{,}13}{5{,}656854 - 0{,}028424} = 4960{,}17 \text{ Pfd.}$$

Der Unterschied ist also in den Resultaten der Praxis nur ganz unbedeutend, wenn man statt des *sin* des Reibungswinkels die *tang* einführt, dagegen um so bedeutender, wenn man die Reibung in den Aufhängepunkten vernachlässigt, und es darf daher nur Formel 4 angewendet werden.

7) Hat der B. die entgegengesetzte Lage, fängt also die Bewegung links von unten nach oben an, so ändert sich in allen 4 Formeln nur der zusammengesetzte Factor in dem zweiten Glied des Zählers $-(Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$ in $(+Q - Q' - Q'' - Q''' + W)$, hier also 5465 in 4135 und man hat in dem $P$ nach Formel 4, statt 84,73

$$4135 \times 0{,}015504 = 64{,}11$$

woraus

$$P = 4956{,}50 \text{ Pfund.}$$

Um daher für beide äuſsersten Lagen des B. die mittlere Kraft $P$ zu erhalten, schreibt man

$$\frac{84{,}73 + 64{,}11}{2} = 74{,}42$$

oder schon in Formel (4) $Wr\sin\varphi$

$$= \tfrac{1}{2}(\mp Q \pm Q' \pm Q'' \pm Q''' + 2W)r\sin\alpha$$

und man erhält

$$P = 4958{,}33 \text{ Pfund.}$$

Hat der B. die waagerechte Lage, so ist $\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$. Dann ist im Mittel für den Aufgang und den Niedergang von $P$

$$P = \frac{29434{,}5 + 74{,}42 + 82{,}13}{6 - 0{,}028424} = 4955{,}31 \text{ Pfd.}$$

Der Unterschied der erforderlichen Kraft für die beiden äuſsersten und die mitt-

leren horizontalen Lagen des B. ist in dem gegebenen Beispiel nicht sehr grofs, und in den Zwischenlagen des B. noch geringer. Will man die mittlere Kraft $P$ finden, so hat man nach dem Vorstehenden die beiden Formeln:

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (Wr + Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi}{a\cos\alpha - (r + r')\sin\varphi} \quad (5)$$

und

$$P = \frac{Qb + Q'd + Q''e + Q'''f + (Wr + Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi}{a - (r + r')\sin\varphi} \quad (6)$$

Erstere für die beiden äufseren, letztere für die mittleren Lagen des B.; und für das mittlere $P$ aus beiden den Mittelwerth genommen.

**Balkenfufs.** Ein bei den Steinmetzen übliches Körpermaafs, welches aber nur zur Erleichterung der Duodecimalrechnung und um grofse Bruchtheile von Kubikfufs zu vermeiden, eingeführt ist. Der Kubikfufs wird deshalb in 12 Schachtfufse, der Schachtfufs in 12 Balkenfufs eingetheilt; der B. hat also 12 Kubikzoll.

Ein Werkstück 6' 6" lang, 3' 5" breit, 1' 2" hoch würde berechnet werden:

$$6\tfrac{1}{2} \cdot 3\tfrac{5}{12} \cdot 1\tfrac{1}{6} = \frac{13}{2} \cdot \frac{41}{12} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3731}{144}$$

$$= 25\,\frac{131}{144} \text{ Kubikfufs.}$$

Man multiplicirt aber lieber:

6' 6" × 3' 5" nämlich

6' × 3' = 18□'
6' × 5" = 2 „ 6 (Fufs, Zoll)
3' × 6" = 1 „ 6 „ „
5" × 6" = — „ 2 „ „ 6□"

Summa 22□' 2 (Fufs, Zoll) 6□"
× 1' 2"

1' × 22□' = 22 c'
1' × 2 F.Z. = — „ 2 Schtf.
1' × 6□" = — „ — „ 6 Bkf.
2" × 22□' = 3 „ 8 „ — „
2" × 2 F.Z. = — „ — „ 4 „
2" × 6□" = — „ — „ 1 „

Summa 25 c' 10 Scht' 11 Bk'

$= 25 + \frac{10}{12} + \frac{11}{144}$ Kubikfufs (vgl. algebraische Geometrie No. 3 und 4).

**Balkenmaafs.** Der allgemeine Name des bei Berechnungen früher gebräuchlichen Körpermaafses, welches, wie der vorstehende Balkenfufs, nur noch zu Erleichterung der Rechnung angewendet wird. Man dachte sich dabei ein vierkantiges Prisma (ein Balken) von quadratischem Querschnitt. So war eine Balkenruthe ein Volumen von 1 Ruthe lang 1□Fufs Querschnitt = 12 Kubikfufs; ein Balkenfufs ein Volumen von 1 Fufs lang und 1□Zoll Querschnitt = 12 Kubikzoll; ein Balkenzoll war 1 Zoll lang 1□Linie im Querschnitt = 12 Kubiklinien.

**Ballistik.** (Ballista, ein grobes Geschütz, eine Wurfmaschine bei den Römern, von βάλλειν, werfen, schlendern) wird deutsch Geschützkunde genannt, wobei man sich aber nicht zu denken hat, dafs sie die Lehre von der Anfertigung der Geschütze allein, sondern diese nur in so weit in sich schliefst, als deren wesentliche Construction und deren Dimensionsverhältnisse auf die beabsichtigte Wirkung des Geschützes von Einflufs ist. B. ist genau genommen die Wissenschaft von den geworfenen Körpern, deren Bahnen in Form und Länge, deren Geschwindigkeiten in Beziehung auf die Gröfsen der darauf verwendeten Wurfkräfte; also Schiefskunde, Schiefswissenschaft.

Die B. zerfällt demnach in 4 Theile:

A. In die Lehre von der Bewegung der Geschosse. Diese würde schon in dem Art. Bahn geworfener Körper vollständig abgehandelt sein, wenn dort der Widerstand; den die atmosphärische Luft den geworfenen Körpern entgegensetzt, berücksichtigt worden wäre.

B. In die Lehre von den Geschossen, deren Form und Construction, in Beziehung auf die Mittel, durch welche die Wurfkräfte entwickelt werden; als Pfeil durch Armbrust; also durch Elasticität einer gespannten Schnur; Stein durch Schleuder, also Masse durch Schwungkraft; Kugel durch Rohr, also durch Entbindung von Gasen aus dem Schiefspulver oder durch comprimirte atmosphärische Luft.

C. In die Lehre von der Construction der Wurfapparate in Beziehung auf die Wurfkräfte und die Geschosse.

D. In die Lehre von den Entwickelungsmitteln verlangter Wurfkräfte.

2. Für die Lehre von der Bewegung der Geschosse hat man aus dem Art. Bahn geworfener Körper, an den hier angeknüpft werden mufs, ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes:

A. Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ senkrecht aufwärts geworfene Masse steigt $t = \frac{c}{2g}$ Secunden lang auf die

Höhe $h = gt^2 = \frac{c^2}{4g}$, worauf sie zu fallen anfängt, $t$ Secunden lang fällt, und von dem Augenblick des Wurfs ab, nach $2t$ Secunden mit der Endgeschwindigkeit $c$ wieder auf die Erde kommt.

B. Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ unter dem Richtungswinkel $\alpha$, also schräg aufwärts geworfene Masse, steigt $t = \frac{c}{2g} \sin \alpha$ Secunden lang bis zur Höhe $h = \frac{c^2}{4g} \sin^2\alpha$, wo sie von dem Abgangsort, horizontal gemessen, $\frac{c^2}{4g} \sin 2\alpha$ entfernt ist, und fällt von da ab wiederum $t = \frac{c}{2g} \sin \alpha$ Secunden lang, wonach sie in Entfernung $\frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$ vom Abgangsort wieder zur Erde kommt, und die Bahn, welche sie beschreibt, ist eine Parabel.

3. In der Wirklichkeit, nämlich beim Wurf einer Masse durch die atmosphärische Luft, erleiden diese Gesetze einige Abänderung: die Beschleunigung $g$ wird nämlich vermindert, und zwar wächst diese Verminderung sehr nahe proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des durch die Luft bewegten Körpers, so dafs, wenn $A$ einen Versuchscoefficienten bezeichnet, die Beschleunigung beim senkrechten Fall$= g - Av^2$ in dem Augenblick ist, wo der Körper die Geschw. $= v$ hat; die Bewegung ist mithin eine ungleichförmig beschleunigte. In dem später folgenden Art.: „Bewegung in einem widerstehenden Mittel" wird auch des Falles gedacht werden, der in die B. gehört, nämlich wo ein Körper mit einer Geschw. $V$ in die Höhe geworfen wird, wo also die Anfangsbeschleunigung $-(g + AV^2)$ ist.

Man findet dort entwickelt:

1) Die Höhe $h$ bis zu dem Punkt, wo die aufsteigende Geschwindigkeit noch $v$ ist

$$h = \frac{1}{4A} \operatorname{logn} \frac{g + AV^2}{g + Av^2}$$

2) Die Höhe $H$ in dem Punkt, wo der Körper wieder zu fallen beginnt

$$H = \frac{1}{4A} \operatorname{logn} \frac{g + AV^2}{g}$$

3) Die aufsteigende Geschw. in der Höhe $h$

$$v = \sqrt{\left[\frac{g}{A}\left(\frac{g + AV^2}{ge^{4.Ah}} - 1\right)\right]}$$

4) die Zeit des Aufsteigens bis zur Geschw. $v$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g.A}}\left[Arc\,tg\,V\sqrt{\frac{A}{g}} - Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{A}{g}}\right]$$

5) und die Zeit des Aufsteigens bis zur Geschw. $= 0$

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g.A}} Arc\,tg\,V\sqrt{\frac{A}{g}}$$

Die vorstehenden Formeln sind von Form und physikalischer Beschaffenheit des geworfenen Körpers ganz unabhängig, und nur dann von praktischem Werth, wenn der Coefficient $A$ für einen zu werfenden Körper bekannt ist. Aber ein Wurfspiefs findet in der Luft weniger Widerstand als eine Kugel, und eine eiserne Kugel weniger, als ein Ball von losen Daunen.

4. Die heutige Ballistik, ein Hauptzweig der Artilleriewissenschaften, beschäftigt sich aber nur mit den Feuerwaffen, und hier allein liegen Versuche und Erfahrungen zu wissenschaftlicher Benutzung vor. Die Geschosse sind eiserne Kugeln, ihr Widerstand in der Luft ist proportional ihren gröfsten Kreisflächen oder den Quadraten ihrer Durchmesser $d$, und wenn man den Widerstand zugleich proportional dem Quadrat der Geschw. $v$ der Kugel setzt, so kann man statt des allgemeinen Widerstandes $Av^2$ auch schreiben $ad^2v^2$, wo $a$ als Coefficient für einen bestimmten Kugeldurchmesser gegeben sein mufs.

Wird eine Kugel von dem Gewicht $p$ und dem Durchmesser $d$ in die Höhe geworfen, so ist der Widerstand $= p + ad^2v^2$ und eben so grofs ist also auch die für's Gleichgewicht während der Bewegung bei der Geschw. $v$ erforderliche Kraft; die zu bewegende Masse ist $p$, mithin die beschleunigende Kraft $= \frac{p + ad^2v^2}{p}$ und die Beschleunigung $G = -g\frac{p + ad^2v^2}{p}$

Gemäfs der allgemeinen phoronomischen Formel

$$C^2 = 4\int G\partial s$$

wo $C$ die Endgeschwindigkeit und $s$ den bis dahin von der Ruhe aus zurückgelegten Weg bedeuten, hat man nun

$$v^2 = 4\int -g\frac{p + ad^2v^2}{p}\partial h$$

wenn $h$ die zu $v$ gehörige senkrechte Wurfhöhe bedeutet

$$= -\frac{4g}{p}\int (p + ad^2v^2)\,\partial h$$

und nach $h$ differenzirt

$$2v\partial v = -\frac{4g}{p}(p + ad^2v^2)\partial h$$

hieraus

$$\partial h = -\frac{p}{2g}\frac{v\cdot\partial v}{p + ad^2v^2}$$

und

$$h = -\frac{p}{2g}\int_0^v \frac{v\partial v}{p + ad^2v^2}$$

Nach der allgemeinen Integralformel:

$$\int_0 \frac{x\,\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{2b}\, logn\,(a + bx^2)$$

hat man nun

$$h = -\frac{p}{4gad^2}\, logn\,(p + ad^2v^2) + C$$

für $h = 0$ wird $v$ = der Anfangsgeschw. $V$, mithin vollständig:

$$h = \frac{p}{4gad^2}\, logn\, \frac{p + ad^2V^2}{p + ad^2v^2} \qquad (1)$$

also die gröfste Höhe für die Geschw. $v = 0$

$$H = \frac{p}{4gad^2}\, logn\, \frac{p + ad^2V^2}{p} \qquad (2)$$

und hieraus, wenn man die Anfangsgeschw. $V$ für eine Höhe $H$ finden will

$$V^2 = \frac{p}{ad^2}\left(e^{\frac{4gad^2H}{p}} - 1\right) \qquad (3)$$

wo $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Um die Zeit $t$ zu finden, hat man aus der allgemeinen phoron. Formel

$$\partial t = \frac{\partial s}{C}$$

wenn für $\partial s$ der obige Werth von $\partial h$ und $v$ für $C$ geschrieben wird

$$\partial t = -\frac{p}{2g}\cdot\frac{\partial v}{p + ad^2v^2}$$

und

$$t = -\frac{p}{2g}\int_0^v \frac{\partial v}{p + ad^2v^2}$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int_0 \frac{\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\, Arc\,tg\, x\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$$

findet man reducirt

$$t = -\frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\left(Arc\,tg\, dv\sqrt{\frac{a}{p}} + C\right)$$

zur Constantenbestimmung hat man $v$ = der Anfangsgeschw. $V$ für $t = 0$; daher vollständig

$$t = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\, Arc\,tg\, dV\sqrt{\frac{a}{p}} - Arc\,tg\, dv\sqrt{\frac{a}{p}}\Big] \qquad (4)$$

und die Zeit bis zur gröfsten Höhe $H$, nämlich für $v = 0$

$$T = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\, Arc\,tg\, dV\sqrt{\frac{a}{p}} \qquad (5)$$

Vergleicht man diese letzteren Formeln mit den zu Anfang aus einem späteren Artikel citirten allgemeineren Formeln, so ersieht man deren Uebereinstimmung, wenn man für den dortigen allgemeinen Coefficienten $A$ den hier speciell erforderlichen Werth $g\cdot\frac{ad^2}{p}$ setzt.

5. Die Versuchscoefficienten sind von einander sehr abweichend, und es ist dies daraus erklärlich, dafs die grofsen Anfangsgeschwindigkeiten abgeschossener Kugeln niemals ganz genau gefunden werden können. Artilleristen, Männer von Fach, die sich mit den neuesten Versuchen und Erfahrungen fortdauernd beschäftigen, bedürfen meiner Angaben nicht, und den Jüngern der Mathematik kann nur daran liegen, Versuchszahlen anwenden zu lernen, daher hier nur die eine Versuchsangabe von Hutton, dafs eine Kugel von 2 engl. Zoll Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von 1500 engl. Fufs einen Widerstand von 59 engl. Pfd. erfährt, dafs also $ad^2 = 59$ u. $a = \frac{59}{4} = 14{,}75$ Pfd. für die Geschw. $V = 1500$ Fufs ist.

Für die Geschw. = 1 hat man daher

$$a = \frac{14{,}75}{1500^2} = \frac{1}{152542}$$

**Beispiel.** Eine Kugel, 24 Pfund schwer (24pfünder) hat einen Durchmesser von 5,6 Zoll; bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 2000 Fufs erhält man aus Formel 2 die Höhe $H$ des senkrechten Aufsteigens, wenn man zugleich $g = (15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs$) = 16$ engl. Fufs setzt

$$H = \frac{24}{4\cdot16\cdot\frac{5{,}6^2}{152542}}\, logn\, \frac{24 + \frac{5{,}6^2\cdot2000^2}{152542}}{24} = \frac{5720325}{3136}\cdot logn\,\frac{8068813}{228813}$$

$$\begin{aligned} log\ br\ 8068813 &= 6{,}9068097 \\ \text{„}\ \ \text{„}\ \ 228813 &= 5{,}3594807 \\ \hline log\ br\ \text{Quotient} &= 1{,}5473290 \end{aligned}$$

man findet nun den *logn*

$$1 = 2{,}3025851$$
$$0{,}5 = 1{,}1512925$$
$$0{,}04 = 0{,}0921034$$
$$0{,}007 = 0{,}0161181$$
$$0{,}0003 = 0{,}0006908$$
$$0{,}00002 = 0{,}0000461$$
$$0{,}000009 = 0{,}0000207$$
$$logn \quad = 3{,}5628567$$

folglich

$$H = \frac{5720325}{3136} \cdot 3{,}5628567$$

Mit Hülfe der Logarithmen findet man

$$H = 6499 \text{ engl. Fufs.}$$

Die Zeit, in welcher die Kugel diese Höhe erreicht, findet man aus Formel 5

$$T = \frac{1}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6} \sqrt{24 \cdot 152542}\, Arc\, tg\, 5{,}6 \cdot 2000 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}$$

$$= 10{,}67732 \cdot Arc\, tg\, 5{,}85353$$
$$\angle (tg = 5{,}85353) = 80^{\circ}\, 18'\, 19''$$

wozu ein Bogen gehört $= 1{,}4015915$ und

$T = 10{,}67732 \times 1{,}4015915 = 14{,}965$ Sec.

Im luftleeren Raum würde die Höhe betragen

$$H = \frac{2000^2}{4 \cdot 16} = 62500 \text{ engl. Fufs}$$

und die Zeit

$$T = \frac{2000}{2 \cdot 16} = 62{,}5 \text{ Secunden.}$$

6. Geschieht der Wurf schräg aufwärts, so kann die Bewegung in der Art untersucht werden, wie es mit dem Wurf in der Luftleere (Artikel: Bahnbestimmung u. s. w. No. 4 pag. 274) geschehen ist.

Es sei in Fig. 171 daselbst $AB$ unter dem $\angle \alpha$ mit dem Horizont die Richtung des Wurfs, $C$ die Anfangsgeschwindigkeit, so ist die relative Geschwindigkeit nach der horizontalen Richtung $AD = C \cos \alpha = V$, nach der senkrechten $AE = C \sin \alpha = V_1$; die Beschleunigung horizontal ist $-Ac^2 \cos \alpha = -Av^2$; nach der senkrechten $-(g + Ac^2 \sin^2 \alpha) = -(g + Av_1^2)$.

Nach der allgemeinen phoron. Formel

$$v^2 = 4 \int G \partial s$$

hat man für die horizontale Bewegung

$$V^2 = -4 \int Av^3 \partial s$$

woraus

$$\partial s = -\frac{v\, \partial v}{2Av^2} = -\frac{\partial v}{2Av}$$

also

$$s = -\frac{1}{2A}\, logn\, v + C$$

Die Anfangsgeschw. ist $V$, also vollständig

$$s = \frac{1}{2A} [ln\, V - ln\, v]$$

Zur Bestimmung der Zeit $t$ hat man allgemein

$$G = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\triangle t}$$

hiernach

$$\frac{\partial t}{\triangle v} = \frac{-1}{2Av^2}$$

und $t = -\frac{1}{2A} \int \frac{\partial v}{v^2} + C = +\frac{1}{2Av} + C$

vollständig

$$t = \frac{1}{2A} \left[ \frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right] = \frac{1}{2A} \frac{V - v}{Vv}$$

Die senkrechte Seitenbewegung ist schon in No. 4 untersucht; schreibt man die Formeln wie in No. 3, so hat man

$$h = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{g + AV_1^2}{g + Av_1^2}$$

die Zeit

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{gA}} \left[ Arc\, tg\, V_1 \sqrt{\frac{A}{g}} - Arc\, tg\, v_1 \sqrt{\frac{A}{g}} \right]$$

Die gröfste horizontale Länge ist also

$$S = \frac{1}{2A}\, ln\, V$$

diese ist vollständig bestimmt, die Zeit aber, dafs dieser gröfste Weg erreicht wird

$$T = \frac{1}{2A} \frac{V - v}{Vv}$$

ist unendlich grofs, so dafs der Körper nie das Endziel $S$ erreicht.

Denkt man sich demnach den Wurf in einer Entfernung von der Erdoberfläche beginnend, so trifft der Körper die Erde niemals senkrecht; der Winkel aber nähert sich dem rechten um so mehr, je gröfser der Elevationswinkel und je gröfser die Höhe über der Erdoberfläche ist, von der aus der Wurf beginnt, und die Bahncurve hat, der Wurf geschehe horizontal oder unter einem Elevationswinkel oder unter einem Depressionswinkel, auf der niedersteigenden Seite eine Asymptote.

Die gröfste horizontale Höhe

$$H = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{g + AV_1^2}{g}$$

wenn nämlich $v_1 = 0$ wird, erreicht der Körper in der Zeit

$$T_1 = \frac{1}{2\sqrt{gA}}\, Arc\, tg\, V_1 \frac{A}{g}$$

Setzt man für $A$ den für die Praxis oben gedachten Werth $g \frac{\alpha d^2}{p}$, u. $C \sin \alpha$,

$c \sin \alpha$, $C \cos \alpha$, $c \cos \alpha$, so erhält man die für die Praxis branchbaren Formeln:

horizontal

$$s = \frac{p}{2\,gad^2}(\operatorname{logn} C \cos a - \operatorname{logn} c \cos \alpha) \quad (1)$$

$$S = \frac{p}{2\,gad^2} \operatorname{logn} C \cos a \quad (2)$$

$$t = \frac{p}{2gad^2 \cos \alpha} \frac{C-c}{Cc} \quad (3)$$

$T$ = unendlich (4)

vertical

$$h = \frac{p}{4\,gad^2} \operatorname{logn} \frac{p + ad^2 C^2 \sin^2 \alpha}{p + ad^2 c^2 \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

$$H = \frac{p}{4\,gad^2} \operatorname{logn} \frac{p + ad^2 C^2 \sin^2 \alpha}{p} \quad (6)$$

$$t_1 = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\left[\operatorname{Arc\,tg} d\,C \sin \alpha \sqrt{\frac{a}{p}} - \operatorname{Arc\,tg} d\,c \sin a \sqrt{\frac{a}{p}}\right] \quad (7)$$

$$T_1 = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{Arc\,tg} d\,C \sin \alpha \sqrt{\frac{a}{p}} \quad (8)$$

7. Die vorstehenden Formeln (5 bis 8) für die senkrechte Seitenbewegung gelten nur in dem wirklich aufsteigenden Theil der Bahncurve; sobald die Kugel anfängt zu fallen, wird die Beschleunigung $= g - Av^2$.

Daher

$$h = -\frac{1}{4A} \operatorname{logn}(g - Av_1^2) + C$$

und da die Bewegung von der Seitengeschwindigkeit = 0 anfängt, vollständig

$$h = \frac{1}{4A} \operatorname{logn} \frac{g}{g - Av_1^2}$$

$t_1$ aber bestimmt sich aus der allgemeinen Formel

$$G = \tfrac{1}{2}\frac{\partial C}{\Delta t}$$

nämlich

$$\frac{\partial t}{\Delta v} = \frac{1}{2(g - Av_1^2)} + C$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{logn} \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{\pm 1 \mp x\sqrt{\frac{b}{a}}} + C$$

hat man vollständig

$$t = \frac{1}{4\sqrt{gA}} \operatorname{logn} \frac{1 + v_1\sqrt{\frac{A}{g}}}{1 - v_1\sqrt{\frac{A}{g}}}$$

und für $A$ und $v$ die ballistischen Werthe gesetzt

$$h = \frac{p}{4\,gad^2} \operatorname{logn} \frac{p}{p - ad^2 c^2 \sin^2 \alpha} \quad (9)$$

$$t_1 = \frac{1}{4gd}\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{logn} \frac{1 + dc \sin \alpha \sqrt{\frac{a}{p}}}{1 - dc \sin \alpha \sqrt{\frac{a}{p}}} \quad (10)$$

**Beispiel.** Die ad 5 gedachte Kugel vom Gewicht $p = 24$ Pfund, dem Durchmesser $d = 5{,}6$ Zoll werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $C = 2000$ Fufs unter dem $\angle \alpha = 45°$ mit dem Horizont in die Höhe geworfen, so ist bei $a = \frac{1}{152542}$

$$H = \frac{24 \cdot 152542}{4 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2} \ln \frac{24 + \frac{5{,}6^2 \cdot 2000^2 \cdot \sin^2 45°}{152542}}{24}$$

$$= \frac{5720325}{3136} \operatorname{logn} \frac{8068813}{228813} \sin^2 45°$$

$\log br \sin^2 45° = 9{,}6989700 - 10$
$= -0{,}30103$

Den logn findet man aus diesem log br

| | | |
|---|---|---|
| $-0{,}3$ | $=$ | $-0{,}6907755$ |
| $-0{,}001$ | $=$ | $23026$ |
| $-0{,}00003$ | $=$ | $691$ |
| $\operatorname{logn} \sin^2 45°$ | $=$ | $-0{,}6931472$ |

Nach No. 5 ist

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{logn} \frac{8068813}{228813}$ | $=$ | $+\ 3{,}5628567$ |
| logn Product | $=$ | $2{,}8697095$ |

folglich

$$H = \frac{5720325}{3136} \cdot 2{,}8697095$$

Man findet nun mit Hülfe der Logarithmen

$H = 5235$ englische Fufs

Ferner findet man

$$T_1 = \frac{1}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6}\sqrt{24 \cdot 152542} \operatorname{Arc\,tg} 5{,}6 \cdot 2000 \cdot \sin 45° \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}$$

$= 10{,}67732 \cdot \operatorname{Arc} \log tg\ 0{,}6169028$

$\angle \log tg = 76° 25' 3''$

hierzu gehört der Bogen 1,3337234.

Man hat demnach

$T_1 = 10{,}67732 \cdot 1{,}3337234 = 14{,}24$ Sec.

Setzt man diese Zeit in die Formel (3) für $t$, so erhält man die noch stattfindende Geschw. $c$ aus

$$14{,}24 = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2 \cos 45°} \cdot \frac{2000 - c}{2000\,c}$$

hieraus

$$c = \frac{457626000}{1491893} = 307 \text{ engl. Fufs}$$

und die horizontale Seitengeschwindigkeit

$$c \cos 45^\circ = 217 \text{ engl. Fufs.}$$

Diesen Werth in Formel (1) für $s$ gesetzt, giebt den horizontalen Weg der Kugel

$$s = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2} (ln\, 2000 \cos 45^\circ - ln\, 217)$$

$$s = \frac{11440650}{3136} \cdot 1{,}8744317$$

$$= 6838 \text{ engl. Fufs.}$$

Setzt man nun in Formel 9 für $h$ den Werth 5235 engl. Fufs, so erhält man für $c \sin \alpha$ die senkrechte Endgeschwindigkeit der Kugel, wenn die Basis deren Bahn horizontal ist.

Man hat aber durch Umformung:

$$\frac{p}{ad^n}\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{4gad^2h}{p}}}\right] = c^2 \sin^2 \alpha$$

also

$$\frac{5720325}{49}\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{1094464}{381355}}}\right] = c^2 \sin^2 \alpha$$

wo $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen $= 2{,}718281828 \ldots$.

Die Rechnung geschieht folgender Art:

| | |
|---|---|
| $log\, br \cdot e$ | $= 0{,}4342944819$ |
| $log \cdot log\, br\, e$ | $= 0{,}6377843 - 1$ |
| $log\, 1094464$ | $= 6{,}0392015$ |
| Summa | $= 5{,}6769858$ |
| $log\, 381355$ | $= 5{,}5813295$ |
| $log \cdot log\, e^{\frac{1094464}{381355}}$ | $= 0{,}0956563$ |

Aus den Tafeln findet man

| | |
|---|---|
| $log\, e^{\frac{1094464}{381355}}$ | $= 1{,}2463970$ |
| $log\, 1$ | $= 0,$ |
| $log \frac{1}{e^{\cdots}}$ | $= 0{,}7536030 - 2$ |
| $\frac{1}{e^{\cdots}}$ | $= 0{,}0567026$ |
| $1 - 0{,}0567026$ | $= 0{,}9432974$ |

$$c \sin \alpha = \sqrt{\frac{5720325}{49} \cdot 0{,}9432974} = 332 \text{ engl. Fufs.}$$

Setzt man nun diesen Werth in Formel 10 für $t_1$, so erhält man

$$t_1 = \frac{1}{4 \cdot 16 \cdot 5{,}6} \sqrt{24 \cdot 152542}\; ln \frac{1 + 5{,}6 \cdot 332 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}}{1 - 5{,}6 \cdot 332 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}}$$

$$t_1 = 5{,}3386 \times logn \frac{1 + 0{,}971685}{1 - 0{,}971685}$$

$$= 5{,}3386 \times 4{,}24325 = 22{,}65 \text{ Secunden}$$

die Zeit $t$ der Aufsteigung $= 14{,}24$ „

Summa Zeit d. Schlusses $= 36{,}89$ Secunden

Setzt man die Zeit in Formel (3), so erhält man die horizontale Endgeschwindigkeit $c \cos 45^\circ$, nämlich

$$36{,}89 = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2 \cdot \cos 45^\circ} \cdot \frac{2000 - c}{2000\, c}$$

woraus

$$c = \frac{7322016}{56015} = 131 \text{ engl. Fufs}$$

und $\quad c \cdot \cos 45^\circ = 92{,}43$ engl. Fufs.

Setzt man wiederum diesen Werth in Formel (t), so erhält man den horizontalen Weg, die Schufsweite $s$, nämlich

$$s = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2} (ln\, 2000 \cos 45^\circ - ln\, 92{,}43)$$

$$= \frac{5720325}{1568} \times (72543289 - 4{,}5264480)$$

$$s = 9952 \text{ engl. Fufs.}$$

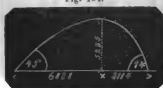
Betrachtet man die beiden Endgeschwindigkeiten, die horizontale = 92,43 Fufs, die verticale = 332 Fufs, so erhält man den ∠, unter welchem die Kugel einschlägt

$$= arc\, tg \frac{332}{92{,}43} = 3{,}591907 = 74^\circ\, 26\tfrac{1}{4}'$$

Die Wurfbewegung des 24pfünders bei einer Anfangsgeschw. = 2000 Fufs und einem Elevations∠ = 45° ist wie folgt in englischem Maafs:

Die Schufsweite bei horizontaler Basis der Bahn ist 9952 Fufs, die gröfste Höhe 5235 Fufs. Diese Höhe erreicht die Kugel in 14,24 Secunden und einer horizontalen Entfernung 6838 Fufs, und hat dabei noch eine horizontale Geschw. von 217 Fufs. Von da ab fällt die Kugel langsamer, als sie gestiegen ist, nämlich in 22,65 Secunden, beschreibt einen kürzeren und steileren Bogen von nur 3114 Fufs horizontaler Länge und einem Einfallswinkel von 74° 26¼'; die Curve hat also ungefähr die nachstehende Gestalt.

Fig. 194.

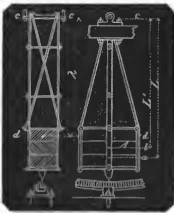


Es könnte nun noch die Curve selbst näher untersucht werden, indem man z. B. die zusammengehörigen Seiten-Elemente, wie $\partial s$ und $\partial h$ in $\partial w = \sqrt{(\partial s)^2 + (\partial h)^2}$ zusammengesetzt; allein es ist dies auf verschiedene Weise bisher von den gröfsten Mathematikern vergeblich versucht worden. Wie nachgewiesen, ist die Curve auch von zweierlei Natur: der aufsteigende Theil ist von dem niedersteigenden wesentlich unterschieden. Es kann also hier die vorstehende Untersuchung genügen. Auch der Coefficient $a$ für den Luftwiderstand ist nur annähernd richtig, und es wird von Männern von Fach und Erfahrung bestritten, dafs der Widerstand der Luft überhaupt den Quadraten der Geschw. proportional sei.

Die übrigen 3 Theile der Ballistik sind rein technisch, und wenngleich mehrere Gegenstände derselben mathematische Untersuchungen entweder zulassen oder erforderlich machen, so gehört dazu als Basis eine specielle Kenntnifs der Artilleriewissenschaften.

**Ballistisches Pendel.** Ein Apparat in Form eines Pendels, durch welchen man die Geschwindigkeit einer aus dem Feuerrohr heraustretenden Kugel messen kann. Aus dem vor. Art. ist ersichtlich, dafs die ballistische Bahn hauptsächlich mit von der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel abhängt, und dafs die Kenntnifs derselben wesentlich erforderlich ist, um mit Berücksichtigung der Wirkung eines Schusses den mit $a$ bezeichneten Coefficienten des Luftwiderstandes zu ermitteln. Das b. P., welches Hutton zu seinen Versuchen anwendete, hatte beistehende Form: Ein starker und breiter mit Eisen beschwerter Körper $A$ von möglichst hartem Holz war mit einer starken eisernen Stange an einen Wagebalken gehängt, der sich, um die Reibung möglichst zu vermindern, mit Schneiden auf polirten Platten drehen konnte. Gegen $A$ wurden die Kugeln abgeschossen, und ein unterhalb $A$ befindlicher Stift zeigte innerhalb einer weichen Wachsmasse die Länge des Bogens an, in welchem das Pendel durch den Schufs bewegt worden war, so dafs auf die Geschwindigkeit geschlossen werden konnte, mit welcher die Kugel das Pendel getroffen hatte.

Fig. 195.




Die Theorie dieser Versuche ist folgende:

Läfst man das Pendel eine Zeit lang frei schwingen, und zählt die Anzahl $n$ der Schwingungen innerhalb $t$ Secunden, so erfährt man die senkrechte Entfernung $ac = L$ des Schwingungspunkts $a$ von der Schwingungsaxe $c$, weil die Pendellängen sich umgekehrt wie die Quadrate der in einerlei Zeit gemachten Schwingungen verhalten, und indem die Länge des einfachen Secundenpendels, das in $t$ Secunden auch $t$ Schwingungen macht, für jeden Ort der Erdoberfläche gefunden werden kann.

Bezeichnet man die Länge des einfachen Secundenpendels mit $l$, so ist also

$$L : l = t^2 : n^2$$

und

$$L = \left(\frac{t}{n}\right)^2 l \qquad (1)$$

Durch Balanciren des Pendels horizontal auf einer Schneide kann man die Entfernung $L'$ seines Schwerpunkts $b$ von der Axe $c$ finden, der bei jedem physischen Pendel der Axe näher liegt als der Schwingungspunkt.

Der Widerstand nun, den das Pendel der Kugelwirkung entgegensetzt, ist offenbar die Trägheit seiner Masse in Beziehung auf die Drehungsaxe $c$; ist $P$ das Gewicht des ganzen Pendels, $x$ die Entfernung des Mittelpunkts der Masse, so ist deren Trägheitsmoment $= x^2 P$. Es ist aber bei jedem physischen Pendel $x^2 =$ dem Product aus den Entfernungen des Schwerpunkts und des Schwingungspunkts, also $x^2 = L \cdot L'$ und das Moment der Trägheit des Pendels $= L \cdot L' P$. Hierzu kommt das Trägheitsmoment $\lambda^2 p$ der in das Holz in einen Punkt $d$ dringenden Kugel, wenn deren Gewicht $= p$, und die Entfernung $dc = \lambda$ ist, in welcher sie das Pendel getroffen hat, so dafs der gesammte Widerstand $LL'P + \lambda^2 p$ beträgt.

Um nnn die Länge $\lambda_1$ des einfachen Pendels zu finden, welches eben so schwingt, wie das in den Massen $P$ nnd $p$ zusammengesetzte Pendel, dividirt man die Summe der Massenmomente durch die Summe deren statischen Momente, daher

$$\lambda_1 = \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{L^1P + \lambda p} \qquad (2)$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Kngel das Pendel in der Entfernung $\lambda$ trifft, mit $C$, und die Geschwindigkeit des Pendels in demselben Punkt mit $c$, so ist das mechanische Moment der Kraft in der Entfernnng $\lambda = pC$, das mechanische Moment des Widerstandes daselbst

$$= \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{\lambda^2} c$$

und

$$pC = \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{\lambda^2} c \qquad (3)$$

Die Geschw. $c$ auf die Länge $\lambda_1$ des einfachen Pendels reducirt, giebt die Geschw. $v$ aus der Proportion

$$\lambda : \lambda^1 = c : s$$

woraus

$$c = \frac{\lambda}{\lambda^1} v$$

Diesen Werth nnd den Werth $\lambda^1$ aus (2) in (3) gesetzt, giebt

$$pC = (L^1P + \lambda p)\frac{v}{\lambda}$$

woraus $$v = \frac{\lambda p C}{L^1P + \lambda p} \qquad (4)$$

Dieselbe Geschwindigkeit $v$ läfst sich nun auch mit Hülfe der von dem Stift in der Wachsmasse eingeschnittenen znr Länge $s$ finden, welche mit einem Maafsstab gemessen, die Sehne des von dem Stift beschriebenen Bogens ist.

Die von dem Endpunkt des einfachen Pendels beschriebene Sehne ist nun $\frac{\lambda_1}{r} s$, die Geschwindigkeit $v$ dieses Schwingungspunktes ist aber nach der Lehre vom Pendel $= 2\sqrt{g\lambda_1}\ \sin vers\ \alpha$, wenn $\alpha$ der zu dem von $\lambda$ beschriebenen Bogen gehörende Winkel ist. Da nun der *Sinus versus* = ist dem Quadrat der zugehörigen Sehne, dividirt durch den Durchmesser, also

$$\lambda_1\ \sin vers\ \alpha = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{r} s\right)^2}{2\lambda_1} = \frac{\lambda_1 s^2}{2r^2}$$

so ist

$$v = \frac{s}{r}\sqrt{2g\lambda_1} \qquad (5)$$

Setzt man nnn für $\lambda_1$ den Werth aus No. 2 und verbindet No. 4 mit No. 5, so hat man

$$\frac{\lambda p C}{L^1P + \lambda p} = \frac{s}{r}\sqrt{\left(2g \cdot \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{L^1P + \lambda p}\right)}$$

woraus

$$C = \frac{s\sqrt{2g}}{\lambda p r}\sqrt{(LL^1P + \lambda^2 p)(L^1P + \lambda p)}$$

worin $L$ aus Formel (1) bestimmt wird.

Schreibt man für den ersten Factor der Wurzel

$$\left(L^1P + \lambda p \cdot \frac{\lambda}{L}\right) L$$

bemerkt, dafs $p$ gegen $P$ nur sehr klein ($p$ etwa $\frac{1}{368} P$) und $\lambda$ von $L$ nicht sehr unterschieden sein kann, so vereinfacht man die Formel, ohne einen bemerkbaren Fehler zu begehen, wenn man $\frac{\lambda}{L} = 1$ setzt, Alsdann hat man

$$C = \frac{s\sqrt{2g}}{\lambda p r}(L^1P + \lambda p)\sqrt{L}$$

Es kommt nun daranf an, unter welcher geographischen Breite mit dem b. P. Versuche gemacht werden, weil von derselben sowohl $L$ als $g$ abhängt. In Berlin z. B., als einem Ort von $52\frac{1}{2}°$ nördlicher Breite, ist die Länge des Secundenpendels = 994,2275 Millimeter = 456,15 preufs. Linien = $3\frac{1}{6}$ preufs. Fufs und $g = 15{,}625$ preufs. Fufs.

Läfst man nun das b. P. eine Minute lang schwingen, nennt die Anzahl der Schwingungen $n$, so ist

$$L = \frac{1}{n^2} 60^2 \cdot 3\frac{1}{6} = \frac{1}{n^2} 11400 \text{ pr. F.}$$

$\sqrt{2g} = 5{,}59$ preufs. Fufs.

Man hat also

$$C = 63726 \cdot \frac{s(L^1P + \lambda p)}{\lambda p r} \text{ preufs. Fufs.}$$

**Ballistisches Problem.** Die Aufgabe, die ballistische Curve zu finden, welche in dem Art. Ballistik No. 6 und 7 untersucht ist. Das Problem ist noch nicht vollständig gelöst.

**Barometer** (βαρος, die Schwere, μετρειν, messen). Dem Wort nach Schweremesser, in der That aber Luftschweremesser, oder vielmehr ein Instrument, welches die Spannung mifst, welche die atmosphärische Luft vermöge ihrer Elasticität in Folge der Belastung durch die darüber befindlichen Schichten erlangt, und die sich als Druck äufsert, der mit dem B. durch eine Flüssigkeitssäule gemessen wird.

Die oben verschlossene Röhre $A$ sei luftleer, sie werde mit dem unten offenen Ende in die in einem Gefäfs $B$ befindliche Flüssigkeit gesenkt, so übt die atmosphärische Luft einen Druck auf den Flüssig-

keitsspiegel, der sich bis auf die Mündung *a* des leeren Raumes fortsetzt, und da er dort keinen Widerstand findet, die Flüssigkeit in die Höhe, und zwar bis auf

Fig. 196.



eine Höhe *h* treibt, mit welcher die Flüssigkeit dem Luftdruck einen ihm gleichen Druck als Widerstand entgegensetzt.

Ist das Gewicht der in der Röhre befindlichen Flüssigkeit von der Höhe $h=p$, so ist also der Luftdruck auf den Querschnitt $a=p$ Pfund; wäre der Querschnitt $na$, so würde der Luftdruck auf diesen Querschnitt das *n*fache des ersten, also $np$ Pfund betragen, die Höhe *h* würde aber dieselbe bleiben, und da in einer eben und unten offenen, also mit Luft von derselben Druckkraft angefüllten Röhre die Flüssigkeit mit dem äufseren Spiegel im Niveau steht, so bleibt auch die Höhe *h* dieselbe, und unabhängig von der Eintauchungstiefe der Röhre.

Eine andere Flüssigkeit von doppeltem specifischem Gewicht, von welcher das Volumen *ah*, also $2p$ Pfund wiegt, würde, da der Luftdruck auf *a* nur *p* Pfund beträgt, nur $\frac{1}{2}h$ hoch in die Röhre gestiegen seia. Wenn Quecksilber 14mal schwerer als Wasser ist, und das Quecksilber steigt *h* Zoll, so würde das Wasser $14h$ Zoll hoch in der Röhre aufsteigen.

2. Eine mit Quecksilber gefüllte in dem verschlossenen Schenkel luftleere Röhre *A*, wie Fig. 196 od. 197 und von dem höheren Spiegel ab mit einer Scala versehen, ist das B., und das Steigen und Fallen der Flüssigkeit in dem Rohr giebt den gröfseren und geringeren Druck der atmosphärischen Luft in Zahlen an. Da der Luftdruck nicht unbedeutend ist, so nimmt man, um die B.röhre zur Handhabung möglichst kurz und bequem zu erhalten, als Maafs die möglich schwerste Flüssigkeit, also das Quecksilber, welches im Mittel 28 par. Zoll hoch in der B.röhre steht. Wasser würde eine Röhre von mehr als 33 F. Höhe erfordern, aufserdem bei hoher Temperatur verdunsten, und den oberen Theil der Röhre mit Dampf erfüllen, der einen Gegendruck ausübt, so dafs dann der Luftdruck zu gering angegeben wird. Man sagt: Das B. steige, es falle, es stehe hoch, niedrig, wenn dies mit der Quecksilbersäule in der Röhre stattfindet.

Fig. 197.



3. Stellt man ein B. in ein gläsernes Gefäfs, und verschliefst dieses hermetisch, so wird die ganze obere Atmosphäre von dem B. abgesperrt; das B. fällt aber nicht, wie man sieht. Das B. mifst also das Gewicht oder den Druck der Atmosphäre nicht, sondern die Druckwirkung, die Spannung der Luftschicht, in der es sich befindet. Da diese Spannung der Schicht aber von deren Belastung durch die über ihr befindliche Atmosphäre allein herrührt, so wird mit der Spannung der Schicht zugleich das Gewicht dieser Atmosphäre indirect gemessen.

Je tiefer eine Luftschicht liegt, desto höher ist die Atmosphäre darüber, desto mehr die Schicht belastet, desto dichter ist sie, desto gröfser ist ihre Spannung und der ihr gleiche Druckwiderstand; umgekehrt, je höher eine Luftschicht liegt, desto weniger ist sie belastet, desto weniger Dichtigkeit, Spannung und Druckwirkung hat sie, desto geringer ist also auch die ihr Gleichgewicht haltende Quecksilbersäule. Man sollte glauben, dafs dieselbe Luftschicht immer einerlei Spannung habe, da man doch annehmen mufs, dafs die um den Erdball befindliche Luftmenge constant ist, und wenngleich Wärme die Luft ausdehnt, die Luftsäule also erhöht, und Kälte sie vermindert, so bleibt deren Gewicht immer dasselbe, wie in einem hohen Glase eine mussirende Flüssigkeit mit dem Schaum zwar fällt und steigt, aber einerlei Gewicht behält.

4. Es sind die horizontalen Luftströmungen in den oberen Regionen vom Aequator nach den Polen hin, und in den unteren in entgegengesetzter Richtung, welche die senkrechten Druckwirkungen vermindern, wie z. B. am Aequator durch den schnellen Umschwung der

Erdoberfläche die senkrechte Richtung der Schwerkraft vermindert wird. Besonders die zufälligen Luftströmungen, die Winde, äufsern sich, wenn sie nahen, durch ihren horizontalen Druck gegen ruhende Luft auf die Verminderung deren Spannung, und somit fällt das B.

Dasselbe geschieht vor Eintritt von Regen, weil die herannahenden Regenwolken eben so eine Horizontalpressung gegen die ruhende Luftmasse veranlassen. Haben sich die benachbarten Luftmassen in's Gleichgewicht gesetzt, so hört die horizontale Druckwirkung auf; es kann also an dem Ort des B. noch regnen oder windig sein, das B. steigt und zeigt schön Wetter an.

Das B. ist somit ein ziemlich sicherer Wetteranzeiger, und unter dem Namen: Wetterglas bekannt; als solches ist es besonders dem Schiffer ein nützliches Instrument; denn ein plötzliches und bedeutendes Fallen des B. zeigt ziemlich sicher einen herannahenden Sturm an, nämlich eine bedeutende Luftmasse, die in Folge ihrer grofsen Geschwindigkeit einen sehr bedeutenden Seitendruck auf die noch über dem B. befindliche ruhende Luftsäule ausübt. Es sollen jedoch auch Erdbeben und und vulkanische Ausbrüche jederzeit mit einem plötzlichen Fallen des B. begleitet sein.

5. Der mittlere Druck der Atmosphäre am Meeresspiegel wurde 28 alte par. Zoll Quecksilber gesetzt, und nach de Luc war bei $12\frac{1}{4}$ Toisen = 78 alte par. Fufs Höhe über dem Meeresspiegel die B.höhe eine par. Linie geringer Die neueren Naturforscher geben den mittleren Druck am Meere = 0,76 Meter und der Fall der B.-höhe um 1 Millimeter in $11,5^m$ Höhe über dem Meere. Offenbar sind die ersteren Bestimmungen, nach ganzen Zahlen in ziemlich grofsen Maafseinheiten gegeben, nicht ganz genau, und die letzteren zuverlässiger, beide jedoch ziemlich übereinstimmend, denn

$0,76^m$ zu 443,296 par.‴ sind 28,0754″ = 28″ 0,905‴

altes par. Maafs.

Um den B.stand bei 78 par. Fufs Erhebung nach der neueren Bestimmung zu erfahren, hat man (vergl. Barometermessungen)

$1t,5^m = 5097,904''' = 35,4021$ par. F. bei $11,5^m$ Erhebung steht nun das B. $759^m$.

also bei

$n \times 11,5^m$ Erh. steht es $760 \cdot \left(\frac{759}{760}\right)^n$

Millimeter; daher bei

$$\frac{78}{35,4021} \cdot 11,5^m = 78' \text{ ist die B.höhe}$$

$$h = \left(\frac{759}{760}\right)^{\frac{78}{35,4021}} \times 760 \text{ Millim.}$$

Nun ist

| | | |
|---|---|---|
| $log \frac{759}{760}$ | = | $-0,0005718$ |
| $log$ 0,0005718 | = | 0,7572442 − 4 |
| $log$ 78 | = | 1,8920946 |
| Summa | = | 0,6493388 − 2 |
| $log$ 35,4021 | = | 1,5490290 |
| Differenz | = | 0,1003098 − 3 |
| $log$ Potenz | = | −0,0012598 |
| $log$ 760 | = | 2,8808136 |
| $log\ h$ | = | 2,8795538 |

woraus $h = 757,80^{mm}$
von 760,00
Fall der B.höhe = $2,2^{mm}$
$= 2,2 \times 0,443296$ par. ″
= 0,9753 par. Zoll, während de Luc 1 par. Zoll angiebt.

Das Gefäfsbarometer, Fig. 196, hat gegen das Flaschenb. den Vorzug, dafs der untere Quecksilberspiegel nicht sinkt und steigt, wenn er in der Röhre steigt und sinkt, allein es ist nicht transportabel, und die grofse Quecksilberfläche mufs gegen die chemische Einwirkung der Atmosphäre geschützt werden. Zu genauen Messungen, besonders von Höhen, ist seiner Einfachheit wegen das Heberbarometer am zweckmäfsigsten, es ist auch leicht zu transportiren und zu handhaben. Nothwendig ist bei demselben eine durchweg genau calibrirte Röhre; beide Schenkel haben an ihren äufseren Enden eine in pariser Zoll und Linien oder in Millimeter eingetheilte Scala, je nach der Bestimmung des B. Nebenstehend ist die Scala unten mit 0 bis 4″ 6‴, oben mit 22″ bis 26″ 6‴ bezeichnet. Die Summe der Theilzahlen am unteren und oberen Spiegel giebt die jedesmalige B.-höhe. Steht der untere Spiegel auf 4″ 6‴, so steht der obere auf 26″ 6‴, der B.stand ist 4″ 6‴ + 26″ 6‴ = 31″; die Höhe der Röhre zwischen diesen beiden Theilstrichen mufs also genau 31 par. Zoll sein. Der Normalstand ist 3″ + 25″ = 28″; steht der untere Spiegel auf 0, so steht der obere auf 26″ 6‴ − 4″ 6‴ = 22″ und dies ist der kleinste Luftdruck, der mit

Fig. 198.



diesem Instrument gemessen werden kann. Sollen kleine, dem Vacuum nahe Dichtigkeiten von Gasen gemessen werden, so muſs der offene Schenkel höher sein und über die halbe Höhe des verschlossenen reichen, und die Eintheilung so genommen werden, daſs im Vacuum beide Spiegel horizontal und auf 0 stehen würden. Für Höhenmessungen ist wegen der erforderlichen Wärme-Correction neben der B.röhre noch ein Thermometer angefügt. B. für die Marine sind gegen Schwankungen bei Stürmen zu schützen, daher hat die Röhre nur soweit die Scala reicht und am offenen Spiegel das Normalcaliber, der Zwischentheil besteht aus einer viel engeren Röhre, damit die Schwankungen des Schiffes der ganzen Quecksilbersäule so leicht nicht mitgetheilt werden können.

**Barometercorrection** ist erforderlich, theils der Ausdehnung wegen, welche das Quecksilber durch die Wärme erleidet, theils des Druckes und der Spannung wegen, welche bei der Luft und den Gasen durch den Einfluſs der Wärme sich ändern (s. aerodynamische Gesetze No. 6). Eingeschlossene Luft, wenn sie bei 0°C. die Spannung $p$ und den Barometerstand $b$ zeigt, hat bei $t$°C. die Spannung $(1 + 0{,}00366..t)p$ und den Barometerstand $(1 + 0{,}00366 \cdot t)b$.

Beziehen sich $p'$, $b'$ und $t'$ auf eine andere eingeschlossene Luft, und setzt man den Coefficient 0,00366 mit $a$, so hat man zuerst

$$b : b' = p : p'$$

bei einerlei Temperatur.

Ist nun $B$ der beobachtete Barometerstand eines Gases bei $t$°C. Temp., dessen Barometerstand bei 0°C. $= b$ ist, so erhält man

$$b = \frac{B}{1 + at}$$

Sind $B$ und $B'$ die gemessenen Barometerstände zweier Gase bei den Temp. $t$ und $t'$ und $b$, $b'$ die derselben bei 0°C., so erhält man

$$b : b' = \frac{B}{1 + at} : \frac{B'}{1 + at'}$$

Setzt man die Spannung $P$ der Luft bei 28 par. Zoll Barometerhöhe und 0°C. $= 1$, so erhält man die Spannung der eingeschlossenen Luft bei der Barometerhöhe $= B$ und $t$°C :

$$p = \frac{B}{28(1 + at)}$$

Bei der Atmosphäre sind die Gesetze anders, weil die Luft nach oben sich ausdehnen, sich erheben kann. Nach den Erfahrungen von de Luc steigt das B., welches bei 0° R. 27 par. Zoll hoch steht, bei Erhöhung der Lufttemperatur auf 80° R. um 6 Linien, es steht dann 27½''. Bei $n$° R. ist die Erhöhung $\frac{n}{80} \cdot 6''' = \frac{n}{160}$ Zoll. Steht nun ein B. auf $b''$ bei $t$° R. Temp., so hat man die Barometerhöhe $B$ derselben Luft bei 0° R. aus der Proportion

$$27 + \frac{t}{160} : 27 = b : B$$

woraus

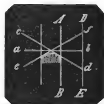
$$B = \frac{27 \cdot b}{27 + \frac{t}{160}} = \frac{4320\,b}{4320 + t}\ \text{Zoll}$$

Für $t$° unter 0 wird $B = \frac{27 \cdot b}{27 - \frac{t}{160}}$ $= \frac{4320 \cdot b}{4320 - t}$ Zoll. Z. B. die Luft, welche bei 18° R. einen Barometerstand $= 28''\ 5'''$ zeigt, würde bei 0° R. Temperatur $= \frac{4320 \cdot (28\frac{5}{12})}{4320 + 18}$ Zoll $= 28''\ 3{,}585'''$ haben.

In der de Luc'schen Regel sind die Correctionen für die Ausdehnung des Quecksilbers mitbegriffen (vgl. Barometermessungen).

**Barometerhöhe, Barometerstand** ist der lothrechte Abstand beider Quecksilberspiegel des Barometers (s. Barometer). Die Ablesung dieser B. muſs so geschehen, daſs das Auge mit dem Quecksilberspiegel horizontal sich befindet wie in der Linie $ab$; denn eine Richtung des Auges wie $cd$ würde an der auf der Vorderfläche $AB$ der Tafel verzeichneten Scala die Höhe zu klein und eine Richtung $ef$ zu groſs ablesen

Fig. 199.

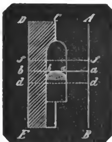



Die richtige Ablesung der B. wird noch durch die Convexität des Quecksilberspiegels erschwert, eine Selbstbildung, die daher kommt, daſs das Quecksilber mit dem Glase nicht adhärirt, und daher allein seinem Cohäsionsbestreben überlassen ist.

Eine sehr zweckmäſsige Einrichtung ist die, daſs man die Barometertafel $AB\ DE$

aus starkem Spiegelglase bestehen läfst, und dieses zur Hälfte *CE* hinten mit Folie belegt. Die auf der Vorderfläche *ABC*

Fig. 200.




eingeätzten Theilstriche spiegeln sich nun auf der Hinterfläche ab. Bei richtiger Ablesung decken sich beide Theilstriche *aa*, *bb* und die Pupille des Auges wird in derselben Linie *bb* abgespiegelt.

**Barometermessungen.** Die Messungen oder Ermittelungen senkrechter Höhen-Abstände durch das Barometer, indem man aus einer beobachteten Barometerhöhe berechnen kann, wie hoch man sich mit dem Barometer über dem Meeresspiegel befindet, indem der aus dem Gewicht der Luft hervorgehende Druck der Atmosphäre auf einen darunter befindlichen Gegenstand um so geringer sein mufs, je weniger hoch die Luftsäule darüber, und um so gröfser, je höher die darüber befindliche Luftsäule noch ist. Ein Barometer fällt also mit der Höhe seines Orts, und steigt mit der Tiefe seines Orts, und die Dichtigkeit, das Gewicht und die Spannung einer Luftschicht werden immer geringer, je höher sie sich in der Atmosphäre befindet.

Man denke sich einen von Seitenwänden eingeschlossenen Raum von der Erdoberfläche bis an die Grenze der Atmosphäre in die Höhe geführt, theile die darin befindliche Luftsäule in lauter gleich hohe Schichten, die aber so niedrig sind, dafs jede Schicht oben und unten von einerlei Dichtigkeit anzunehmen ist.

Die Dichtigkeiten der Schichten von der untersten ab seien $d$; $d_1$; $d_2$; ..... $d_n$. Diese Dichtigkeiten verhalten sich aber nach dem Mariotte'schen Gesetz wie die auf die Schichten wirkenden Druckkräfte und diese mifst das B. mit seinen B.höhen

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots\ldots b_{n+1}$$

wenn das hier nicht vorkommende $b$ die B.höhe in der ersten Schicht von der Dichtigkeit $d$; $b_1$ die Barometerhöhe in der zweiten Schicht von der Dichtigkeit $d_1$ u. s. w.; $b_n$ die B.höhe der $(n+1)$ten Schicht von der Dichtigkeit $d_n$ u. $b_{n+1}$ die B.höhe in der unmittelbar darüber liegenden Luftschicht ist.

Die Höhe $b$ zeigt zugleich das Gewicht der ganzen Atmosphäre, die Höhe $b_1$ dasselbe Gewicht weniger dem Gewicht der ersten Schicht und zugleich den Druck auf dieselbe; die Höhe $b_2$ das Gewicht der Atmosphäre weniger dem Gewicht der beiden untersten Schichten und zugleich den Druck auf die zweite Schicht u. s. w., also die Quecksilbersäule $b_n$ im B. ist das Gewicht der Atmosphäre weniger dem Gewicht aller darunter befindlichen $n$ ersten Schichten, und zugleich der Druck auf die $n$te Schicht.

Man hat demnach nach dem Mariotte'schen Gesetz:

$$b_1 : b_2 : b_3 : \ldots b_n = d : d_1 : d_2 : \ldots d_{n-1} \quad (1)$$

Die absoluten Gewichte der einzelnen Schichten werden aber ebenfalls durch die B.höhen ausgedrückt, denn es ist

$b$ das Gew. aller $(n+1)$ Schichten
$b_1$ „ „ „ oberen $n$ „
$b_2$ „ „ „ $(n-1)$ „
. . . . . . . . . . . . . . .
$b_n$ „ „ „ $(n+1-n)$ = der 1. Schicht

Folglich ist

$b-b_1$ das Gew. der 1sten Schicht v. unten
$b_1-b_2$ „ „ „ 2ten „ „ „
$b_n-b_{n+1}$ „ „ $(n+1)$ten „ „ „

Bei gleichem Volumen verhalten sich aber die Gewichte wie die Dichtigkeiten, daher

$$b-b_1 : b_1-b_2 : \ldots b_n-b_{n-1} = d : d_1 : \ldots d_n \quad (2)$$

Mithin hat man aus 1 und 2

$$b-b_1 : b_1-b_2 : \ldots b_n-b_{n-1} = b_1 : b_2 : \ldots b_n$$

Wie man nun durch Addition aus

$$b-b_1 : b_1-b_2 = b_1 : b_2$$

erhält $b : b_1 = b_1 : b_2$

so erhält man aus den folgenden Gliedern und überhaupt

$$b : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \ldots\ldots b_{n-1} : b_n$$

Es ist also jeder B.stand die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden in gleichen senkrechten Abständen stattfindenden benachbarten B.ständen und

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

d. h. die Quotienten zweier in gleichen senkrechten Abständen gemessenen B.höhen sind einander gleich, also constant $= m$.

Es ist also

$$b_1 = mb$$
$$b_2 = mb_1 = m^2 b$$
$$b_3 = mb_2 = m^3 b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = mb_{n-1} = m^n b$$

2. Nach de Luc (s. Barometer No. 5) fällt das Barometer in 78 par. Fufs Höhe über dem Meeresspiegel um 1 par. Linie; nun ist der normale Barometerstand am Meeresspiegel = 28" = 336'''
bei 78 Fufs Höhe ist der B.stand = 335'''
Nach dem Obigen ist $b_1 = mb$
also $335''' = m \cdot 336'''$
folglich nach de Luc $m = \frac{335}{336}$

In $n \times 78$ Fufs Höhe über dem Meeresspiegel steht das Barometer auf

$$\left(\frac{335}{336}\right)^n \cdot 336 \text{ Linien.}$$

Ferner fällt nach der neueren Annahme das Barometer in den ersten $11{,}5^m$ Höhe über dem Meeresspiegel um $1^{mm}$. Beim unteren Normalstande von $760^{mm}$ also auf $759^{mm}$
d. h. $b = 760$

$$b_1 = 759 = m \cdot b = \frac{759}{760} b$$

In $n \times 11{,}5$ Meter Höhe über dem Meeresspiegel steht also das Barometer auf

$$\left(\frac{759}{760}\right)^n \cdot 760 \text{ Millim.}$$

Hat mithin in irgend einem Ort das Barometer die Höhe $b_1$, so findet man dessen Höhe $H$ über dem Meeresspiegel aus der Gleichung

$$b_1 = m^x b$$

wo $x$ der Coefficient ist, mit dem entweder 78 par. Fufs, oder $11{,}5^m$ zu multipliciren ist, um die Höhe $H$ zu finden. Man erhält

$$x = \frac{\log b_1 - \log b}{\log m}$$

oder vielmehr, da $m$ ein ächter Bruch, also $\log m$ negativ ist

$$x = \frac{\log b - \log b_1}{-\log m}$$

3. Nach de Luc ist nun

$$x = \frac{\log 336 - \log b_1}{-\log\left(\frac{335}{336}\right)} = \frac{\log 336 - \log b_1}{\log 336 - \log 335}$$

und $H = x \cdot 78$ par. Fufs.
Es ist

$$\log 336 = 2{,}5263393$$
$$\log 335 = 2{,}5250448$$
$$-\log m = 0{,}0012945$$

daher $\frac{1}{-\log m} = 772{,}5$

demnach

$$H = 772{,}5 \times 78\,(2{,}5263393 - \log b_1''')$$
$$= 60255\,(2{,}5263393 - \log b_1''')$$

in par. Fufs.

In Toisen wäre der Coefficient = 10042 und de Luc giebt ihn in runder Zahl 10000 an.

Die Formel gilt für eine mittlere Temperatur von $16\frac{3}{4}°$ Réaum. Für jeden Grad R. über oder unter $16\frac{3}{4}°$ soll man $H$ um $\frac{1}{215}$ erhöhen oder vermindern, also bei $\pm t°$ (von $16\frac{3}{4}°$ ab gezählt) ist

$$H = \left(1 \pm \frac{t}{215}\right) 10000 (\log b - \log b_1) \text{ Toisen.}$$

4. Nach der zweiten Bestimmung ist

$$x = \frac{\log 760 - \log b_1}{\log 760 - \log 759}$$

und

$$H = x \cdot 11{,}5 \text{ Meter.}$$

Es ist

$$\log 760 = 2{,}8808136$$
$$\log 759 = 2{,}8802418$$
$$\log m = 0{,}0005718$$

daher $\frac{1}{-\log m} = 1748{,}75$

demnach

$$H = 1748{,}75 \cdot 11{,}5\,(2{,}8808136 - \log b_1{}^{mm})$$
$$= 20110\,(2{,}8808136 - \log b_1{}^{mm})$$

in Metern.

Dieser Coefficient stimmt weniger genau mit der Erfahrungsangabe Ramond's und Laplace's, nämlich 18393 Meter, wonach denn nicht bei $11{,}5^m$ Höhe, sondern schon bei $10{,}5^m$ Höhe das Barometer um 1 Millimeter fällt.

Die Formel nach Ramond und Laplace

$$H = 18336\,(\log b - \log b_1) \text{ Meter.}$$

gilt für 0° R.

5. Nach Laplace beträgt die Ausdehnung der atmosphärischen Luft für jeden Grad Réaumur $\frac{1}{213}$. Ist nun die Temperatur an dem Ort für $b = t$, und an dem Ort für $b_1 = t_1$, so ist

$$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right)(\log b - \log b_1)$$

Da nun das Quecksilber für jeden Gr. R. um $\frac{1}{4440}$ sich ausdehnt, die B.höhe also für jeden Grad R über 0 um so viel zu grofs angegeben wird, so hat man bei Berücksichtigung auch dieser Correctur

$$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right)\log \frac{b\left(1 - \frac{t}{4440}\right)}{b_1\left(1 - \frac{t_1}{4440}\right)}$$

oder

6. $$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right)\log \frac{(4440 - t)b}{(4440 - t_1)b_1}$$

Um die Höhe über dem Meeresspiegel in preufs. Fufs zu finden, bei welcher das B. um 1 par. Linie fällt, hat man

1 Millimeter = 0,4433 par. Linien
1 par. Linie = 2,2558 Millimeter

Folglich der Stand des B., für welchen die Höhe zu finden ist

= 760 − 2,2558 = 757,7442 Millm.

Nun ist nach No. 2

$$760 \cdot \left(\frac{759}{760}\right)^n = 757{,}7442 \text{ Millim.}$$

woraus

$$n = \frac{\log 760 - \log 757{,}7442}{\log 760 - \log 759} = 2{,}2578$$

und die Höhe selbst $2{,}2578 \times 10{,}5^m = 23{,}7069^m = 3{,}18699 \times 23{,}7069 = 75{,}53$ pr. Fufs; und zwar nach Laplace und Ramond bei 0° Réaumur.

7. Nach de Luc war bei $16\frac{3}{4}$° R. die Höhe für den Fall von 1 par. Linie = 78 par. Fufs; nimmt man mit Laplace für 1°R. eine Höhenzunahme von $\frac{1}{704}$, so ist die Höhe für 1 par. Linie Barometerfall bei $16\frac{3}{4}$°R. $= 75{,}53\left(1+\frac{16\frac{3}{4}}{200}\right) = 81{,}8$ preufs. Fufs

Nimmt man mit de Luc die Zunahme $\frac{1}{213}$, so erhält man $75{,}53\left(1+\frac{16\frac{3}{4}}{215}\right) = 81{,}4$ pr. Fufs, welches 78,647 par. Fufs beträgt, und also mit de Luc's Angabe sehr genau stimmt.

Die ad 2 gemachte Angabe, dafs bei 11,5 Meter Höhe das B. um $1^{mm}$ falle, bezieht sich gewifs auch auf eine höhere Temperatur. Nach Laplace's Angaben ist bei 0°R. die anzunehmende Höhe = 10,5 Meter; um die Temp. für $11{,}5^m$ Höhe zu erfahren, hat man

$$10{,}5\left(1 + \frac{t}{200}\right) = 11{,}5$$

woraus $t = 19$° R.

8. Nach No. 6 und 7 hat man den barometrischen Coefficienten für preufsische Fufs, wenn das Barometer in pariser Zoll und Linien eingetheilt ist, (nach No. 3) $= 772{,}5 \times 75{,}53 = 58347$.

Und es ist für einen B.stand = $b$ par. Linien die Höhe über dem Meeresspiegel bei 0° R. Temperatur

$$H = 58347 \,(\log 336 - \log b)$$

Bei der Temperatur $\pm t$° R. während des Standes $b$

$$H = 58347\left(1 + \frac{t}{200}\right)\left[\log 336 - \log\left(b \mp \frac{t}{4440}\right)\right]$$

Hat eine andere Höhe $H^1$ den B.stand $b^1$, so ist bei 0° Temp.

$$H - H' = 58347 \,(\log b' - \log b)$$

Ist die Temp. während $b = t$; während $b' = t'$ so ist

$$H - H' = 58347\left[\frac{t-t'}{200}\log 336 + \left(1 + \frac{t'}{200}\right)\log\left(b' \mp \frac{t'}{4440}\right) - \left(1+\frac{t}{200}\right)\log\left(b \mp \frac{t}{4440}\right)\right]$$

**Barometerstand** s. v. w. Barometerhöhe.

**Barometrischer Coefficient** für Höhenmessungen ist der Coefficient, mit welchem die von den beobachteten Barometerhöhen und Lufttemperaturen abhängige Gröfse zu multipliciren ist, womit dann der Höhenunterschied eines Orts von einem anderen gefunden ist. Dieser C. ist verschieden je nach dem Maafse, in welchem der Höhenunterschied angegeben wird (als: Toise, pariser Fufs, Klafter), und je nach den verschiedenen Eintheilungen der B.-scala (s. Barometermessungen).

**Baroskop** s. v. w. Barometer.

**Basis, Grundlage.** Eine Lage, auf der etwas gegründet wird oder ist, oder gegründet zu denken ist; ein der Praxis des Bauens entnommener Begriff. Ein Bauwerk ist stabil, und so mufs auch bildlich das mit einer B. Zusammenhangende als ein auf derselben gegründetes stabiles Bauwerk betrachtet werden können. So ist z. B. die B. eines Krystalls die Ebene, welche die Hauptaxe stabil zu machen scheint. In jedem Dreieck von zwei gleichen Seiten trägt die dritte als B. (Grundlinie) die beiden gleichen Schenkel; dgl. beim Kegel, der Pyramide, wo die B. eine Ebene, die Grundebene ist.

Jedem System, als einer geordneten Aneinanderreihung zusammengehöriger Dinge, ist eine B. erforderlich, wie z. B. einem Logarithmensystem, von der aus die geordnete Aufbauung des Zusammengehörigen beginnt. Jede Wissenschaft also bedarf einer B., und ohne diese wäre sie nicht da: z. B. die B. der Arithmetik ist die Einheit, die der Geometrie die Ausdehnung.

Basis ist nicht zu verwechseln mit Princip, welches dem Beweglichen angehört, und dessen Grundweise oder Grundursach (Kraft) ist, als das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Die B. des Sonnensystems ist die Sonne, indem diese alle Planeten zu einem stabilen Ganzen trägt und vereinigt; das Princip desselben ist die Attraction. Basis verhält sich zu Princip wie Sein zu Werden.

**Basis, geometrische,** ist eine gerade Linie oder eine Ebene, je nachdem das auf derselben gegründet zu Denkende eine Ebene oder ein Körper ist; wiewohl man von einem auf einer horizontalen Ebene errichtetes Loth aufser der Ebene selbst auch den untersten mit der Ebene zusammenfallenden Punkt des Loths als dessen B. betrachten kann.

Jedes Dreieck hat zur Basis eine seiner 3 Seiten, weil das Dreieck auf jeder derselben als gegründet angesehen werden kann, desgl. bei einem Quadrat, einem Rectangel. Bei einem Trapez kann die längere der parallelen Seiten als B. betrachtet werden, bei einem stumpfwinkligen Dreieck die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite, sofern man auf die scheinbare Stabilität der Figur rücksichtigt. Bei den zuletzt genannten, so wie allen übrigen Figuren ist der Name B. nicht gebräuchlich, sondern nur bei dem gleichschenkligen Dreieck, wo die dritte Seite die B. (Grundlinie) genannt wird. Bei der Pyramide, dem Kegel, heifst die der Spitze gegenüber liegende Ebene die B. (Grundebene, Grundkreis), bei der abgekürzten Pyramide, dem abgekürzten Kegel ist die gröfsere der beiden Endflächen die B., beim Prisma, dem Cylinder kann jede der beiden Endflächen als B. (Grundebene) betrachtet werden.

Mit solch einer geometrischen B. ist jederzeit der Begriff einer Axe verbunden, einer geraden Linie, welche von der Mitte der B. ausgehend, die Fläche oder den Körper so durchschneidet, dafs von allen Seiten derselben Symmetrie stattfindet. Bei dem gleichschenkligen Dreieck ist diese Axe die gerade Linie von der Spitze des Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie, welche aber nicht Axe, sondern Höhe genannt wird. Ebenso die gerade Verbindungslinie der Mitten zweier parallelen Seiten des Quadrats, des Rectangels und des Trapezes. Diese Linien werden aber erst dann Axen genannt, wenn man die Figur um dieselben sich drehend sich denkt, so dafs Umdrehungskörper entstehen. Die gerade Verbindungslinie zwischen der Spitze und dem Mittel der B. bei Kegeln und Pyramiden heifst Axe, desgl. die gerade Verbindungslinie zwischen den Mitten der Endebenen von Prismen und Cylindern.

Krumme Linien von symmetrischer Anordnung, als Ellipse, Parabel, Hyperbel, haben keine B., wohl aber Axen. Denkt man sich die krumme Linie um die Axe sich herumgedreht, so dafs ein Umdrehungskörper entsteht, also eine Kugel, ein Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid, so kann jede normal auf die Axe genommene Ebene als B. des Körper-Abschnittes betrachtet werden.

Diejenigen Körper, bei welchen die Basen aus den Axen entspringen, sind ganz besonders die Krystalle, oder vielmehr die Grundformen der Krystallsysteme, welche ursprünglich nach den Axen eingetheilt worden, aber auch basische Systeme genannt werden (s. den folgenden Art.)

**Basis, Grundebene der Krystalle**; ist in jedem Krystall, hauptsächlich in jeder Grundform eines Krystallisationssystems die Ebene, welche die Hauptaxe hälftet, und in der zugleich dessen Nebenaxen liegen, so dafs um die Basis alle Ecken, Kanten und Flächen des Krystalls eben so symmetrisch gruppirt sind, wie um dessen Axen (s. Axen und Axensystem der Krystalle). Diese Eigenschaft der Basen ist denn auch die Ursache, dafs es nicht nur Axensysteme, sondern auch basische Krystallisationssysteme geben kann und giebt. Durch die recht- oder schiefwinklige Lage der Basis gegen die Normalaxe entstehen zwei Hauptabtheilungen der Krystallisationssysteme, die orthobasischen und die klinobasischen Systeme oder die Systeme mit horizontaler und die mit schiefliegender Basis.

**Basis, Grundzahl eines Logarithmensystems** ist diejenige Zahl im System, deren Logarithmus = 1 ist.

Hat die Zahl $a$ den Log. = 1, so hat $a^2$ den Log. 2, $a^n$ den Log. $n$, wo $n$ jede beliebige ganze, gebrochene, positive und negative Zahl sein kann, und das Logarithmensystem ist das, dessen Basis = $a$ ist. Ist der Log. in diesem System = 0, ist also $n = 0$, so ist die zugehörige Zahl $= a^0 = 1$, d. h. in jedem Logarithmensystem ist der Log. von 1 = 0.

Für die Praxis im Zahlenrechnen interessirt uns nur ein Logarithmensystem, nämlich das dekadische, von dem ersten Berechner der Logarithmen gewöhnlich Brigg'sches System genannt; dessen Basis ist = 10. Stellt man die Zahlen zusammen, deren auf einander folgende Logarithmen die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, so erhält man

Log. = 1. 2. 3. 4. . . .
Zahl = 10. 100. 1000. 10000 . . . . .

und nach links fortgesetzt

$$\text{Log.} = -3. \quad -2. \quad -1. \quad 0 \quad 1$$

$$\text{Zahl} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 10$$

Es genügt aber nicht die Kenntnifs der Logarithmen dieser Potenzen von 10, man mufs auch die der ganzen Zwischenzahlen wissen, man hat demnach in der ersten geometrischen Reihe zwischen 1 und 10 noch 8 Zahlen, zwischen 10 und 100 noch 89 Zahlen u. s. w. einzuschalten.

0 1
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

Nun giebt es aber keine ganze Zahl

zwischen 1 und 10, die gleich wäre einer bestimmten Potenz von 10, folglich müssen die Logarithmen aller eingeschalteten Zahlen Irrationalzahlen sein.

Ferner ist die ursprüngliche Reihe der Zahlen eine geometrische, die dareingeschalteten Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, mithin sind durch solches arithmetisches Interpoliren die Logarithmen nicht zu finden.

Soviel aber steht fest, dafs da $y = 10^x$ ist, wenn $x$ den Logarithmus einer Zahl $y$ bedeutet, jeder Logarithmus $x$ von 2 Zahlen abhangen mufs, von einer veränderlichen, nämlich der Potenz $y$ von der Wurzel = 10 deren Exponent = dem Logarithmus $x$ ist, und von einer unveränderlichen, die mit der constanten Basis 10 als Wurzel Zusammenhang hat. Diese constante Zahl wird der Modul des Logarithmensystems genannt, und dasjenige System, dessen Modul = 1 ist, und das in der höheren Analysis durchweg seine Anwendung findet, heifst das natürliche Logarithmensystem, woher jedes andere, und da es nur noch das Brigg'sche giebt, also dieses System dem natürlichen als Gegensatz künstliches Logarithmensystem genannt wird.

Um die Sache hier gleich zu erläutern, sei allgemein $b$ die Basis, die ganze Zahl, deren Logarithmus $x$ gefunden werden soll $= a$, so ist

$$b^x = a \text{ und daher } b^{nx} = a^n$$

wo $n$ eine jede beliebige Zahl sein kann.

Setzt man nun um den binomischen Satz anwenden zu können:

$$b^n = 1 + z; \; a^n = 1 + y$$

also $(1+z)^x = 1 + y$

und bezeichnet die Binomialcoefficienten $x$ mit $x_1$

$\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$ mit $x_2$; .... $\frac{x(x-1) \ldots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ mit $x_n$

so erhält man

$$1 + y = 1 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \ldots x_n z^n$$

auf beiden Seiten 1 subtrahirt und mit $z$ dividirt

$$\frac{y}{z} = \frac{a^n - 1}{b^n - 1} = x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots x_n z^{n-1}$$

Setzt man nun wieder, um auch die linke Seite der Gleichung in ein Binom auflösen zu können

$$a = 1 + v \text{ und } b = 1 + w, \text{ so ist}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{(1+v)^n - 1}{(1+w)^n - 1} = \frac{n_1 v + n_2 v^2 + n_3 v^3 + \ldots n_m v^m}{n_1 w + n_2 w^2 + n_3 w^3 + \ldots n_m w^m}$$

und für $v$ den Werth $a - 1$, für $w$ den Werth $b - 1$ gesetzt:

$$\frac{n_1(a-1) + n_2(a-1)^2 + n_3(a-1)^3 + \ldots}{n_1(b-1) + n_2(b-1)^2 + n_3(b-1)^3 + \ldots} = x + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots$$

Die linke Seite, Zähler und Nenner durch $n_1 = n$ dividirt, giebt

$$\frac{(a-1) + \frac{n-1}{2}(a-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}(a-1)^3 + \ldots}{(b-1) + \frac{n-1}{2}(b-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}(b-1)^3 + \ldots} = x + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots$$

Nun ist $n$ nach der Annahme eine ganz beliebige Zahl, setzt man diese = 0, so ist, weil $b^n = 1 + z$, und $b^0 = 1$ ist, auch $z = 0$, und es entsteht aus der letzten Gl.:

$$\frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \ldots} = x = \log a$$

Der Zähler enthält also die Function des Arguments, der Urveränderlichen, der Nenner die der Basis $b$, und diese Constante, nämlich

$$\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 + \ldots} = M$$

ist der Modul.

Für $b = 10$ ist diese Constante der Modul des Brigg'schen Systems:

$$M = \frac{1}{9 - \frac{1}{2}9^2 + \frac{1}{3}9^3 - \frac{1}{4}9^4 \ldots \pm \frac{1}{n}9^n}$$

nämlich

$M = 0{,}43429 \; 44819 \; 03251 \; 82765 \; 11289$
$18916 \; 60508 \; 22943 \; 97005 \; 804\ldots$

Nun ist es leicht, die Basis $e$ der natürlichen Logarithmen zu finden, denn für $b$ die Basis ($e$) der natürlichen Logarithmen gesetzt, wird $M = 1$

und für jedes System einer Basis $b$ ist

$$\log a = M[(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots]$$

Setzt man nun $a = e$, so ist

$$\log br\, e = M[(e-1) - \tfrac{1}{2}(e-1)^2 + \tfrac{1}{3}(e-1)^3 - \ldots]$$
$$\log nat\, e = 1 = [(e-1) - \tfrac{1}{2}(e-1)^2 + \tfrac{1}{3}(e-1)^3 - \ldots]$$

hieraus

$$\log br\, e = M = 0{,}43429\ldots$$

woraus

$e = 2{,}71828 \; 18284 \; 59045 \; 23536$
$02874 \; 71352 \; 66249 \; 77572$
$4709\ldots$

Mithin ist der Modul des Brigg'schen Systems gleich dem Brigg'schen Loga-

rithmus der Basis der natürlichen Logarithmen.

Setzt man in den beiden letzten Gleichungen $b$(= 10 = der Basis des Brigg'schen Systems) statt $e$, so erhält man

$$log\ br\ b = 1 = M[(b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \tfrac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots]$$
$$log\ nat\ b = (b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \tfrac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots$$

woraus

$$log\ nat\ b = \frac{1}{M}$$

d. h. der natürliche Logarithmus der Basis eines anderen Systems ist = 1 dividirt durch den Modul desselben Systems.

Man findet

$$log\ nat\ 10 = \frac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30258\ \ 50929$$
94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 629....

**Basis des Prisma** (Optik). Eine der brechenden Kante gegenüber liegende Ebene. Pag. 24, Fig. 28 ist in dem Prisma *ABC*, *A* die brechende Kante, daher *BC* die B. des P. Wenn solche B. nicht vorhanden ist, so vertritt jede andere beliebige, der brechenden Kante gegenüber liegende Ebene dieselbe. In Fig. 10, pag. 7 hat das Prisma keine B., es kann aber *ab* oder *af* oder jede beliebige andere, der Kante *c* gegenüber liegende Ebene die B. des P. genannt werden.

**Baumé'sches Aräometer** (s. Aräometer, wo ich am Schluſs des Scalen-A. versprochen, hier Nachricht zu geben). Es giebt zwei B. A., eins für leichtere, eins für schwerere Flüssigkeiten als Wasser. Die Theile heiſsen Grade, sind alle gleich groſs; das A. hat also den Nachtheil, daſs die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten nicht unmittelbar gemessen werden können, (s. d. Art. Aräometer, No. 5, Pag. 87) sondern berechnet werden müssen, woher mehrere Physiker Tabellen dafür geliefert haben, die überdies noch von einander abweichen, weil die Fundamentalabstände nicht einmal sicher fest stehen; nämlich das spec. Gewicht des Wassers und einer Lösung von 1 Theil trockenem(?) Kochsalz in 9 Theilen Wasser; der Abstand im A. ist in 10 gleiche Theile getheilt, die Einsenkungstiefe in der Lösung mit 0, die im Wasser mit 10 bezeichnet, und für leichtere Flüssigkeiten als Wasser die gleiche Theilung nach oben bis 62 fortgesetzt.

Wie unsicher dies A. ist, beweist, daſs in Scholz's Lehrbuch der Physik das spec. Gew. bei 62° = 0,7251; nach Schober und Pecher = 0,7362 beträgt, also in einer Differenz von 0,0111 angegeben wird.

Für schwerere Flüssigkeiten als Wasser wird die oberste Einsenkungstiefe in Wasser mit 0 bezeichnet, die Tiefe in der obigen Mischung nach Anderen in einer Lösung von 15 Theilen trockenem(?) Kochsalz in 85 Theilen Wasser mit 10 bezeichnet, und diese Theilung nach unten bis 75 festgesetzt. In Scholz's Physik wird das spec. Gew. für 75 Grad = 2,0610; nach Schober und Pecher = 2,0693; also in einer Differenz von 0,0083 angegeben.

2. Es läſst sich also nicht feststellen, ob die eine oder die andere Reductionstabelle die richtige, wohl aber läſst sich prüfen, ob beide richtig sein können, und dieser Prüfstein ist für Flüssigkeiten leichter als Wasser (pag. 96, A. No. 10).

Die Formel

$$l' = \frac{2880}{17}\left(\frac{1{,}025}{p} - 1\right)$$

wo $l'$ die Einsenkungstiefe in Linien und $p$ das spec. Gew. der Flüssigkeit bezeichnet.

Da in den Tabellen die Grade in gleichen Abständen von einander sich befinden, so müssen die dort aufgeführten specifischen Gewichte $p$ nach einander Einsenkungstiefen $l'$ liefern, die gleiche Abstände von einander haben.

1) Scholz's Physik, S. 743 und Schubarth's Tabellen für den Unterricht in der Physik, pag 19, geben eine Tabelle für leichtere Flüssigkeiten als Wasser, in welcher die Baumé'schen A.-Grade auf specifische Gewichte reducirt sind, und von der ich die ersten 7 und die letzten 5 Grade hier in den ersten beiden Columnen abschreibe. Die dritte Columne giebt die aus den nebenstehenden specifischen Gewichten nach obiger Formel von mir berechneten Einsenkungstiefen, und die letzte Columne enthält deren Abstände von einander, welche gleich groſs werden müssen, wenn die 2. Columne richtig ist.

| Grad Baumé | spec. Gew. $= p$ | Einsenkungstiefe $l'$ in Lin. | Differenz |
|---|---|---|---|
| 10 | 1,0000 | 4,2353 | |
| 11 | 0,9930 | 5,4595 | 1,2242 |
| 12 | 0,9861 | 6,6830 | 1,2235 |
| 13 | 0,9792 | 7,9234 | 1,2304 |
| 14 | 0,9724 | 9,1635 | 1,2401 |
| 15 | 0,9657 | 10,4029 | 1,2394 |
| 16 | 0,9591 | 11,6403 | 1,2374 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 58 | 0,7435 | 64,1418 | |
| 59 | 0,7394 | 65,4368 | 1,2950 |
| 60 | 0,7354 | 66,7142 | 1,2774 |
| 61 | 0,7314 | 68,0056 | 1,2914 |
| 62 | 0,7251 | 70,0684 | 2,0628 |

Die Differenzen sind nicht gleich grofs, und in dem Verhältnifs der Verschiedenheit ist die Reductionstabelle in der Columne 2 unrichtig.

2) Nach Schober und Pecher (Schubarth's technische Chemie 1851, pag. 471) ist die Reductionstabelle in den 2 ersten Columnen für die ersten 5 und die letzten 5 Grade folgende, die Einsenkungstiefen, Columne 3, sind nach obiger Formel berechnet.

| Grad Baumé | spec. Gew. $= p$ | Einsenkungstiefe $l'$ in Lin. | Differenz |
|---|---|---|---|
| 10 | 1,0000 | 4,2353 | |
| 11 | 0,9931 | 5,4418 | 1,2065 |
| 12 | 0,9864 | 6,6295 | 1,1877 |
| 13 | 0,9787 | 8,0145 | 1,3850 |
| 14 | 0,9731 | 9,0356 | 1,0211 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 58 | 0,7515 | 61,6555 | |
| 59 | 0,7476 | 62,8609 | 1,2054 |
| 60 | 0,7438 | 64,0476 | 1,1867 |
| 61 | 0,7400 | 65,2464 | 1,1988 |
| 62 | 0,7362 | 66,4576 | 1,2112 |

Also auch diese Tabelle ist, wie aus der 4ten Columne erhellt, nicht richtig.

3. Um die Tabellen für Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, zu prüfen, sind 3 meiner Formeln anzuwenden nöthig, nämlich:

Von 1° bis 48° B. die Formel (A. No. 9)

$$l' = 240\left(\frac{1,5}{p} - 1\right)$$

von 47° bis 73° B. die Formel (A. No. 8)

$$l' = \frac{3540}{11}\left(\frac{2,025}{p} - 1\right)$$

und von 73° bis 75° B. die Formel (A. No. 7)

$$l' = \frac{9600}{23}\left(\frac{2,575}{p} - 1\right)$$

oder ich müfste zur Prüfung der ganzen Tabelle durch eine einzige Formel ein besonderes Normal-A. aus den Formeln 1 bis 7, pag. 93, erst construiren.

Es genüge die Prüfung der ersten 48 Grade durch die Formel

$$l' = 240\left(\frac{1,5}{p} - 1\right)$$

Man hat die ersten 2 Columnen nach Scholz, die letzten beiden als Prüfung derselben:

| Grad Baumé | spec. Gew. $= p$ | Einsenkungstiefe $l'$ in Lin. | Differenz |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,0000 | 120,0000 | |
| 1 | 1,0070 | 117,4975 | 2,5025 |
| 2 | 1,0141 | 114,9946 | 2,5029 |
| 3 | 1,0213 | 112,4919 | 2,5027 |
| 4 | 1,0286 | 109,9903 | 2,5016 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 44 | 1,4359 | 10,7138 | |
| 45 | 1,4501 | 8,2587 | 2,4551 |
| 46 | 1,4645 | 5,8177 | 2,4410 |
| 47 | 1,4792 | 3,3748 | 2,4429 |
| 48 | 1,4942 | 0,9316 | 2,4432 |

Die Reductionstabelle kann also ziemlich genau und richtig sein, nur ist es auffallend, dafs die ersten Zahlen sowohl wie die letzten der Tabelle in den Differenzen so genau, als es vielleicht nur zu verlangen ist, einerlei Gröfse haben, dafs aber beide Differenzenreihen von einander abweichen.

Nach Schober und Pecher hat man

| Grad Baumé | spec. Gew. $= p$ | Einsenkungstiefe $l'$ in Lin. | Differenz |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,0000 | 120,0000 | |
| 1 | 1,0069 | 117,5330 | 2,4670 |
| 2 | 1,0139 | 115,0646 | 2,4684 |
| 3 | 1,0211 | 112,5610 | 2,5036 |
| 4 | 1,0283 | 110,0924 | 2,4686 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 44 | 1,4350 | 10,8711 | |
| 45 | 1,4493 | 8,3958 | 2,4753 |
| 46 | 1,4640 | 5,9016 | 2,4942 |
| 47 | 1,4789 | 3,4242 | 2,4774 |
| 48 | 1,4941 | 0,9477 | 2,4765 |

Diese Reductionstabelle kann also eben so genau und richtig sein, wie die vorige.

4. Die Reduction der Grade des B. A. geschieht aber ganz leicht und sicher, sobald das spec. Gew. der oben gedachten Lösung bekannt ist. Gesetzt es betrage diese nach Scholz's Physik 1,0745; so construire man nach Pag. 93, Formel 6 ein Rechnen-Aräometer. Die Formel ist

$$l' = \frac{m}{n-m}\, l\left(\frac{n}{p} - 1\right)$$

und zwar bedeuten:

$l'$ die Einsenkungstiefe in einer Flüssigkeit von dem spec. Gew. $p$;

$l$ die ganze Länge des Aräometers bis zum Grenzwerth;

$n$ das spec. Gew. der möglich schwersten Flüssigkeit, in welcher $l' = 0$ ist;

$m$ das spec. Gew. der möglich leichte-

sten Flüssigkeit, bei der $l' =$ dem Grenzwerth $l$ ist.

Für das Rechnen-A. der Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, ist nur gegeben:

$m$ das spec. Gew. der leichtesten Flüssigkeit, nämlich des Wassers = 1;

$p$ das spec. Gew. 1,0745 bei dem Theilstrich 10 von oben, also bei $l' = l - 10$.

Diese Werthe in die obige Formel gesetzt, hat man

$$(l - 10) = \frac{1}{n-1}\, l \left(\frac{n}{1{,}0745} - 1\right)$$

woraus

$$l = \frac{21490}{149} \cdot \frac{n-1}{n}$$

und

$$n = \frac{21490}{21490 - 149 \cdot l}$$

Da das spec. Gew. bei 75° B. = 2,0610 angegeben ist, so mufs $n > 2{,}061$ sein.

Nun ist der Zähler von $n$

$$21490 = 7 \cdot 10 \cdot 307$$

Um möglichst kleine Zahlen zu erhalten, und um $l$ in ganzer Zahl auszudrücken, so soll $l = 7 \cdot 15 = 105$ genommen werden.

Dann ist

$$n = \frac{614}{167} = 3{,}67 \ldots.$$

Nun hat man aus der ersten Formel für $l'$

$$p = \frac{nml}{(n-m)l' + ml} = \frac{\frac{614}{167} \cdot 1 \cdot 105}{\left(\frac{614}{167} - 1\right) l' + 1 \cdot 105} = \frac{21490}{149 \cdot l' + 5845}$$

Und

$$l' = \frac{35}{149} \cdot \frac{614 - 167p}{p}$$

Setzt man nun nach einander die Werthe für $l'$, so erhält man

für $l' = 105 - 75 = 30$; $p$ für 75° B.

$105 - 74 = 31$; $p$ für 74° B.

. . . . . . . . . . .

$105 - 0 = 105$; $p$ für 0° B.

Für dieses $l' = 105$ ist also

$$p = \frac{21490}{149 \cdot 105 + 5845} = 1$$

Für jedes andere $l'$ erhält man das spec. Gew. $p$ auf soviel Decimalstellen genau, als man will, mit Ausnahme für 10° B., also bei $l' = 105 - 10 = 95$; wo man die oben angenommene Fundamentalzahl

$$\frac{21490}{149 \cdot 95 + 5845} = \frac{2{,}149}{2} = 1{,}0745$$

für $p$ erhält.

Die oben geprüften spec. Gewichte der in Scholz befindlichen Reductionstabelle und die letzten 6 derselben sollen hier nach der Formel berechnet werden; man erhält:

| Grade | Spec. Gew. nach d. Formel | Spec. Gew. nach Scholz |
|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 1,0000 |
| 1 | 1,006982 | 1,0070 |
| 2 | 1,014062 | 1,0141 |
| 3 | 1,021242 | 1,0213 |
| 4 | 1,028525 | 1,0286 |
| . . . | . . . | . . . |
| 44 | 1,43900 | 1,4359 |
| 45 | 1,45350 | 1,4501 |
| 46 | 1,46830 | 1,4645 |
| 47 | 1,48340 | 1,4792 |
| 48 | 1,49881 | 1,4942 |
| . . . | . . . | . . . |
| 70 | 1,94304 | 1,9291 |
| 71 | 1,96957 | 1,9548 |
| 72 | 1,99684 | 1,9809 |
| 73 | 2,02487 | 2,0073 |
| 74 | 2,05370 | 2,0340 |
| 75 | 2,08337 | 2,0610 |

Hieraus geht hervor, dafs die Scholz'sche Reductionstabelle für Flüssigkeiten schwerer als Wasser, nicht richtig ist. Eine vollständige Tabelle richtig zu berechnen, finde ich nicht rathsam, weil das spec. Gew. der Lösung, worauf die ganze B. Scala sich gründet, wahrscheinlich nicht genau gegeben ist.

5. Für die Flüssigkeiten, welche leichter als Wasser sind, hat man ein anderes Rechnen-A. zu construiren. Für dieses ist gegeben:

$n$ das spec. Gew. der schwersten Flüssigkeit = 1,0745 und

$p$ das spec. Gew. = 1,000 bei dem Theilstrich 10 von unten, also bei $l' = 10$.

Diese Werthe in die Formel (No. 5) gesetzt, giebt

$$10 = \frac{m}{1{,}0745 - m}\, l \cdot \left(\frac{1{,}0745}{1} - 1\right)$$

woraus

$$l = \frac{21490 = 20000\,m}{149\,m}$$

und

$$m = \frac{21490}{20000 + 149 \cdot l}$$

Da das geringste spec. Gew. bei 62° R. mit 0,7251 angegeben ist, so mufs $m <$ 0,7251 sein, und da die bei Baumé nicht mitgezählten untersten 10 Grade hier einbegriffen werden mufsten, so müssen auf

$l$ mehr als 72 gleiche Theile abgelesen werden können.

Setzt man $l = 80$, so hat man

$$m = \frac{21490}{31920} = \frac{307}{456} = 0,67\ldots$$

und

$$p = \frac{nml}{(n-m)l' + ml}$$

$$= \frac{1,0745 \cdot \frac{307}{456} \cdot 80}{\left(1,0745 - \frac{307}{456}\right) l' + \frac{307}{456} 80}$$

$$p = \frac{21490}{149\, l' + 20000}$$

Nach dieser Formel sind folgende Banmë'sche Grade reducirt:

| Grade | Spec. Gew. nach d. Formel | Spec. Gew. nach Scholz |
|---|---|---|
| 0 | 1,07450 | 1,0745 |
| 1 | 1,06654 | 1,0666 |
| 2 | 1,05873 | 1,0588 |
| 3 | 1,05101 | 1,0511 |
| 4 | 1,04341 | 1,0435 |
| 5 | 1,03591 | 1,0360 |
| 6 | 1,02852 | 1,0286 |
| 7 | 1,02124 | 1,0213 |
| 8 | 1,01406 | 1,0141 |
| 9 | 1,00698 | 1,0070 |
| 10 | 1,00000 | 1,0000 |
| 11 | 0,99311 | 0,9930 |
| 12 | 0,98632 | 0,9861 |
| 13 | 0,97962 | 0,9792 |
| 14 | 0,97301 | 0,9724 |
| 15 | 0,96649 | 0,9657 |
| 16 | 0,96006 | 0,9591 |
| 17 | 0,95349 | 0,9526 |
| 18 | 0,94745 | 0,9462 |
| 19 | 0,94126 | 0,9399 |
| 20 | 0,93516 | 0,9336 |
| . . . | . . . | . . . |
| 55 | 0,76219 | 0,7560 |
| 56 | 0,75819 | 0,7518 |
| 57 | 0,75422 | 0,7476 |
| 58 | 0,75030 | 0,7435 |
| 59 | 0,74641 | 0,7394 |
| 60 | 0,74257 | 0,7354 |
| 6t | 0,73877 | 0,7314 |
| 62 | 0,73500 | 0,7251 |

Wenn die specifischen Gewichte der beiden dem B. A. zu Grunde liegenden Salzlösnngen genau gegeben sind, so lassen sich, wie hier nachgewiesen worden, durch obige oder durch ähnlich begründete andere Rechnen-Aräometer die A.-Grade in specifischen Gewichten genau ermitteln.

**Baumé'sches Aräometer.** Der Name Baumé ist in dem Art. Aräometer, pag. 97, unrichtig Beanmé geschrieben.

**Bedeckung der Gestirne** ist die Erscheinung, dafs ein Gestirn durch das Davortreten eines anderen unserm Blick ganz oder zum Theil verschwindet. Die B. der Sonne durch den Mond nennt man Sonnenfinsternifs, eine Mondfinsternifs ist auch eine B., indem die Erde zwischen Sonne und Mond tritt, so dafs deren Licht gehindert wird, auf den Theil des Mondes oder auf den ganzen Mond zu fallen, je nachdem dieser von der Erde zum Theil oder ganz bedeckt wird; Planeten können einander bedecken, der nähere den entfernteren, Fixsterne werden von der Sonne und den Planeten bedeckt; Fixsterne unter sich können sich nicht bedecken, weil sie immer einerlei Abstand von einander behalten.

**Bedingung** ist Beschränkung, die Zurückführung des Allgemeinen auf einen bestimmten Fall; z. B. pag. 47 ist die Höhe $h$ eines Dreiecks $ABC$, Fig. 45, durch die gegebenen Seiten allgemein ermittelt, als

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

Unter der Bedingung, dafs der Winkel, aus dessen Spitze ($A$) die Höhe $h$ gefällt wird, ein rechter sei, erhält man

$$h = \frac{bc}{a}$$

Diejenigen Elemente, welche als B. gegeben werden, um ein Allgemeines einzuschränken, zu einem bestimmteren Fall zu machen, heifsen Bestimmungsstücke; das hier zugefügte ist $\angle BAC = R\angle$ (s. d. folg. Art.)

Bedingungen und die Behauptungen, welche unter dem Vorhandensein jener stattfinden und ausgesprochen werden, machen einen Lehrsatz aus: die B. heifsen Data, Hypotheses, die Behauptungen: Theses.

**Bedingungsgleichung**, eine Gl., welche zur Lösung einer algebraischen oder analytischen Aufgabe einer oder mehreren zu Grunde liegenden Bedingungen gemäfs voran aufgestellt wird. In dem Beispiel des vor. Art. ist zur Auffindung der Höhe $h$ eines Dreiecks durch die gegebenen 3 Seiten die Bedingung, dafs die beiden $\angle$ die $h$ mit $BC$ bildet, rechte seien, weil sonst $h$ keine Höhe wäre; daraus geht wieder hervor, dafs $\triangle ABC$ in 2 rechtwinklige Dreiecke getheilt worden ist, und hieraus entsteht die B.

$$h^2 = c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$$

welches eigentlich 2 B. sind.

Unter einer zweiten Bedingung, dafs $\angle BAC$ ein rechter sei, wird nur eine B., und zwar eine sehr einfache erforderlich, nämlich

$$(\triangle ABC =) b \cdot c = h \cdot a.$$

**Bedingungsglieder** sind die beiden ersten Glieder der Regel de tri; das dritte Glied ist das Frageglied.

**Begrenzung** eines Gegenstandes ist dessen Aeufseres, dasjenige, mit dem der Gegenstand anfängt oder aufhört, Etwas, das dem Gegenstande zugehört, ohne ein Theil desselben zu sein, also etwas dem Gegenstande Ungleichartiges. Eine weitere Erklärung ist nicht gut möglich, oder vielmehr gar keine Erklärung, weil B. zu den Grundbegriffen gehört, die keine Erklärung zulassen. Die B. ist eine allgemeine Eigenschaft aller Raumgröfsen. Daher ist auch eine unendliche Gröfse keine Gröfse, weil die Unendlichkeit die B. ausschliefst; wir haben deshalb keinen Begriff, kein Auffassungsvermögen für unendlich grofs. Ein Punkt hat keine Ausdehnung, er ist keine Gröfse und hat auch keine B. Eine Linie hat keine Breite, sie hat also nach der Breitenrichtung keine B., sondern nur in ihrer Ausdehnung, also zu Anfang und zu Ende ihrer Länge, die Fläche hat nur B. in ihrer Ausdehnung nach zwei Richtungen, der Körper hat B. nach drei Richtungen.

**Begriff.** Eine der Logik angehörige Bezeichnung, die aber hier in ihrer Bedeutung aufzunehmen ist, weil in der Mathematik Begriffe als Definitionen aufgestellt werden. B. ist die Zusammenfassung einer Summe von Anschauungen an einerlei Gegenstand; er dient zur genauen Erkenntnifs des aufgefafsten Gegenstandes und zur Unterscheidung desselben von allen anderen Gegenständen.

Z. B. Dreieck ist eine Figur, die von drei geraden Linien begrenzt ist. Kreis und Ellipse sind Figuren, die von nur einer einzigen krummen Linie begrenzt werden. Die Zahl 3, gerade Linie, krumme Linie und Figur als begrenzte Ebene sind die Anschauungen, auch Theilvorstellungen, Merkmale genannt, und die Zusammenfassung des gemeinsamen Merkmals: Figur mit den verschiedenen Begrenzungen, als zweites Merkmal, giebt den Unterschied zwischen Dreieck und den genannten krummlinigen Figuren. Dreiecke und Vierecke sind darin verschieden, dafs jene von 3, diese von 4 geraden Linien begrenzt werden; Figur und geradlinige Begrenzung sind beiden gemeinsame Merkmale, die Zahl 3 ist dem Dreieck, die Zahl 4 an Begrenzungslinien dem Viereck eigenthümliches Merkmal; so wie Kreis und Ellipse zu gemeinschaftlichen Merkmalen den Begriff krummlinige Figur haben, und erst in den bestimmten Formen ihrer Begrenzungen von einander unterschieden werden.

Je mehr Anschauungen an einem Dinge gemacht werden können, desto zusammengesetzter ist sein B.; die ausführliche Aufstellung aller Merkmale eines Gegenstandes zu seinem B. heifst Definition.

Ein B., der in einem anderen B. Merkmal ist, begreift diesen unter sich; jener ist ein höherer, dieser ein niederer B. Alle niedern B. bilden die Sphäre, und deren Anzahl den Umfang des höheren B.

Z. B. Figur begreift den B. Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis u. s. w. unter sich; Figur ist ein höherer B. als Dreieck u. s. w., Vieleck ein niederer B. als Figur; sämmtliche unter sich verschiedene Figuren bilden die Sphäre, und deren Anzahl den Umfang des B. Figur.

Ein B., der einen anderen B. zum Merkmal hat, begreift diesen B. in sich; also der niedere B. begreift den höheren B. in sich. Der B. Kreis begreift den B. Figur in sich, die Menge der B., die ein B. in sich begreift, bildet seinen Inhalt.

Z. B. Kugel ist ein Körper, dessen Begrenzung von einem einzigen Punkt überall gleich weit entfernt ist. Der Inhalt des B. Kugel besteht also in dem B. Körper, und in der angegebenen Form der Begrenzung.

Nimmt man von einem B. eine Theilvorstellung hinweg, so erhält man einen höheren B; man kann dies so lange fortsetzen, bis man auf nur eine Theilvorstellung kommt, und diese bildet sodann einen einfachen B. Abstrahirt man bei dem B. Kugel von der Form der Begrenzung, so erhält man den höheren B. Körper, d. h. begrenzter Raum, abstrahirt man von Grenze, so erhält man den B. Raum, der keine Theilvorstellungen hat, der, so wie er gegeben ist, mit keinem anderen B. verglichen werden kann, und daher ein einfacher B. ist. Die einfachen B. sind unter den B., was die Grundsätze unter den Erkenntnifssätzen sind: jene lassen sich nicht mehr definiren, diese lassen sich nicht mehr beweisen; bei jenen liegt das Merkmal in dem B. selbst, bei diesen die Richtigkeit des Satzes in dem Satz selbst (vgl. Axiom).

**Beharrung, Beharrlichkeit, Beharrungszustand** ist der Zustand eines Körpers, **Beharrungsvermögen** dessen Vermögen, in der Ruhe oder in derselben Bewegung zu verbleiben, in welcher er sich befindet;

das B.vermögen der Ruhe wird auch Trägheit genannt. Diese Eigenschaft ist der Grund, weshalb ein Körper weder aus der Ruhe in Bewegung kommen, noch dafs dessen Bewegung vermehrt oder vermindert werden kann, ohne dafs eine neu hinzutretende Kraft solches veranlafst.

Wenn ein in Bewegung befindlicher Körper einen anderen Körper trifft, so theilt er diesem durch Stofs Bewegung mit, und er verliert so viel an der Gröfse seiner Bewegung (Masse × Geschwindigkeit) als er dem anderen abgegeben hat.

Aber die B. des ersten hat die Bewegung des zweiten Körpers nicht hervorgebracht, und die B. des zweiten hat die Bewegung des ersten nicht vermindert, sondern die Gröfse der Bewegung des ersten als Kraft, und die ruhende oder mit geringerer Geschwindigkeit sich bewegende Masse des zweiten Körpers als Widerstand (entgegengesetzt wirkende oder negative Kraft) sind die Ursache der Aenderung. B. erregt nicht und hemmt nicht Bewegung, und ist keine Kraft.

**Beharrungszustand eines Flusses und eines Kanals** ist der Zustand desselben, dafs in einerlei Zeit aus jedem Profil eine eben so grofse Wassermenge abströmt, als in dasselbe einströmt. Bei grofser Länge eines Flusses, in einem Gebiet Trockenheit, in einem entfernten starker Zuflufs durch Regen, aufthauende Schneemassen oder Einströmung angeschwellter Nebenflüsse ist B. des Flusses fast immer nur streckenweise; zwischen beiden Strecken ist es gestört. Fliefst in ein Profil mehr zu als ab, so erhebt sich der Wasserspiegel, fliefst weniger zu als ab, so senkt er sich; im B. bleibt er, von der Verdunstung abgesehen, auf einerlei Höhe. Aus ähnlichem Grunde ist in einem Schiffahrtskanal der B. in der Nähe der Schleusen fast immer gestört.

B. findet bei Hochwasser und bei Kleinwasser statt.

**Behauptung** heifst im Allgemeinen ein Satz, der aussagt, dafs etwas ist oder nicht ist. In der Mathematik der in mathematische Form gebrachte Inbegriff eines Lehrsatzes (die Thesis), welcher, da er nicht unmittelbar als richtig erkannt wird, aber als richtig erkannt werden soll, des Beweises bedarf, und dem Beweise als das zu Beweisende vorangestellt wird. Der B. unmittelbar folgen die Data, Hypotheses, die Bedingungen, unter welchen die B. stattfindet, und hiernach fängt der Beweis an. Z. B. bei dem im Art. Analytischer Beweis als Beispiel angeführten Satz hat man

Thesis: $\square AD + \square DB = 2\square AC + 2\square CD$
Hypothesis: $AD + DC = BC$

Der Schlufssatz des Beweises besteht dann wieder in der B., als dem erwiesenen Satze (s. Bedingung).

**Bekanntes Glied** s. v. w. absolutes Glied (s. d.)

Es kann auch aus mehreren Gliedern bestehen, wie

$$y^3 - 3ay^2 + by + c - \frac{de}{f} = 0$$

wo $c - \frac{de}{f}$ das b. Gl. ist.

**Bekannte Gröfsen** sind in einer arithmetischen Aufgabe diejenigen Gröfsen, durch welche eine oder mehrere zu findende unbekannte Gröfsen ausgedrückt werden sollen, sie werden mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. In Beispiel 1, pag. 61, sind $a$ und $b$ die b. G., $x$ und $y$ die unbekannten, und $x = \frac{a+b}{2}$ $y = \frac{a-b}{2}$ ist die Lösung der Aufgabe, indem $x$ und $y$ durch $a$ und $b$ ausgedrückt worden sind.

**Belastung** ist Zweck und Bestimmung tragfähiger Baustücke, deren Tragfähigkeit sie nicht überschreiten darf, wenn das Bauwerk auf Dauer Anspruch machen soll. Durch die geringste B. nämlich wird das Material des Baustücks in seiner Gestalt geändert, allerdings ohne dafs dies wahrzunehmen ist; mit der Vermehrung der B. wird auch jene Aenderung vermehrt, diese wird sichtbar und verschwindet wieder mit der B., aber nur bis zu einer gewissen Grenze; wird diese durch B. überschritten, so sind die Aenderungen an Ausdehnung oder Zusammendrückung des Materials, oder durch beides zu verschiedenen Stellen bleibend geworden: die Moleküle des tragenden Körpers sind in ihrem natürlichen Zusammenhange gestört, dessen Tragfähigkeit ist vermindert, und wird es unter derselben bleibenden B. immer mehr und mehr; d. h. es erfolgt mit der Zeit Bruch. Nur die Verminderung der zu grofsen B. und deren Reduction auf die Stufe der jetzt geringer gewordenen Tragfähigkeit des belasteten Körpers kann noch Sicherheit auf Dauer gewähren. Man sagt, man habe mit der B. die Elasticitätsgrenze des Baustücks überschritten.

Wird die Zahl in Pfunden, durch welche ein Material von 1 □Zoll Querschnitt der Länge nach zerreifst, mit $n$, der Quere nach zerbricht, mit $m$, durch Druck zerquetscht wird, mit $k$, durch Verdrehen

(Torsion) zerreifst, mit $t$ bezeichnet, so darf für die Sicherheit auf Dauer die B. auf den □Zoll Querschnitt des Baustücks betragen:

für Metalle { bei dauernder B. nur $\frac{1}{6}n$
bei abwechselnder B. nur $\frac{1}{3}n$
bis $\frac{1}{4}n$

für Holz nur $\frac{1}{10}n$
für Metalle nur $\frac{1}{6}m$
für Holz nur $\frac{1}{10}m$
für Schmiedeeisen nur $\frac{1}{6}k$
für Gufseisen nur $\frac{1}{3}k$
für behanene Steine in Lagen nur $\frac{1}{15}k$
für dieselben in hohen Pfeilern und in Gewölben nur $\frac{1}{12}k$
für Metalle nur $\frac{1}{6}t$
für Holz nur $\frac{1}{10}t$.

**Beleuchtung** der Erde durch die Sonne s. u. Aequator der Erde, Pag. 33.

**Benannte Zahlen** sind Zahlen, die sich auf bestimmte Gegenstände beziehen, als 8 Thaler, 5 Pfund, 6 Fufs; $a$ Scheffel, $b$ Stunden, $c$ □Meilen. Addirt und subtrahirt werden nur gleichartige, d.h. solche Zahlen, die einerlei Benennung haben, also z. B. nur Thaler zu Thalern oder von Thalern; Pfunde zu oder von Meilen geht nicht. Um Groschen von Thalern abzuziehen, müssen entweder die Groschen in Bruchthalern ausgedrückt werden, oder man borgt vom Minuend einen Thaler, verwandelt diesen in Groschen, und zieht von diesen ab.

Multiplicirt wird eine b. Z. nur durch eine abstracte Zahl (5 Pfund × 3 Pfund, 3 Stunden × 12 Meilen ist unmöglich). Dividirt wird eine b. Z. durch eine abstracte Zahl, wenn man nach einem Theil der b. Z. fragt, z. B. $\frac{1}{3}$ von 25 Sgr. ist $= \frac{25 \text{ Sgr.}}{3} = 8\frac{1}{3}$ Sgr.; eine b. Z. durch eine ihr gleichartige b. Z., wenn gefragt wird, der wievielste Theil diese von jener ist. $\frac{72 \text{ Pfd.}}{9 \text{ Pfd}} = 8$ heifst, 9 Pfund sind der 8te Theil von 72 Pfund.

Für die Aufgabe: In 20 Minuten macht ein Bahnzug 3 Meilen, wieviel ($x$) Meilen in 12 Stunden, wird das Exempel unrichtig geschrieben:

$$x \text{ Meilen} = \frac{12 \text{ Stunden} \times 3 \text{ Meilen}}{20 \text{ Minuten}}$$

es mufs geschrieben werden:

20 Min.: 12 Stunden = 3 Ml. : $x$ Ml.

oder

$$x \text{ Meilen} = \frac{12 \text{ Stunden}}{20 \text{ Minuten}} \times 3 \text{ Meilen};$$

denn im ersten Exempel sind beide Verhältnisse abstracte Zahlen, und $x$ hat im Exempel die Benennung: Meilen, woher diese Benennung auch dem ausgerechneten $x$ zukommt; im zweiten Fall ist der Quotient Stunden durch Minuten als Factor des Multiplicandus 3 Meilen abstract.

Eine Ausnahme für die Multiplication und Division machen die Raumgröfsen wegen möglicher dreier Dimensionen derselben: Länge, Breite und Höhe.

3 Fufs × 5 Fufs giebt 15 □Fufs
10 □Fufs × 7 Fufs giebt 70 Kubikfufs

$\frac{16 \,\square\text{Fufs}}{2 \text{ Fufs}}$ giebt 8 Fufs

$\frac{27 \text{ cubfufs}}{9 \,\square\text{Fufs}}$ giebt 3 Fufs

$\frac{30 \text{ cubfufs}}{6 \text{ Fufs}}$ giebt 5 □Fufs

$$\frac{12 \text{ Fufs}}{4 \text{ Fufs}} = \frac{12 \,\square\text{Fufs}}{4 \,\square\text{Fufs}} = \frac{12 \text{ Kubikfufs}}{4 \text{ Kubikfufs}} = 3 \text{ (abstract)}$$

$\frac{a \text{ Fufs}}{b \,\square\text{Fufs}}$ oder $\frac{c \text{ Fufs}}{d \text{ Kubikfufs}}$ oder $\frac{e \,\square\text{Fufs}}{f \text{ Kubikfufs}}$ kann nie vorkommen (vergl. Abmessung und algebraische Geometrie).

**Beobachtung** ist die Aufmerksamkeit in Wahrnehmung einer zu erwartenden oder des Verlaufs einer vorhandenen Erscheinung: sie wird zum Versuch, wenn man die Erscheinung, die man beobachten will, durch äufsere Mittel selbst hervorruft. Dafs das Quecksilber im Thermometer bei Zunahme der aufsern Wärme steigt, ist eine B., dafs es in kochendem Wasser immer nur auf eine bestimmte Höhe steigt, ist ein Versuch. Versuche und Beobachtungen sind das Fundament aller Erkenntnisse in dem Gebiet der angewandten mathematischen Wissenschaften: die B., dafs ein in die Höhe geworfener Körper wieder fällt, leitete auf das Vorhandensein einer Anziehungskraft unserer Erde; Versuche über die Länge seines Falls in einer bestimmten Zeit, und dafs diese in einerlei Zeit dieselbe bleibt, auf die Gröfse dieser Kraft. Nur mit Hülfe von Keplers Beobachtungen der Planetenbahnen war Newton im Stande, das allgemeine Attractionsgesetz zu entdecken.

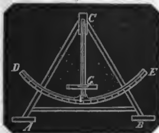
**Berechnen** heifst, eine Rechnungsaufgabe lösen, wenn man die zur Lösung erforderlichen Rechnungselemente richtig anwendet, zu einem Exempel ansetzt, und dieses ausrechnet. Der Kubikinhalt eines Kegels kann berechnet werden, wenn man dessen Höhe $h$ und den Halbmesser $r$ dessen Grundebene kennt, und man berechnet ihn, wenn man das Exempel $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ansetzt und ausrechnet.

Beim Berechnen müssen also die Rechnungsweisen der Natur der Aufgabe entsprechend erst gefunden werden, und

nur die Elemente dafür sind gegeben; beim Ausrechuen sind diese mit den Rechnungsweisen gegeben; rechnen heifst nur, mit einer oder mehreren der verschiedenen Rechnungsweisen sich beschäftigen. Ein gegebenes Exempel wird ausgerechnet, die Bahn eines Kometen bei gegebenen Beobachtungen wird berechnet, in Calculaturen wird gerechnet.

**Bergwaage**, ein Instrument zum Messen des Neigungswinkels abhängiger Flächen. Sie besteht aus einem festen Stativ *ACB*, dessen Basis *AB* etwa 10 Fufs beträgt. Beide Schenkel *AC*, *BC* sind durch einen in Grade und Theile derselben eingetheilten Kreisring *DE* verbunden, der von dem mittleren Nullpunkt aus, von jeder Seite etwa 45 Grad fafst. Um eine Axe *C* drehbar ist eine Gabel befestigt, die eine Zeigerstange *CF* trägt, welche dicht am Kreisbogen mit einem Nonius, und weiter oben mit einer Libelle *G* versehen ist. Wird die Stange so gedreht, dafs der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkt des Kreisringes zusammentrifft, und steht hierbei die Luftblase der Libelle senkrecht in der Mitte, so bilden die Unterkanten der Füfse eine richtige Horizontale *AB*. Setzt man die Waage mit *AB* auf eine geneigte Ebene und dreht die Zeigerstange *CF* bis die Luftblase in der richtigen Mitte steht,

Fig. 201.




so giebt der Zeiger auf dem Kreisring die Gröfse des Neigungswinkels der Ebene in Graden und Minuten an. Kehrt man das Instrument um, so dafs *A* und *B* mit einander vertauscht werden, so mufs der Zeiger auf die andere Hälfte des Kreisrings gedreht werden, und man hat eine Controlle für die erste Messung. In der Regel stimmen beide Messungen nicht genau überein, weil das Terrain zu weich und nachgiebig ist; man nimmt dann aus beiden Angaben des Ringes das Mittel.

**Bernoullische Zahlen** sind die Coefficienten der letzten Glieder von Reihen, welche die Summen der Reihen gerader Potenzen der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis $x$ bilden, und nach $x$ geordnet sind.

Die natürlich auf einander folgenden Zahlen bis $x$ sind

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots.\ x$$

Diese zu geraden Potenzen erhoben, geben die Reihen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | $1^2$ | $2^2$ | $3^2$ | $4^2$ | .... | $x^2$ |
| II. | $1^4$ | $2^4$ | $3^4$ | $4^4$ | .... | $x^4$ |
| III. | $1^6$ | $2^6$ | $3^6$ | $4^6$ | .... | $x^6$ |
| . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . |
| (*M*) | $1^{2m}$ | $2^{2m}$ | $3^{2m}$ | $4^{2m}$ | .... | $x^{2m}$ |

Die B. Zahl, welche aus der 1. Reihe hervorgeht, heifst die erste B. Z.; die aus der 2. Reihe die zweite, die aus der *m*ten Reihe hervorgehende die *m*te B. Z.

Die 1ste Reihe ist eine arithmetische Reihe der 2ten Ordnung, die 2te eine der 4ten, die 3te eine der 6ten, die *m*te eine der 2*m*ten Ordnung.

Pag. 128 ist die Summe einer arithmetischen Reihe der *m*ten Ordnung entwickelt, aber nur in den ersten 3 Gliedern angegeben; vollständig durch Hinzufügung des letzten Gliedes ist sie:

$$S = \frac{n}{1}\,a + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\,a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\,a_2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.\ 2\ \ldots(m+1)}\,a_m$$

wo $a$ das erste Glied der gegebenen Reihe, $a_1$; $a_2$ ... die 1. Glieder der 1ten, 2ten... Differenzenreihen und $n$ die Anzahl der Glieder bedeuten. Die Reihe, welche die Summe einer Reihe höherer (der *m*ten) Ordnung ausdrückt, hat also ein Glied mehr $(m+1)$ als die Ordnungszahl $(m)$ ausdrückt, weil jede Reihe höherer Ordnung eben so viel Differenzenreihen $(m)$ hat, als die Ordnungszahl $(m)$ der Reihe angiebt, deren Anfangsglieder, $m$ an der Zahl, aufser dem vorangestellten 1ten Gliede $(a)$ der Reihe selbst als Factoren alle vorkommen.

In den obigen für die B. Z. gegebenen Reihen ist $a = 1$, $n = x$.

Man hat also allgemein die Summe $S$ einer solchen Reihe, oder der *m*ten Reihe $(1^{2m} \ldots x^{2m})$, welche $(2m+1)$ Glieder hat:

$$Sx^{2m} = \frac{x}{1}\cdot 1 + \frac{x(x-1)}{1.\ 2.}\,a_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\,a_2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-2m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(2m)}\,a_{2m-1} + \frac{x(x-1)\ldots(x-2m)}{1.\ 2.\ 3\ldots(2m+1)}\,a_{2m}$$

Der Erklärung der B. Z. zufolge sind nur die Coefficienten der einfachen $x$ zu nehmen, die der Potenzen von $x$ aber fortzulassen; denn die nach $x$ geordnete Reihe beginnt mit dem Factor $x^{2m+1}$ und endigt mit dem Factor $x$. Demnach hat man in der Reihe für $Sx^{2m}$ nur zu beobachten die Glieder, welche durch die Multiplication von $x$ mit den Subtrahenden entstehen, nämlich

$$x \cdot \frac{1}{1} + \frac{x(-1)}{1.\,2.} a_1 + \frac{x(-1)(-2)}{1.\,2.\,3} a_2 + \frac{x(-1)(-2)(-3)}{1.\,2.\,3.\,4} a_3 + \frac{x(-1)(-2)(-3)\dots(-2m+1)}{1.\,2.\,3.\,4\dots(2m+1)} a_{2m}$$

und eine B. Z. allgemein ist:

$$= 1 - \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{3} a_2 - \tfrac{1}{4} a_3 + \tfrac{1}{5} a_4 - \dots + \frac{1}{2m+1} a_{2m}$$

Nun hat man noch die ersten Glieder

$$a_1;\ a_2;\ a_3 \dots a_{2m}$$

der Differenzreihen aufzusuchen.

Die Reihe I ist

$(1^2 = 1) \cdot (2^2 = 4) \cdot (3^2 = 9) \dots$

1te D.-R. $(2^2 - 1^2 = 3) \cdot (3^2 - 2^2 = 5) \dots$

2te D.-R. $(3^2 - 2.\,2^2 + 1 = 2) \dots$

deren Glieder einander gleich, also $= 2$ sind

Reihe II ist

$(1^4 = 1)(2^4 = 16)(3^4 = 81)(4^4 = 256)(5^4 = 625)$

1ste D.-R. $(2^4 - 1^4)(3^4 - 2^4)(4^4 - 3^4)(5^4 - 4^4)$

2te D.-R. $(3^4 - 2 \cdot 2^4 + 1)\ (4^4 - 2 \cdot 3^4 + 2^4)$
$(5^4 - 2 \cdot 4^4 + 3^4)$

3te D.-R $(4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1)$
$(5^4 - 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 3^4 - 2^4)$

4te D.-R. $5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 = 24$

deren Glieder einander gleich, also $= 24$ sind u. s. w.

Die erste B. Z. (aus der 1. Reihe ist daher

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^2 - 1) + \tfrac{1}{3}(3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1) = \tfrac{1}{6}$$

Die zweite B. Z. (aus der 2. Reihe)

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^4 - 1) + \tfrac{1}{3}(3^4 - 2 \cdot 2^4 + 1) - \tfrac{1}{4}(4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1) + \tfrac{1}{5}(5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 = -\tfrac{1}{30}$$

allgemein die $n$te B. Z.

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^{2n} - 1) + \tfrac{1}{3}(3^{2n} - 2 \cdot 2^{2n} + 1) - \tfrac{1}{4}(4^{2n} - 3 \cdot 3^{2n} + 3 \cdot 2^{2n} - 1) + \dots$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\left[(2n+1)^{2n} - \frac{2n}{1}(2n)^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{1.\,2}(2n-1)^{2n} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}(2n-2)^{2n} + \dots - \frac{2n}{1} 2^{2n} + 1\right]$$

wo die eingeklammerte Reihe des letzten Gliedes das erste und in allen übrigen Gliedern gleichbleibende Glied ($a_{2n}$) der $2n$ten Differenzenreihe der ursprünglichen Reihe $1^{2n}$, $2^{2n}$, .... $(2n+1)^{2n}$ ist.

Diese sind die B. Z., wie sie unmittelbar aus der Worterklärung hervorgehen:

die 1ste $= \frac{1}{6}$

die 2te $= -\ \frac{1}{30}$

die 3te $= +\ \frac{1}{42}$

die 4te $= -\ \frac{1}{30}$

die 5te $= +\ \frac{5}{66}$

die 6te $= -\ \frac{691}{2730}$

die 7te $= +\ \frac{7}{6}$

die 8te $= -\ \frac{3617}{510}$

die 9te $= +\ \frac{43867}{798}$

die 10te $= -\ \frac{174611}{330}$

die 11te $= +\ \frac{854513}{138}$

die 12te $= -\ \frac{236364091}{2730}$

2. Nach den vorstehenden Formeln ist es sehr weitläufig, die B. Z. zu berechnen.

Setzt man die Summe der Reihen

$$1 + 2 + 3 + \dots + x = Sx$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = Sx^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + x^n = Sx^n$$

Die Binomial-Coefficienten

$$\frac{n}{1} = n_1;\ \frac{n \cdot n-1}{1.\,2} = n_2 \text{ u. s. w.}$$

und entwickelt aus der allgemeinen Reihe

$$(x \pm 1)^{n+1} = x^{n+1} \pm (n+1)_1 x^n + (n+1)_2 x^{n-1} \pm \dots + (n+1)x \pm 1$$

die Reihen, indem man nach einander für $x$ die natürlich auf einander folgenden Zahlen nimmt, so hat man

$$(1 \pm 1)^{n+1} = 1^{n+1} \pm (n+1)_1 \cdot 1 + (n+1)_2 \cdot 1 \quad \pm \ldots . + (n+1)_1\, 1 \pm 1$$
$$(2 \pm 1)^{n+1} = 2^{n+1} \pm (n+1)_1\, 2^n + (n+1)_2\, 2^{n-1} \pm \ldots . + (n+1)_1\, 2 \pm 1$$
$$(3 \pm 1)^{n+1} = 3^{n+1} \pm (n+1)_1\, 3^n + (n+1)_2\, 3^{n-1} \pm \ldots . + (n+1)_1\, 3 \pm 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(x-1) \pm 1]^{n+1} = (x-1)^{n+1} \pm (n+1)_1 (x-1)^n + \ldots . + (n+1)_1 (x-1) \pm 1$$
$$(x \pm 1)^{n+1} = x^{n+1} \pm (n+1)_1\, x^n + (n+1)_1\, x^{n-1} \pm \ldots . + (n+1)_1\, x \pm 1$$

Bei positivem Vorzeichen fängt die erste senkrechte Reihe links des Gleichheitszeichens mit $(1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$ an, und endigt mit $(x+1)^{n+1}$, folglich ist die Summe dieser Reihe $= S(x+1)^{n+1} - 1^{n+1}$ $= S(x+1)^{n+1} - 1$; die erste senkrechte Reihe rechts des Gleichheitszeichens ist $= Sx^{n+1}$; die 2te $= (n+1)_1\, Sx^n$ u. s. w. und folglich

$$S(x+1)^{n+1} - 1 = Sx^{n+1} + (n+1)_1\, Sx^n + (n+1)_2\, Sx^{n-1} \ldots . + (n+1)_1\, Sx + x \quad (1)$$

Bei negativem Vorzeichen fängt die Reihe links des Gleichheitszeichens mit $(1-1)^{n+1} = 0$ an und endigt mit $(x-1)^{n+1}$, sie ist also $= S(x-1)^{n+1}$, und man hat

$$S(x-1)^{n+1} = Sx^{n+1} - (n+1)_1\, Sx^n + (n+1)_2\, Sx^{n-1} - \ldots . \mp (n+1)_1\, Sx \pm x \quad (2)$$

wo in den hinteren Gliedern die oberen Vorzeichen für ungerade, und die unteren für gerade $n$ gelten.

Da hier nur die geraden $n$ interessiren, so hat man

$$S(x+1)^{n+1} - S(x-1)^{n+1} - 1 = 2(n+1)_1\, Sx^n + 2(n+1)_3\, Sx^{n-2} + \ldots . + 2(n+1)_2\, Sx^2 + 2x \quad (3)$$

So wie die Summe sämmtlicher obigen Reihen von $(1+1)^{n+1}$ bis $(x+1)^{n+1}$ $= S(x+1)^{n+1} - 1$ (Gl. 1) ist, so ist auch die Summe derselben Reihen mit Ausnahme der letzten, nämlich von $(1+1)^{n+1}$ bis $(x-1+1)^{n+1} = Sx^{n+1} - 1$. Zieht man die letzte Summe von der ersten ab, so behält man die letzte Reihe für $(x+1)^{n+1}$ übrig, demnach hat man

$$S(x+1)^{n+1} - Sx^{n+1} = (x+1)^{n+1} \quad (4)$$

und zieht man von der Summe der Reihen bis zur vorletzten Reihe, nämlich für $(x-1+1) = x$ die Summe der vorhergehenden Reihen, also $S(x-1)^{n+1}$, ab, so bleibt die vorletzte übrig, nämlich die Reihe für $x^{n+1}$, und es ist also

$$Sx^{n+1} - S(x-1)^{n+1} = x^{n+1} \quad (5)$$

Die Gleichungen 4 und 5 addirt, geben

$$S(x+1)^{n+1} - S(x-1)^{n+1} = (x+1)^{n+1} + x^{n+1}$$

Diese Werthe in (3) gesetzt, und $2x$ auf die linke Seite geschafft, giebt

$$(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 2x - 1 = 2(n+1)_1\, Sx^n + 2(n+1)_3\, Sx^{n-2} \ldots . + 2(n+1)_2\, Sx^2$$

3. Aus dieser letzten Formel nun kann man die B. Z. finden, sobald man für $n$ nach und nach die Werthe 2, 4, 6 ... $2n$ setzt

Für $n = 2$ hat man

$$(x+1)^3 + x^3 - 2x - 1 = 2 \cdot \tfrac{3}{1}\, Sx^2$$

woraus

$$6 \cdot Sx^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 1$$

und

$$Sx^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

Es ist also $\frac{1}{6}$ die erste B. Z.

Da nur diese Zahl allein interessirt, so hat man die Potenzen von $x$ zu übergehen, und nur zu rechnen $\frac{3x-2x}{6} = \frac{1}{6}x$; und so für alle übrigen.

Bezeichnet man daher die allgemeine B. Z. mit $z^n$, so hat man

$$z^n = \frac{1}{2(n+1)} \left[ -2 + (n+1) - 2(n+1)_3\, z^{n-2} - 2(n+1)_5\, z^{n-4} - 2(n+1)_7\, z^{n-6} \ldots . \right]$$

oder reducirt

$$z^n = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \left[ 1 + (n+1)_3\, z^{n-2} + (n+1)_5\, z^{n-4} + \ldots . \right] \quad (6)$$

hieraus

$$s^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$
$$s^4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\left[1 + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}s^2\right]$$
$$s^6 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{7}\left[1 + \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}s^4 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}s^2\right]$$
$$s^8 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9}\left[1 + \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}s^6 + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}s^4 + \frac{9\cdot8\ldots\ldots4\cdot3}{1\cdot2\ldots\ldots6\cdot7}s^2\right] \text{ u. s. w.}$$

Die B. Zahlen gehen bis ins Unendliche; es sind deren schon einige 40, aber ohne allen Nutzen berechnet worden; die B. Zahlen machen blofs ein interessantes Curiosum aus.

**Berührende Linien** sind Linien, die mit einander nur einen Punkt gemein haben, doch so, dafs jede derselben in den von dem gemeinsamen Punkt aus nach beiden Richtungen genommenen nächsten Elementen auf einerlei Seite der anderen Linie verbleibt, d. h. ohne dafs sie sich schneiden. Die beiden Linien *ASBD* und

Fig. 202.



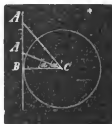

*ESBF* schneiden sich in *S* und berühren sich in *B*. Fig. (188), pag. (296) im Art. Bahn der Weltkörper enthält 4 Linien, die sich alle in dem Punkt *O* berühren; den Kreis *OK*, die Ellipse *OE*, die Parabel *POP* und die Hyperbel *HOH*, und jede derselben ist die b. L. einer jeden der drei anderen.

In der Geometrie interessiren uns ganz besonders zwei b. L., die gerade b. L., die (geometrische) Tangente und der Kreis als Krümmungskreis. Eine gerade Linie kann keine Tangente haben, denn zwei Linien, wenn sie zusammentreffen, müssen entweder sich schneiden oder sich decken; und 2 gerade Linien, die einen Winkel oder 2 Nebenwinkel bilden, müssen durch die Spitze verlängert gedacht werden, wo dann diese zum Durchschnittspunkt wird. In Fig. 12, pag. 14 ist *DE* die Tangente an dem Punkt *A* des Kreises *ABGA*; an jeder krummen Linie, an jedem Punkt derselben kann eine gerade b. Linie, eine Tangente, gedacht und gezogen werden.

Unter Krümmungskreis an einem Punkt einer Curve versteht man die Kreislinie, von welcher das an dem Punkt befindliche sehr kleine Bogenstück der Curve einen Theil ausmacht. Wenn in Fig. 188, pag. 296 das bei *O* befindliche, sehr kleine Bogenstück der Ellipse *OE* zugleich ein sehr kleiner Theil der Kreislinie *OK* ist, so ist *OK* der Krümmungskreis der Ellipse *OE* in dem Punkt *E*. An jedem andern Punkt, mit Ausnahme von *E*, würde der Krümmungskreis gröfser ausfallen. Der Krümmungskreis der Parabel *POP* in *O* würde zwischen die Ellipse und die Parabel fallen; der Krümmungskreis in *O* an der Hyperbel *HOH* würde zwischen *HOH* und *POP* fallen. An jeder krummen Linie, in jedem Punkt derselben kann ein Krümmungskreis gedacht und gezeichnet werden; in jedem Punkt eines beliebigen Kreises ist der Krümmungskreis der gegebene Kreis selbst, an irgend einem Punkt einer geraden Linie ist der Krümmungskreis unendlich grofs.

**Berührende gerade Linie**, in der Elementargeometrie Tangente, Tangens genannt, wird in der höheren Geometrie als geometrische T. oder Curven-Tangente von der trigonometrischen T. unterschieden, welche eine Verhältnifszahl ist. Es sei nämlich *BA*

Fig. 203.

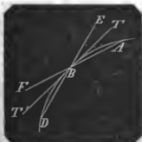



eine b. ger. L. in *B* an dem Kreise, dessen Mittelpunkt *C* ist, zieht man nun die Linie *CA*, welche mit dem Halbmesser *CB* den $\angle ACB = \alpha$ (in Graden, Minuten, Secunden ausgedrückt), so ist das geometrische Verhältnifs $\frac{AB}{BC}$ die trigonome-

**trische Tangente** von $\alpha$; man schreibt $tg\,\alpha$; ebenso $\frac{A^1B}{BC} = tg\,\alpha^1$ u. s. w.

Von der b. g. L. verschafft man sich ein Bild durch folgende Betrachtung. Es seien die Punkte $A$, $D$ von dem Punkt $B$ der Curve $ABD$ = weit entfernt, ziehe

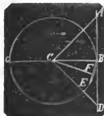
Fig. 204.




durch $A$, $B$ die gerade Linie $AF$, durch $B$, $D$ die gerade Linie $DE$. Ist nun $TT$ eine gerade Linie durch den Punkt $B$, welche immer zwischen den Schenkeln $EB$, $AB$ und $DB$, $FB$ der Scheitel $\angle EBA$ und $FBD$ verbleibt, so nahe man die Punkte $A$ und $D$ auch dem Punkt $B$ rückt, so ist $TT$ eine b. g. L. der Curve $ABD$ in dem Punkt $B$.

**Berührende gerade Linie an dem Kreise.** Errichtet man auf dem Halbmesser $CB$ in dessen Endpunkt $B$ eine Normale $AD$, so ist diese die b. L. des Kreises in dem Punkt $B$. Denn jede gerade Linie CA,

Fig. 205.




$CD$ bildet mit dem Halbmesser $CB$ und dem von $B$ aus abgeschnittenen Stück der Linie $AD$ ein rechtwinkliges Dreieck, und ist als Hypothenuse grösser als die Kathete $CB$, die Punkte $A$ und $D$ mögen noch so nahe dem Punkt $B$ gebracht werden.

Die Linie $AD$ liegt also von dem Punkt $B$ aus in allen Theilen nur auf einer Seite der Kreislinie, schneidet sie also nicht, und hat nur den einzigen Punkt $B$ mit derselben gemein. Oder wollte man annehmen, die Linie $AD$ träfe die Kreislinie noch in einem anderen, noch so nahe an $B$ befindlichen Punkt $E$, so wäre $BE$ eine Sehne, zwischen $BE$ ein Punkt $F$ in ihr innerhalb des Kreises und $CF < CB$, welches nicht möglich ist, da $\angle CBF$ ein rechter $\angle$, und als solcher der gröfste Winkel im $\triangle CBF$ auch die gröfste, ihm gegenüber liegende Seite $CF$ haben mufs.

Ist die b. Linie $AD$ im Punkt $B$ gegeben, so findet man durch die in $B$ darauf errichtete Normale $BG$ den Durchmesser, und durch Halbirung desselben den Mittelpunkt $C$ des Kreises.

2. Von einem Punkt $A$ zieht man an einen gegebenen Kreis eine b. L., indem man $A$ mit dessen Mittelpunkt $C$ geradlinig verbindet, und um $AC$ als Durchmesser einen Kreis zeichnet. Die Durchschnittspunkte $B$, $B'$ beider Kreise geben die geraden b. Linien $AB$ und $AB'$, weil die $\angle ABC$ und $AB'C$ als Winkel im Halbkreise Rechte sind. Die beiden b. L. sind = grofs und gröfser als jede von $A$ nach dem äufseren Bogen $BEB'$ wie $AE$

Fig. 206.




gezogene, und kleiner, als jede nach dem inneren Bogen $BDB'$ wie $AD$ gezogene gerade Linie.

3. Die Winkel, die eine b. Linie $AE$ mit einer Sehne $BF$ bildet, sind den Peripheriewinkeln gleich, welche auf den von der Sehne abgeschnittenen Bogen stehen.

Nämlich

1) $\angle EBF = \angle BDF$
2) $\angle ABF = \angle BGF$

denn

$$\angle EBF + \angle DBF = R$$

aber auch

$$\angle BDF + \angle DBF = R$$

weil nämlich $\angle BFD$ als $\angle$ im Halbkreis = $R$

folglich

 Berührende gerade Linie etc.

1) $\angle EBF = \angle BDF$

Ferner sind als gegenüber liegende $\angle$ eines Vierecks im Kreise

$\angle BDF + \angle BGF = 2\,R$

folglich

$\angle EBF + \angle BGF = 2\,R$

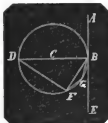
da nun

$\angle EBF + \angle ABF = 2\,R$

so ist

2) $\angle ABF = \angle BGF$

Fig. 207.




Will man daher von einer Kreislinie einen Bogen abschneiden, auf dem ein Winkel von bestimmter Gröfse als Peripherie $\angle$ steht, so zeichne eine Tangente $AE$ an einem Punkt $B$ des Kreises, nimm den $\angle EBF$ = dem gegebenen, so ist $BGF$ der verlangte Bogen.

Zieht man nach den Punkten $D$, $E$ der beliebigen Linie $AD$ (Fig. 206) die Sehnen $BD$, $BE$, so hat man also

$$\angle ABE = \angle ADB$$
$$\angle BAD = \angle BAD$$
$$\triangle ABE \infty \triangle ADB$$

folglich

$$AE : AB = AB : AD$$

oder

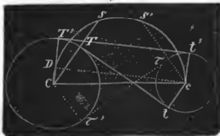
$$AB\square = AD \times AE$$

d. h. das von einer verlängerten Sehne abgeschnittene Stück einer Tangente ist die mittlere geometrische Proportionale **zwischen den beiden Abständen der Sehnen-Endpunkte von dem Durchschnittspunkt der verlängerten Sehne und Tangente.**

An zweien in einerlei Ebene liegenden Kreisen giebt es vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei, welche die Centrale schneiden und zwei, die sie nicht schneiden. Für die Construction derselben zeichne über der Centrale als Durchmesser den Halbkreis. Für die Construction der ersten beiden Tangenten schneide mit der Summe beider Halbmesser $CT + ct$ diesen von $C$ aus in $S$, ziehe $CS$, welche den zu $C$ gehörenden Kreis in $T$ schneidet, ziehe $ct \nparallel CS$, so ist die gerade Linie $Tt$ die verlangte Tangente. Macht man dieselbe Construction von $c$ aus, so erhält man die Punkte $S'$, $\tau$, $\tau'$ und die zweite Tangente $\tau\tau'$.

Für die Construction der beiden anderen Tangenten schneide mit der Differenz $CT - ct$ den Halbkreis von $C$ aus in $D$, verlängere $CD$ bis $T'$, ziehe $ct' \nparallel CT'$, so ist $T't'$ die dritte Tangente; die vierte Tangente erhält man durch dieselbe Construction von $C$ aus, wenn man den Halbkreis unterhalb $Cc$ zeichnet. Die Beweise für die Richtigkeit sind einfach und in die Augen fallend.

Fig. 208.




**Berührende gerade Linie an einer Curve.** Fig. 204 und die Betrachtung darüber leiten zur Auffindung der b. L. wie folgt:

Es sei $EFBG\ldots$ die Curve, für den Punkt $B$ soll die b. Linie $BT$ gefunden werden. $AX$ sei die Abscissenlinie, $A$ der Anfangspunkt der Abscissen, $FI$, $BD$, $GH$ normale Ordinaten für die Punkte $F$, $B$, $G$ der Curve, so haben diese eine der Natur der Curve gemäfse gleiche Abhängigkeit von den ihnen zugehörigen Abscissen, wenn also $FJ = k \cdot AJ$, so ist $BD = k \cdot AD$ und $GH = k \cdot AH$. Setzt man $AD = x$; $AJ = x_1$; $AH = x_2$; $BD = y$; $FJ = y_1$; $GH = y_2$, so sei allgemein

$$y = fx$$

also auch $\quad y_1 = fx'_1$

und $\quad y_2 = fx_2$

Die Subtangente $TD$ für den Punkt $B$ werde mit $s$ bezeichnet; zieht man nun durch die Punkte $G$, $B$ die Linie $GS_2$; durch die Punkte $B$, $F$ die Linie $BS_1$; setzt $S_1J = s_1$ und $S_2H = s_2$, so rücken die Linien $BS_1$ und $GS_2$ der b. Linie $BT$ von beiden Seiten immer näher, desgleichen die Punkte $S_1$ und $S_2$ dem Punkt $T$, je mehr man die Punkte $F$ und $G$ dem Punkt $B$ nähert.

Zieht man $FK$ nnd $BL \mp AX$, so ist

$$S_1 J : JF = FK : KB$$

und

$$S_2 H : HG = BL : LG$$

d. h.

$$s_1 : y_1 = x - x_1 : y - y_1$$

nnd

$$s_2 : y_2 = x_2 - x \ : y_2 - y$$

woraus

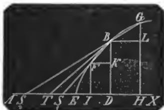
$$s_1 = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1} = fx_1 \frac{x - x_1}{fx - fx_1} \quad (1)$$

und

$$s_2 = y_2 \frac{x_2 - x}{y_2 - y} = fx_2 \frac{x - x_2}{fx - fx_2} \quad (2)$$

Setzt man nun das gegebene $fx$ in diese Formeln, hiernach $x_1$ nud $x_2 = x$; ebenso

Fig. 209.




$y_1$ nnd $y_2 = y$, so erhält man für $s_1$ und $s_2$ den Werth $s$ der Snbtangente $TD$. Da $s_1$ mit $s_2$ durch einerlei Formel ausgedrückt ist, so hat man nnr mit **einer** derselben zn rechnen nöthig.

1. **Beispiel.** Die Parabel hat die rechtwinklige Coordinatengleichnng $y^2 = px$, wo $p$ den Parameter bedentet, der Anfangspnnkt der Abscissen im Scheitel liegt, nnd die Abscissenlinie die Axe der Parabel ist. Es ist also

$$s_1 = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

Nnn ist $px = y^2$ nnd $px_1 = y_1^2$ daher $p(x - x_1) = y^2 - y_1^2$ nnd

$$s_1 = \frac{y_1}{p} \frac{y^2 - y_1^2}{y - y_1} = \frac{y_1}{p}(y + y_1)$$

$y_1 = y$ gesetzt, giebt die Suhtangente

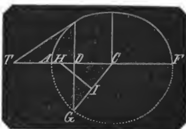
$$TD = s = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

Da nnn

$tg\,(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{p}{2y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$ ($tg$ die trigonometrische Tangente vom $\angle BTD$) so ist für jeden Pnukt $B$ der Parabel, von deren Fnfspnukt $D$ der Axe die Länge $DT$ nnd der $\angle BTD$ gegeben, wonach die h. L. $TB$ gezeichnet werden kann. Man hat übrigens, da $s = 2x$ ist, nnr nöthig, $ET = ED$ zu nehmen, nnd $TB$ zn ziehen, so ist $TB$ die h. L. in $B$.

2. **Beispiel.** Die Ellipse hat, wenn $AX$ in der grofsen Axe liegt, nnd der

Fig. 210.




Anfangspnukt der Abscissen im Scheitel $E$ genommeu wird, die rechtw. Coord. Gl.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

wo $a$ die grofse und $c$ die kleine Axe ist.

Hierans ist

$$x^2 = 2ax - \frac{a^2}{c^2} y^2$$

nnd

$$x_1^2 = 2ax_1 - \frac{a^2}{c^2} y_1^2$$

worans $x^2 - x_1^2 = 2a(x - x_1) - \frac{a^2}{c^2}(y^2 - y_1^2)$

oder

$$(x + x_1)(x - x_1) = 2a(x - x_1) - \frac{a^2}{c^2}(y + y_1)(y - y_1)$$

worans

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{a^2}{c^2} \frac{y + y_1}{2a - (x + x_1)}$$

Diesen Werth in Gl. 1 gesetzt, giebt

$$s_1 = y_1 \frac{a^2}{c^2} \frac{y + y_1}{2a - (x + x_1)}$$

hierin für $y_1 = y$; für $x_1 = x$ gesetzt, giebt

Snbtg. $TD = s = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a - x} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$

nnd

$$tg\,(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a - x}{2a - x}$$

Die b. L. an dem Pnnkt $B$ läfst sich nnn leicht construiren:

Ans der Formel

$$s = \frac{2ax - x^2}{a - x} = \frac{x(2a - x)}{a - x}$$

folgt die Proportion

$$a - x : 2a - x = x : s$$

oder in Beziehnng auf die Figur

$$DC : DF = DA : DT$$

Beschreiht man nun über $AF$ einen Halbkreis $AGA$, verlängert $BD$ bis $G$, so ist

$$DG^2 = DF \cdot DA$$

also $$DC \cdot DT = DG^2$$

Es ist mithin $CT$ der Durchmesser eines Kreises, in dessen Peripherie $G$ liegt. Zieht man also $CG$, und schneidet durch eine Normale aus der Mitte $J$ von $CG$ die Axe der Ellipse in $H$, so ist $H$ der Mittelpunkt des Kreises, und man findet $T$, wenn man $HT = CH$ nimmt; die gerade L. $TB$ ist dann die b. L. in $B$.

Will man die Formel

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{a - x}{2a - x}$$

zur Construction anwenden, so hat man

$$2a - x : a - x = y : x\, tg\, \alpha$$

Fig. 211.

oder in Beziehung auf Fig. 211

$$DF : DC = DB : AD\, tg\, \alpha$$

Zieht man daher $BF$, und $CG \parallel BF$ so ist

$$DG = AD\, tg\, \alpha \text{ und } \angle\, GAD = \alpha$$

Aus $B$ eine Parallele mit $AG$ gezogen giebt die b. L. $BT$ an $B$.

3. Beispiel. Die Hyperbel hat, wenn $AX$ in der Axe der Hyperbel liegt, $A$ im Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen

Fig. 212.

ist, $p$ den Parameter und $a$ die halbe grofse Axe $\frac{AA'}{2} = AM$ bedeutet, indem $A'$ als der Scheitel der Gegenhyperbel gilt, die Coordinatengleichung

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{2a}\right) = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$$

Man hat demnach

$$x^2 + 2ax = \frac{2a}{p} y^2$$

$$x_1^2 + 2ax_1 = \frac{2a}{p} y_1^2$$

$$(x+x_1)(x-x_1) + 2a(x-x_1) = \frac{2a}{p}(y+y_1)(y-y_1)$$

woraus für Gl. 1

$$s_1 \left(= y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1}\right) = \frac{2a}{p} \cdot \frac{y + y_1}{2a + (x + x_1)} \cdot y_1$$

$x$ für $x_1$ und $y$ für $y_1$ gesetzt, giebt

$$s = \frac{2a}{p} \cdot \frac{y^2}{a + x} = x \cdot \frac{2a + x}{a + x}$$

und

$$tg\ \alpha \left(= \frac{y}{s}\right) = \frac{p}{2a} \cdot \frac{a + x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a + x}{2a + x}$$

Aus der Formel für $s$ hat man zur Construction der b. L.:

$$a + x : 2a + x = x : s$$

oder nach der Figur

$$DM : DA' = DA : \text{Subtg. } s$$

Nimmt man also $DE = DA$, zieht $ME$ und $A'F \parallel ME$ bis in die Verlängerung von $DB$, so ist $DF = s$; zeichnet man nun den Quadrant $FT$ aus $D$, so ist $DT$ die Subtg. für $B$ und $TB$ die b. L. in $B$.

Will man die Formel für $tg\ \alpha$ zur Construction anwenden, so hat man

$$2a + x : a + x = y : x\, tg\, \alpha$$

oder

$$A'D : MD = DB : AD \cdot tg\, \alpha$$

Demnach ziehe $A'B$, $ME \parallel A'B$, so ist $DE = AD \cdot tg\, \alpha$; ziehe $EA$, so ist $\angle\, EAD = \alpha$ und $BT \parallel EA$ die b. L. in $B$.

Fig. 213.

Die Hyperbel hat eine Asymptote (s. d. Art.): man hat nach der Formel für $s$

$$\text{Subtg.} - \text{Absc.} = x \cdot \frac{2a + x}{a + x} - x = \frac{ax}{a + x}$$

$$= \frac{a}{\frac{a}{x} + 1}$$

Für $x = \infty$ ist die Differenz zwischen $s$ und $x = a$, mithin ist $M$ der Anfangspunkt der Asymptote.

Um den $\angle\, \alpha$ zu finden, hat man die obige Formel

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{a+x}{2a+x}$$

Schreibt man für $y$ den Werth

$$\sqrt{p\left(\frac{2ax+x^2}{2a}\right)}$$

so erhält man

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{p}{2a}} \cdot \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}} = \sqrt{\frac{p}{2a}} \cdot \frac{\frac{a}{x}+1}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}}$$

giebt für $x = \infty$

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{p}{2a}} = \frac{y}{\sqrt{(2a+x)x}}$$

Ist demnach $BD$ die Ordinate für die Abscisse $AD$, so zeichne den Halbkreis über $A'D = 2a + x$, errichte das Loth $AE$, so ist die Sehne $DE = \sqrt{(2a+x)x}$, folglich $DE \cdot tg\,\alpha = DB$; beschreibe daher aus

Fig. 214.

$D$ den Bogen $EF$, ziehe $BF$, so ist $\angle BFD = \alpha$ für die Asymptote, und $MN \mp FB$ die Asymptote selbst.

In dem Art.: Asymptote, Beispiel 3, ist die Gl. für die Hyperbel

$$y^2 = ax + bx^2$$

hier ist die Gl.

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$$

Das dortige $a$ ist also der Parameter, das dortige $b$ der Quotient: Parameter durch die große Axe.

4. Beispiel: Die Cycloide. Es sei $AG$ die Basis der Cycloide, $AX$ normal

Fig. 215.

darauf die Abscissenlinie, $EBF$ der Erzeugungskreis vom Halbmesser $CB = r$, $B$ von $A$ ab der beschreibende Punkt, $\varphi$ die Bogeneinheit, welche $B$ von $A$ bis $B$, dem $\angle BCF$ zugehörig, bei der Umwälzung des Kreises beschrieben hat, $BD = y$, $AD = x$, so ist

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

daher

$$x - x_1 = r(\cos\varphi_1 - \cos\varphi) = -r(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$$
$$= +2r\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$$
$$y - y_1 = r(\varphi - \varphi_1) - r(\sin\varphi - \sin\varphi_1)$$
$$= r(\varphi-\varphi_1) - 2r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$$

hieraus

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1 - 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$$

und wenn man Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$ dividirt

$$\frac{x-x'}{y-y_1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{\frac{\varphi-\varphi_1}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)} - 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}$$

Der Minuend im Nenner geschrieben $2\cdot\frac{\frac{1}{2}\varphi-\varphi_1}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$ zeigt in dem Bruch: Bogen dividirt durch seinen Sinus, und dieser nähert sich der Einheit (1) um so mehr, je kleiner der Bogen wird; ist $\varphi - \varphi_1$ im Verschwinden, welches stattfindet, wenn der Vorschrift gemäß $\varphi_1 = \varphi$ gesetzt wird, so hat man

$$\frac{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)} = 1$$

Setzt man daher $\varphi_1 = \varphi$, so wird

$$s = y\cdot\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = y\cdot\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= y\cot\frac{\varphi}{2}$$

Nun hat man

$$tg\,\alpha = \frac{y}{s} = \frac{y}{y\cot\frac{\varphi}{2}} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

und $\qquad \alpha = \frac{\varphi}{2}$

Zieht man daher durch $E$ und $B$ die gerade Linie $EH$, so ist, da $\angle CEB$ als Peripheriewinkel = dem halben Centriwinkel $= \frac{\varphi}{2}$ auch $\angle BHD = \frac{\varphi}{2}$ also der $\angle \alpha$; d. h. $BH$ ist die b. L.

Auch ist $DH = y\cot\frac{\varphi}{2}$ die Subtg.

II. Durch die Differenzialrechnung löst man die allgemeine Aufgabe: an einer

Cnrve die b. L. zn zeichnen, folgendermafsen:

A. **Wenn die Form der Cnrve durch rechtwinklige Coordinaten gegeben ist.**

Nennt man $DH$ eine beliebige Aenderung (hier Wachsthum) von $AD = x$ nm $\Delta x$, so ändert sich (hier wachsend) $DB = y$ in $HG$ nm $LG = \Delta y$ nnd

$$SD : y = \Delta x : \Delta y$$

woraus

$$SD = \frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Mit der beliebigen Abnahme der Aenderung $\Delta x$ nimmt auch die Aenderung $\Delta y$ ab, der Pnnkt $G$ rückt immer näher an $B$, der Pnnkt $S$ an $T$ nnd der $\angle SBT$

Fig. 216

wird immer kleiner; der Grenzwerth dieses Winkels ist $= 0$, der Grenzwerth der Linie $GS$ ist die b. Linie $BT$, der für die Linie $SD$ die Subtangente $TD$, und für diesen geht der Differenzen-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in den Differenzial-Qnetient $\frac{\partial y}{\partial x}$ über; es ist demnach

$$DT = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \qquad (1)$$

d. h. die Snbtangente ist gleich dem Quotient der Ordinate, dividirt durch das Differenzial der Ordinate. Ferner ist $\frac{BD}{DT}$ = der trigonometrischen Tangente des $\angle BTD$ oder

$$\frac{y}{\text{Subtg.}} = \frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha \qquad (2)$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Cnrventangente mit der Abscissenlinie bildet, ist = dem Differenzial ihrer Ordinate.

**Beispiele.** Die ad 1 anfgeführten Beispiele sollen hier wiederholt werden, es sind jedoch nur die Formeln herznleiten, die Constructionen bleiben dieselben.

1. Die Parabel hat die Gleichung

$$y^2 = px$$

differenzirt giebt

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = p$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$$

daher

$$\text{Subtg.} = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{p}{2y}\right)} = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

nnd

$$tg\,\alpha = \frac{p}{2y}$$

2. Die **Ellipse** hat die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

differenzirt giebt

$$2y \cdot \partial y = \frac{c^2}{a^2}(2a - 2x)\partial x$$

worans

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a - x}{2a - x}$$

also

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a - x} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$$

3. Die **Hyperbel** hat die Gleichung

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{2a}\right)$$

differenzirt giebt

$$2y \cdot \partial y = p\left(1 + \frac{2x}{2a}\right)\partial x$$

worans

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2a} \cdot \frac{a + x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a + x}{2a + x}$$

nnd

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = x \cdot \frac{2a + x}{a + x}$$

4. Die **Cycloide** hat die Gleichungen

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

differenzirt giebt

$$\partial x = r(0 + \sin\varphi)\partial\varphi$$
$$\partial y = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi$$

daher

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\,\sin\varphi$$

nnd

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r(1 - \cos\varphi)$$

folglich

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$= tg\,\frac{\varphi}{2}$$

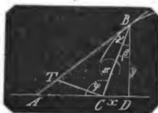
und

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{tg\,\frac{\varphi}{2}} = y \cdot \cot\frac{\varphi}{2}$$

B. Wenn die Form der Curve durch Polarcoordinaten gegeben ist.

Es sei $C$ der Pol, $CA$ die Polaraxe, die Bogeneinheit $\varphi$ des $\angle\varphi$ die Polarabscisse, $CB = s$ die Polarordinate. Ist nun $BT$ die b. L. in $B$, $CT$ normal $BC$, so heifst hier $CT$ die Subtangente,

Fig. 217.



und wenn man diese kennt, so kann man $BT$ zeichnen. Da nun

$$CT = BC \cdot tg\,\angle CBT$$

so kommt es nur darauf an, den $\angle CBT$ zu ermitteln.

Fällt man deshalb von $B$ das Loth $BD$ auf $AC$, setzt $CD = x$, $BD = y$, so hat man nach No. II, 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,BAD = \cot ABD \qquad (1)$$

Ferner

$$\cot CBD = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\angle ABD$ mit $\gamma$, $\angle CBD$ mit $\beta$, ist also $\angle ABC = \gamma - \beta$, so wird $\angle ABC$ gefunden, wenn man $x$ und $y$ durch $s$ und $\varphi$ ausdrückt.

Nun ist

$$y = s\,\sin\varphi$$
$$x = -s\,\cos\varphi$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = s\,\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = s\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi} = \cos\gamma$$

Nun ist

$$\cot ABC = \cot(\gamma-\beta) = \frac{\cot\gamma\cdot\cot\beta + 1}{\cos\beta - \cos\gamma}$$

$$= \frac{\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (s. Gl. 1 und 2)}$$

$$= \frac{\frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\sin\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\cos\varphi}\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + 1}{-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\sin\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi}} = \frac{-\frac{\partial s}{\partial\varphi}}{-s}$$

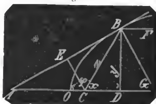
mithin

$$\cot ABC = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)}{s} \qquad \text{I}$$

$$\text{Subtg. } CT = s\,tg\,ABC = \frac{s}{\cot ABC} = \frac{s^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)} \text{II}$$

1. Beispiel. Die Parabel, mit Rücksicht auf den Art.: Bahn der Weltkörper, No. 20, pag. 300, mit Fig. 191, der Pol $C$ im Brennpunkt. Es ist daher nach beistehender Bezeichnung $CB = s$, $\angle BCA = \varphi$

Fig. 218.



und wenn man $OD$ mit $x$ und $BE$ mit $y$ bezeichnet: $y^2 = px$; wo $p$, der Parameter der Parabel $= 4\,OC = 4a$ beträgt.

Nun ist

$$OD = x = a - s\cos\varphi$$
$$BD = y = s\,\sin\varphi$$

daher

$$s^2\sin^2\varphi = 4a(a - s\cos\varphi) \qquad (3)$$

woraus nach $a$ geordnet

$$a^2 - (s \cos \varphi)\, a - \frac{s^2}{4} \sin^2 \varphi = 0$$

woraua

$$a = + \frac{s}{2} \cos \varphi \pm \frac{s}{2}$$

wo nur das positive Vorzeichen gelten kann; mithin

$$s = \frac{s}{2}(1 + \cos \varphi)$$

$$s = \frac{2a}{1 + \cos \varphi}$$

nnd

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 2a \cdot \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$$

$$\cot \angle CBA = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)}{s} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = tg \frac{\varphi}{2}$$

mithin

$$\angle CBA + \frac{\varphi}{2} = 90°$$

Halbirt man daher $\angle ACB$ durch $CE$, zieht $BE$ normal $CE$, so ist $BE$ die b. L. in $B$.

Zieht man $BF$ ‡ $AC$, so ist offenbar $\angle FBC = \angle ACB$ nnd $BG$ ‡ $CE$, also normal auf $BA$ halbirt $\angle FBC$ Da nnn die b. L. $BA$ die gerade Richtnng des Cnrvenelements in $B$ angiebt, so ist $BG$ die Normale auf der Cnrve in $B$, $\angle FBG = \angle CBG$; wenn also die Cnrve ein Spiegel ist, (das Nähere darüber im Art.: Brennpnnkt), so wird jeder mit der Axe $AC$ parallele Lichtstrahl wie $FB$ nach dem Brennpunkt $C$ reflectirt.

2. Beispiel. Die Ellipse, mit Rücksicht wie Beisp. 1, der Pol im Brennpnnkt, daher $BS = s$, $\angle BSO = \varphi$

Die rechtwinklige Coordinatengleichung ist wie oben Beisp. 2

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$OD = x = CO - CS - SD = a - \sqrt{a^2 - c^2} - s \cos \varphi$$
$$BD = y = s \sin \varphi$$

folglich

$$s^2 \sin^2 \varphi = \frac{c^2}{a^2}[2a - x] = \frac{c^2}{a^2}[a - \sqrt{a^2 - c^2} - s \cos \varphi]\,[2a - (a - \sqrt{a^2 - c^2} - s \cos \varphi)]$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\left[a^2 - (\sqrt{a^2 - c^2} + s \cos \varphi)^2\right]$$

hieraus

$$a^2 s^2 \sin^2 \varphi = c^4 - c^2 s^2 \cos^2 \varphi - 2c^2 \sqrt{a^2 - c^2}\, s \cos \varphi$$

Um diese Gleichnng nach $\varphi$ ordnen zn können, ist zu schreiben

$$a^2 s^2 - a^2 s^2 \cos^2 \varphi = c^4 - c^2 s^2 \cos^2 \varphi - 2c^2 \sqrt{a^2 - c^2}\, s \cos \varphi$$

und geordnet

$$\cos^2 \varphi - \frac{2c^2 \sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 - c^2)s} + \frac{c^4 - a^2 s^2}{(a^2 - c^2)s^2} = 0$$

woraus entwickelt und reducirt

$$\cos \varphi = \frac{c^2 \pm as}{s\sqrt{a^2 - c^2}}$$

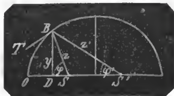
Oder für $\sqrt{a^2 - c^2} = CS$ als Excentricität $e$ gesetzt:

$$\cos \varphi = \frac{c^2 \pm as}{es}$$

hieraus

$$s = \frac{c^2}{\mp a + e \cos \varphi}$$

Fig. 219.




hieraus

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{c^2 e \sin \varphi}{(\mp a + e \cos \varphi)^2}$$

und

$$\cot SBT = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)}{s} = \frac{c \sin \varphi}{\mp a + e \cos \varphi}$$

oder

$$tg\, SBT = \frac{\mp a + e \cos \varphi}{e \sin \varphi}$$

Da $a > e > e \cos \varphi$, so ist $-a + e \cos \varphi$ negativ, es bezieht sich also $-a$ auf einen stumpfen Winkel. Dagegen würde $s = \frac{c^2}{+a + e \cos \varphi}$ für $-a$ immer negativ werden, welches nicht möglich ist, mithin mufs das negative Vorzeichen von $a$ fortgelassen werden, und es ist

$$s = \frac{c^2}{a + e \cos \varphi}$$

$$tg\ SBT = tg\,\psi = \frac{a + e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$$

Nimmt man die Polarordinate $s'$ aus dem zweiten Brennpunkt $S'$, setzt $\angle BS'O = \varphi'$, so hat man für die Aufstellung der ersten Gleichung für $s^2 \sin^2\varphi$

$$x = a + e - s'\cos\varphi' = a + \sqrt{a^2 - e^2} - s'\cos\varphi'$$

In der Entwickelung oben ist dann für $-\sqrt{a^2 - c^2}$ der Werth $+\sqrt{a^2 - c^2}$ zu setzen, und man erhält

$$s' = \frac{c^2}{+a - e\cos\varphi}$$

und

$$tg\ S'BT = tg\,\psi' = \frac{+a - e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$$

Die Construction der Tangente ist nun sehr einfach: Ziehe $CE$ mit nöthiger Verlängerung $CF \neq s$, zeichne aus $C$ den Kreisbogen $PF$, fälle aus $S$ auf $CE$ das

Fig. 220.




Loth $SG$, ziehe $SF$, fälle aus $G$ auf $SF$ das Loth $GH$, so ist $BT \neq GH$ die b. L. in $B$.

Denn

$$CP = CF = a,\ CS = e,\ \angle ECS = \varphi$$

also $CG = e\cos\varphi$

und $FG = a + e\cos\varphi$

$SG = e\sin\varphi$

und $SG\ tg\ GSF = FG$

also $e\sin\varphi \cdot tg\ GSF = a + e\cos\varphi$

folglich ist $\angle GSF = \psi$, und da $GH$ normal $SF$, so ist auch $\angle HGF = \psi$; $TB \neq GH$, $BS \neq GF$, folglich $\angle TBS = \psi$.

**Berührungslinie** s. v. w. berührende Linie.

**Berührungspunkt**, der Punkt, in welchem eine Linie eine andere berührt; er ist in den vorhergehenden Art. mit $B$ bezeichnet.

**Beschleunigende Kraft** ist derjenige Theil der auf die Bewegung eines Körpers wirkenden Kraft, welcher auf jede der Masseneinheiten des Körpers fällt. Ist $P$ die Kraft, welche auf einen Körper von der Masse $M$ wirkt, so ist dessen b. K. $= \frac{P}{M}$

**Beschleunigte Bewegung** ist eine Bew., bei welcher jeder folgende Weg gröfser ist, als der in der vorhergegangenen Zeit zurückgelegte Weg, die Zeiten mögen noch so klein angenommen werden. (s. Beschleunigung.)

**Beschleunigung** bedeutet bekanntlich Vermehrung der Schnelligkeit und hat auch in der Phoronomie dieselbe Bedeutung, jedoch mit der Einschränkung, dafs die Vermehrung ohne Unterbrechung geschieht. Wenn ein Massenpunkt $M$ eine Zeit $t$ hindurch den Weg $w$ gleichförmig durchlaufen hat, und er erhält mittelst eines neuen Impulses einen Zuwachs an Schnelligkeit, so dafs $M$ in der folgenden gleichen Zeit $t$ den Weg $w + w'$ gleichförmig durchläuft, so wird dieser Zuwachs nicht B. genannt. B. ist eine Vermehrung von Schnelligkeit der Art, dafs während des ganzen Weges in jedem folgenden noch so kleinen Zeittheilchen der zurückgelegte Weg gröfser ist als der, welcher in dem vorangegangenen gleichen Zeittheilchen zurückgelegt worden ist.

2. Solche Bewegung heifst eine beschleunigte. Wenn in gleichen auf einander folgenden Zeiten die Zunahme an Weg immer gleich grofs bleibt, so heifst die Bew. eine gleichförmig beschleunigte Bew., und wenn die Zunahmen in gleichen auf einander folgenden Zeiten verschieden sind, ungleichförmig beschleunigte Bewegung; Beschleunigung aber ist das Maafs der Zunahme des Weges in der Zeiteinheit (Secunde).

Wenn nun ein Massenpunkt von der Ruhe ab die Zeit $t$ hindurch sich bewegt hat, und die in jeder Secunde gleich viel wachsende Zunahme des Weges beträgt in der letzten Secunde von $t$ die Länge $l$, so würde sie in der letzten Secunde der Zeit $nt$, $nl$ betragen, und weder $l$ noch $nl$, noch überhaupt eine Wegzunahme innerhalb einer Zeiteinheit während der Bewegung kann, weil sie veränderlich ist, und von der Dauer der Bewegung abhängt, als Maafs gelten; daher nimmt man die Zunahme des Weges, den ein von der Ruhe aus gleichförmig beschleunigt sich bewegender Massenpunkt in der ersten Secunde erlangt, also, da in der Secunde vorher der Weg = Null gewesen ist, offenbar den von der Ruhe aus in der ersten Secunde zurückgelegten Weg selbst als das Maafs, welches Be-

schleunigung genannt wird. Diese B. wird ziemlich allgemein mit dem Buchstaben *G* bezeichnet; beim freien Fall von einer nur geringen Höhe über der Erdoberfläche herab, wobei die Differenz der Entfernungen des Erdmittelpunkts so unbedeutend ist, daſs die dort sitzende Schwerkraft constant angenommen werden kann, wird die B. speciell mit *g* bezeichnet, und beträgt hier 15 pariser = 16 englische = $15\frac{5}{8}$ preuſs. Fuſs.

3. Wenn eine Bew. mit einer Geschw. $c$ beginnt, und nach $t$ Secunden die Geschw. $= C$ geworden ist, so hat es etwas Befremdendes, die Bew. bis auf den Ruhepunkt zurück betrachten zu müssen, um die B. zu definiren. Die Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bew. zeigt nun, daſs ein Massenpunkt von der Ruhe aus nach $t$ Secunden den Weg $Gt^2$ zurückgelegt hat, und daſs die dabei erlangte Geschw. $c = 2Gt$ beträgt; diese Geschw. drückt aber zugleich den Weg aus, welcher in der folgenden $(t+1)$ten Sec. zurückgelegt werden würde, wenn die Bew. vom Ende der $t$ten Sec. ab gleichförmig geschähe.

Wie aber nach $t$ Sec. der Weg $= Gt^2$, so nach $(t+1)$ Sec. $= G(t+1)^2$
$$= Gt^2 + 2Gt + G$$
mithin der gleichförmig beschleunigte Weg in der $(t+1)$ten Sec. $= 2Gt + G$

Nun war die Geschw. in der $t$ten Secunde $2Gt$, die Vermehrung derselben ist um $G$ geschehen; man kann daher unter B. allgemein verstehen: den Unterschied ($G$) zwischen dem während einer gleichförmig beschleunigten Bew. in irgend einer Secunde zurückgelegten Weg $(2Gt + G)$ und dem mit der Endgeschw. $(2Gt)$ der vorhergegangenen Sec. gleichförmig zurückgelegten Wege.

4. Die B. einer ungleichförmig beschleunigten Bew. ist natürlich in jedem einzelnen Zeittheilchen eine andere. Denkt man sich eine solche nach irgend einem Gesetz stattfindende ungleichförmig beschleunigte Bewegung, und neben dieser eine gleichförmig beschleunigte Bew., welche von einem Augenblick an jener ersten möglichst nahe kommt, d. h. daſs die Differenz der in beiden Bewegungen von jenem Augenblick an gleichzeitig durchlaufenen Wege kleiner ist als die Differenz zwischen dem Wege der ungleichförmig beschl. Bew. und dem irgend einer anderen gleichförmig beschl. Bew., wie klein man auch die gleiche Zeit ihrer Bewegungen nehmen mag, so ist die B. der zuerst gedachten gleichförmig beschleunigten Bew. zugleich die B. der ungleichförmig beschleunigten Bew. in dem gedachten Augenblick. (Das Nähere s. Bewegung, ungleichförmig veränderliche, No. 3.)

5. Wenn bei einer ungleichförmigen Bew. die auf einander folgenden Geschwindigkeiten und Wege anstatt zu wachsen, in demselben Sinne abnehmen, so ist die Bew. eine verzögerte, die B. heiſst Verzögerung, und diese ist in jedem einzelnen Falle gleichbedeutend und gleich groſs mit der B., wenn man diese negativ nimmt; daher sagt man auch statt Verzögerung, die B. sei negativ und hat positive und negative B.

**Beständige Gröſse,** constante Gröſse unveränderliche Gröſse ist in der Analysis jede Gröſse, die bei allen Rechnungsoperationen ungeändert bleibt. In dem Art. Analysis ist pag. 66 beispielsweise die Formel

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x}$$

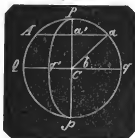
aufgeführt worden, und gezeigt, daſs der Werth $y$ von $a^{n-1}$ bis $na^{n-1}$ alle Werthe annehmen kann, je nachdem man $x$ von 0 bis $a$ wachsen läſst. Es ist mithin $x$ eine veränderliche Gröſse, $a$ und $n$ dagegen bleiben in allen jenen möglichen Werthen von $y$ ungeändert, beide sind b. Gröſsen.

**Besteck** ist die in geographischer Länge und Breite zu ermittelnde Lage eines Orts, wohin der Schiffer von einem der Lage nach ihm bekannten Orte aus nach längerem geradlinigen Curs gekommen ist. Die Ermittelung der Lage geschieht durch die Besteckrechnung, welche dem Schiffer durch nautische Tabellen, die er auf seinen Reisen zur Hand hat, erleichtert werden; das Wissenschaftliche der Rechnung s. den folgenden Art.

**Besteckrechnung,** Ermittelung des Bestecks (s. d. vor. Art.) geschieht durch das Loggen, mit welchem der Schiffer die Geschwindigkeit des Schiffs erfährt, und welches während des geradlinigen Laufs verschiedentliche Male geschieht, wonach die mittlere Geschwindigkeit hervorgeht; eine richtige Uhr zeigt die Zeit des Laufs, mit dieser findet der Schiffer die Länge des Curses in Seemeilen, deren 60 auf einen Grad gehen, so daſs in der Linie des Aequators $Qq$ nach Ost oder nach West (unter dem Curswinkel $= 90°$) gesteuert oder in der Linie eines Meridians $PQp$, $Pq'p$, $Pqp$ nach Süd oder Nord (unter dem Curswinkel $= 0$) gesteuert, jede Seemeile nach Ost im Aequator eine Minute mehr östliche oder weniger westliche Länge, nach West eine Minute mehr west-

liche oder weniger östliche Länge; in irgend einem Meridian nach Nord eine

Fig. 221.




Minute mehr nördliche oder weniger südliche Breite, nach Süd eine Minute mehr südliche oder weniger nördliche Breite giebt.

Steuert man aber in irgend einer nördlichen oder südlichen geographischen Br. $b$ nach Ost oder West, also nach $Aa$ oder $aA$, nennt die Anzahl Minnten, die in dem Parallelkreis $Aa$ (von 360°) per Seemeile zurückgelegt werden $x$, so hat man

1 Min. : $x$ Min. = $aa'$ : ($Cq$ oder $Ca$)

woraus

$$x = \frac{Ca}{aa'} = \frac{1}{\cos b} = \sec b$$

Unter den nantischen Tabellen befindet sich auch eine, in welcher für alle Breiten von Grad zu Grad von 0 bis 90° die Secanten angegeben sind. Hat der Schiffer z. B. unter 58° 20' 10" südlicher Breite von einem Ort unter 69° 40' westl. Länge (unterhalb des Cap Horn) einen östlichen Curs gemacht von 65 Seemeilen, so findet er in der Tabelle:

$$\begin{aligned} \text{Secante } 58° &= 1,836 \\ \text{Secante } 59° &= 1,887 \\ \hline \text{Differenz } & \phantom{=} 0,051 \end{aligned}$$

also

$$60' : 20'\ 10'' = 0,051 : d$$

$$d = \frac{20\frac{1}{6} \times 0,051}{60} = 0,017$$

daher giebt 58° 20' 10" die Secante 1,836 + 0,017 = 1,853, und des Schiffes Weg östlich ist 1,853 × 65 = 120,445 Minnten = 2° ½' und das Besteck ist 69° 40' − 2° ½' = 67° 39½' westliche Länge.

Man revidirt das Resultat durch Zeichnung, wenn man einen rechten Winkel $aa'C$ zeichnet, nach einem Mafsstab $aa'$ = 65 Theile macht, den $\angle a'aC = 58\frac{1}{3}°$ mit dem Transporteur aufträgt, und die Hypothenuse mifst, welche circa 120 Theile enthalten mufs.

Wenn weder in einem Parallelkreise noch in einem Meridian der Curs genommen wird, so ist es ein Curs in loxodromischer Linie, und die Bestimmung des Bestecks ist etwas umständlicher. Ein Beispiel soll dies erläutern:

Das Schiff befinde sich in $A$, 36° 15' nördl. Breite und 28° 18' westl. Länge von Greenwich, also unterhalb der Azoren, nehme einen graden Curs $SSW$ (Südsüdwest) also unter einem Curswinkel 22½°, und mache einen Weg von 115 Seemeilen = $AB$, so ist die Breitenänderung von $B = AB \cos BAC = 115 \cos 22\frac{1}{2}°$ Minuten = $AC$.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 115 &= 2,0606978 \\ \log \cos 22\tfrac{1}{2}° &= 9,9656153 - 10 \\ \hline \log \text{Product} &= 2,0263131 \end{aligned}$$

$num = 115 \times \cos 22\frac{1}{2}° = 106,25$ M. − 1° 46'

| | |
|---|---|
| $A$ befand sich unter | 36° 15' $NB$ |
| $B$ befindet sich unter | 34° 29' $NB$ |

Die Längenänderung würde in $A$ bei westlicher Steuerung betragen haben: Distanz × Sec. 36° 15'; in $B$ bei westlicher

Fig. 222.




Steuerung: Distanz × Sec. 34° 29'. Es ist also die Secante der mittleren Breite von ½(36° 15' + 34° 29') = 35° 22'. Mithin ist die Längenänderung von $B$ gegen $A$ = $115 \times \sin 22\frac{1}{2}° \times \sec 35° 22'$.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 115 &= 2,0606978 \\ \log \sin 22\tfrac{1}{2}° &= 9,5828397 - 10 \\ \hline \log \text{Product} &= 1,6435375 \\ \log \cos 35° 22' &= 9,9114051 - 10 \\ \hline \log \text{Quotient} &= 1,7321324 \end{aligned}$$

$num$ = Längenänderung = 54'

| | |
|---|---|
| $A$ befand sich unter | 28° 18' $WL$ |
| $B$ befindet sich unter | 29° 12' $WL$ |

**Bestimmte Aufgabe** ist eine A., die nur ein Resultat zuläfst, wobei zu bemerken, dafs eine Gleichung vom $n$ten Grade, welche

bekanntlich *n* Werthe giebt, eigentlich also *n* Resultate zuläfst, zu den bestimmten Aufgaben gerechnet wird, weil diese *n* Werthe in der Natur der Gleichung als Product von *n* Factoren begründet sind, von denen jeder ein ganz bestimmter Werth ist. In dem Art.: Bahn der Weltkörper, No. 10 ist die dort gestellte Aufgabe dadurch ganz unbestimmt geblieben, dafs die aus der Entwickelung hervorgegangene quadratische Gleichung ihrer Natur gemäfs 2 Werthe zuläfst, und es hat daher zu Lösung der Aufgabe in No. 11 ein anderer Weg eingeschlagen werden müssen. Diophantische Gleichungen, deren weniger als unbekannte Gröfsen gegeben sind, gehören zu den unbestimmten Aufgaben. Die Aufgabe: über einer gegebenen geraden Linie ein Dreieck zu zeichnen, dessen ihr gegenüberliegender Winkel gegeben ist, ist eine unbestimmte A., denn es existiren unzählige solcher Dreiecke, und der geometrische Ort aller Dreiecksspitzen liegt in dem Bogen desjenigen Kreises, dessen Sehne die gegebene Linie, und dessen Peripheriewinkel der gegebene Winkel ist.

**Bestreben zur Bewegung** äufsert ein Körper, wenn er gehindert wird, eine Bewegung zu beginnen, und zwar gegen das Hindernifs durch Druck, das B. selbst erhält der Körper durch eine auf ihn wirkende Kraft. Der Druck des Getreides auf das Gebälk eines Speichers ist die Aeufserung des Bestrebens der Körner, dem Mittelpunkt der Erde sich zu nähern, und sie erhalten dies B. durch die im Erdmittel vereint wirkende Anziehungskraft des Erdkörpers.

**Beugung des Lichtstrahls** s. v. w. Ablenkung des Lichtstrahls.

**Bewegende Kraft** ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkend, dessen Bewegung hervorbringt, und die daher auch nach derselben Richtung wirkt, in welcher die Bew. geschieht. Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so kann der Körper nur in einer Richtung sich bewegen; die nach dieser mittleren Richtung wirkende aus allen Kräften sich zusammensetzende Mittelkraft ist dann die b. K.

**Beweglicher Punkt** am Hebel ist der Punkt desselben, aus welchem die Last gewältigt wird.

**Beweglichkeit** ist die allgemeine Eigenschaft aller Körper, sich zu bewegen, d. h. durch Einwirkung von Kräften auf ihren Ort zu ändern; der Stoff wird daher auch das Bewegliche im Raum genannt.

**Bewegung** ist stete Ortsänderung, im Gegensatz von Ruhe, die Beibehaltung des Orts. B. veranschaulicht die einfachen Begriffe: Ausdehnung und Raum. Aendert ein Massenpunkt seinen Ort, und verfolgt man im Geiste diese Thätigkeit, nämlich die Summe der einzelnen Orte, die er aufeinanderfolgend einnimmt, so hat man eine Ausdehnung, die Linie; ändert die Linie ihren Ort, und verfolgt man die von ihr aufeinanderfolgend eingenommenen Lagen, so hat man die Ausdehnung einer Ausdehnung, die Fläche: und ändert diese ihren Ort, so beschreibt sie einen Körper. Dafs die Ortsänderung stetig ist, besagt, dafs die Masse nicht in demselben Augenblick verschiedene Orte einnimmt, sondern dafs dies nur in aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken geschehen kann, und der Begriff B. begreift also 3 Merkmale in sich; die sich bewegende Masse, den Raum und die Zeit.

Die Linie, welche ein Massenpunkt, oder wenn eine Masse sich bewegt, deren Mittelpunkt während seiner B. durchläuft, heifst der Weg der Masse.

Eine B. ist entweder geradlinig oder krummlinig; befindet sich die krumme Linie in einerlei Ebene, so ist die B. in einer ebenen Bahn, ist die krumme Linie in jedem nachfolgenden Zeitaugenblick in einer anderen Ebene, so heifst die B. eine B. frei im Raum.

2. Die B. heifst fortschreitend, translatorisch, wenn alle Punkte der Masse parallele Linien durchlaufen. Die B. heifst Centralbewegung, wenn die Masse eine krumme, in sich geschlossene Linie immer wiederholend durchläuft. Durchlaufen die Punkte einer Masse Kreise, deren Mittelpunkte in einerlei, innerhalb der Masse befindlichen geraden Linie liegen, so ist die B. drehend, rotirend; die ebengedachte Gerade, zugleich diejenige, deren Punkte die einzigen der Masse sind, die an der B. nicht Theil nehmen, heifst Drehungsaxe, Drehaxe, Axe.

3. Eine B. heifst gleichförmig, wenn die bewegte Masse in gleichen auf einander folgenden, noch so kleinen Zeiten gleiche Wege durchläuft.

Eine B. heifst ungleichförmig oder veränderlich, wenn sie in gleichen, auf einander folgenden, noch so kleinen Zeiten stets ungleiche Wege durchläuft. Sind diese aufeinanderfolgenden, noch so kleinen Wege stets zunehmend, so ist die B. eine beschleunigte, sind sie stets abnehmend, so ist die B. eine verzögerte.

Beträgt bei der ungleichförmigen B. die

Zunahme oder die Abnahme des Weges in gleichen aufeinanderfolgenden noch so kleinen Zeiten immer gleichviel, so heifst die B. eine gleichförmig veränderliche, und zwar im ersten Fall eine gleichförmig beschleunigte, im zweiten eine gleichförmig verzögerte B. Die gleich grofs bleibende Aenderung des Weges innerhalb der Zeit-Einheit (Secunde) heifst die Beschleunigung; welche bei der beschleunigten B. positiv, bei der verzögerten B. negativ wird.

**Bewegung, absolute**, s. absolute Bewegung.

**Bewegung, beschleunigte**, s. beschleunigte Bewegung und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

**Bewegung, gleichförmige**, ist diejenige B., bei welcher in gleichen aufeinanderfolgenden noch so kleinen Zeiten immer gleiche Wege durchlaufen werden. Legt eine Masse $M$ in irgend einer Zeit $t$ den Weg $w$ zurück, eine Masse $M'$ in derselben Zeit $t$ den Weg $2w$, so sagt man: $M'$ habe die doppelte Geschwindigkeit von $M$. Durchläuft eine Masse $M''$ den Weg $3w$ in der Zeit $t$, so hat $M''$ die dreifache Geschw. von $M$, und die Geschw. von $M'$ und $M''$ verhalten sich wie 2 : 3. Ueberhaupt nennt man das Verhältnifs der in gleichen Zeiten gleichförmig durchlaufenen Wege zweier Massen die Geschwindigkeiten beider Massen in Beziehung auf einander. Der Begriff der Geschwindigkeit ist also relativ, und will man die gleichförmige B. einer Masse bestimmen, so mufs man deren Weg in einer bestimmten Zeit mit dem Weg einer anderen bekannten g. B. vergleichen. Es ist also ein allgemeines Maafs als Bewegungs-Einheit aufzustellen erforderlich, um alle übrigen g. B. danach bestimmen zu können, und hierfür wählt man natürlich diejenige B., welche am einfachsten bestimmt wird, nämlich diejenige, wo in jeder Zeit-Einheit (Secunde, Minute, ....) die Längen-Einheit (Fufs, Ruthe, Meile ....) durchlaufen wird. Jede andere g. B. wird dann durch eine absolute Zahl bestimmt, welche ausdrückt, das Wievielfache der Längen-Einheit der in der Zeit-Einheit zurückgelegte Weg beträgt.

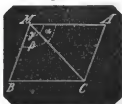
Ist für die Bewegungs-Einheit (1 Fufs in 1 Secunde) der Weg $\sigma$ in der Zeit $\tau$ zurückgelegt, so ist offenbar $\sigma = \tau$ (12 Fufs in 12 Secunden), nämlich Weg und Zeit werden durch dieselbe absolute Zahl ausgedrückt. Ist dagegen bei irgend einer andern B. $c$ die Geschw. ($c$ Fufs in 1 Sec.), und $s$ der Weg in der Zeit $t$, so ist $s = c \cdot t$. Bei 5 Fufs Geschw. ist der Weg 60 Fufs in 12 Sec.; 60 Fufs = 5 · 12 Fufs.

Aus
$$s = c \cdot t \tag{1}$$
folgt
$$c = \frac{s}{t} \tag{2}$$
$$t = \frac{s}{c} \tag{3}$$

2. Bewegt sich eine Masse in gerader Linie, so ist diese, vom Anfangspunkt der B. an gerechnet, zugleich die Richtung der B., und diese bleibt folglich bis an's Ende der B. dieselbe. Bewegt sich dagegen eine Masse in einer krummen Linie, so hat die B in jedem Augenblick eine andere Richtung, und in jedem einzelnen Punkt ihrer Bahn ist die Richtung der B. diejenige gerade Linie, welche der krummlinigen Bahn dort am nächsten kommt, also die Tangente an der Bahn in demselben Punkt.

3. Es seien $MA$, $MB$ die Seitenbewegungen der Masse $M$ (s. Bahn No. 2, Fig. 163) so ist die Diagonale $MC$ des ⋕ $MACB$ die aus ihnen erfolgende mittlere B., die wirkliche B. der Masse $M$ und die Längen $MA$, $MB$, $MC$ drücken das Verhältnifs

Fig. 223.




der in einerlei Zeit zurückgelegten Wege aus, und sollen durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. Setzt man den $\angle AMB$ zwischen den Seitenbewegungen $a$, $b = \gamma$, den $\angle AMC$ zwischen dem Seitenwege $a$ und dem mittleren $c = \alpha$, den $\angle BMC$ zwischen dem Seitenwege $b$ und dem mittleren $= \beta$, so hat man nach der Geometrie:

A. Wenn die 3 Wege $a$, $b$, $c$ gegeben sind

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$
$$\cos\alpha = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos\beta = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

B. Wenn die beiden Seitenwege $a$, $b$ und der von ihnen eingeschlossene $\angle\gamma$ gegeben sind

$$c^2 = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma)}$$

$$tg\, \alpha = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}$$

$$tg\, \beta = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

C. Wenn die beiden Seitenwege $a$, $b$ und einer der beiden $\angle \alpha$ oder $\beta$ gegeben sind, welche einer der Seitenwege mit dem mittleren Weg bildet

$$c = a \cos \alpha + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$$
$$= b \cos \beta + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{b} \sin \alpha$$

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

D. Wenn der mittlere Weg $c$, einer der beiden Seitenwege $a$, und der von beiden eingeschlossene $\angle \alpha$ gegeben sind.

$$b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ac \cos \alpha}$$

$$tg\, \beta = \frac{a \sin \alpha}{c - a \cos \alpha}$$

$$tg\, \gamma = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha - c}$$

E. Wenn der mittlere Weg $c$, einer der beiden Seitenwege $a$, und der von dem Mittelwege und dem zweiten Seitenwege eingeschlossene $\angle \beta$ gegeben sind.

$$b = c \cos \beta + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \sin \beta$$

woraus $\alpha = \gamma - \beta.$

F. Wenn der mittlere Weg $c$, einer der beiden Seitenwege $a$, und der von beiden Seitenwegen $a$, $b$ eingeschlossene $\angle \gamma$ gegeben sind.

$$b = - a \cos \gamma + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \gamma}$$

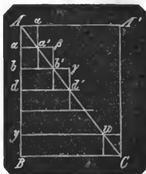
$$\sin \beta = \frac{a}{c} \sin \gamma$$

woraus $\alpha = \gamma - \beta$

**Bewegung, gleichförmig beschleunigte.** Diejenige B., bei welcher in gleichen auf einander folgenden noch so kleinen Zeiten die Wege immer um gleichviel wachsen. In Folge des Beharrungsvermögens ruhender und bewegter Massen ist solche B. nicht anders möglich, als dafs eine anziehende oder abstofsende Kraft in jedem Augenblick gleich stark zu wirken beibleibt, und dadurch den ersten auf die Masse ausgeübten Impuls in jedem Augenblick wiederholt. Eine solche Kraft $p$ führe eine Masse $M$ innerhalb einer sehr kleinen Zeit $t$ durch den Weg $w$, so würde $M$ wegen der Beharrung $B$ in dem zweiten $t$ wieder $w$ durchlaufen, durch $P$ erhält er aber nochmals den Weg $w$, also überhaupt $2w$, im dritten $t$ führt nun $B$ die Masse $M$ durch den Weg $2w$, durch $P$ erhält sie abermals $w$, mithin durchläuft sie in dem dritten $t$ den Weg $3w$ u. s. w. in der $n$ten Zeit $t$ den Weg $(n-1)\, w$ durch $B$, $w$ durch $P$, überhaupt $nw$.

Für die sehr kleine Zeit $t$ als Einheit ist also $w$ als gleicher Wachsthum des Weges die Beschleunigung; allein es ist hierbei angenommen, dafs jeder Weg innerhalb der Zeit $t$ gleichförmig durchlaufen wird.

Fig. 224.




Setzt man die senkrechte Linie $AB =$ der Zeit $T$, die waagerechte $BC =$ der nach Verlauf von $T$ erlangten Geschw. $C$, so würde, wenn auch in $A$ die Geschw. $C$ gewesen wäre, der Weg $S = C \cdot T = AB \times BC$ $= \# AA'BC$ sein; es ist aber die Geschw. in $A = 0$ und wächst bis $B$ zu $C$.

Theilt man nun $AB$ in $n$ gleiche Theile, so bedeutet jeder Theil wie $Aa$, $ab$ u. s. w. $\frac{1}{n} T$, und da die Geschwindigkeiten in jeder noch so kleinen Zeit um gleichviel wachsen, so mufs, wenn nach dem ersten $\frac{T}{n}$ in $a$ die Geschw. $= c$ ist, die Geschw. nach dem zweiten $\frac{T}{n}$ in $b = 2c$, in $d = 3c$ .... in $B = C = nc$ sein. Zieht man daher die Diagonale $AC$, und zieht $aa'$ $bb'$ $dd'$ .... $\# BC$, so drücken die Längen $aa'$, $bb'$, $dd'$ .... $BC$ die in $a$, $b$, $d$ .... $B$ stattfindenden Geschwindigkeiten aus.

Nun ist in $A$ die Geschw. $= 0$, wäre sie nach Verlauf von $\frac{1}{n} T$ ebenfalls $= 0$, so würde die Masse $M$ den Weg $= 0$ durchlaufen, wäre die Geschw. von Anfang an $= aa' = c$, so würde $M$ den Weg $Aa \cdot aa'$

= ⌗ *aα* durchlaufen. Jener Weg 0 ist zu klein, der Weg *aa* zu grofs.

In dem zweiten $\frac{T}{n} = ab$ ist die Anfangsgeschw. $= aa'$, die Endgeschw. $= bb'$. Nimmt man an, dafs der Weg gleichförmig mit *aa'* durchlaufen wird, so ist offenbar der Weg $ab \cdot aa' =$ ⌗ *ba* zu klein; nimmt man an, dafs er mit der Geschw. *bb'* durchlaufen wird, so ist der Weg $ab \cdot bb' =$ ⌗ *bβ* zu grofs.

Ebenso ist für das dritte $\frac{T}{n} = bd$ das ⌗ *db'* als Weg zu klein, das ⌗ *dγ* zu grofs u. s. f. bis zum Ende der Zeit *T* in *B*, wo der Weg in dem letzten $\frac{T}{n}$ mit *yw* durchlaufen zu klein, mit *BC* durchlaufen zu grofs sein würde.

Die Summe der Rechtecke ist die Summe der Wege, welche die Masse *M* innerhalb der Zeit *T* zurücklegt; die Rechtecke unterhalb der Diagonale, deren Oberseiten *aa'*, *bb'* u. s. w. sind, geben den Weg zu klein, die Rechtecke, deren Unterseiten die Linien *aa'*, *bb'* u. s. w., geben ihn zu grofs an. Zwischen beiden Summen liegt aber das △ *ABC*, und man kann mit dem Wachsthum von *n* die gleichen Unterschiedsrechtecke wie *aα* beliebig klein werden, also beide Rechteckssummen dem △ *ABC* beliebig nahe kommen lassen, woher △ *ABC* den wirklichen Weg der Masse *M* von der Geschw. 0 bis zur Geschw. $C = BC$ innerhalb der Zeit $T = AB$ bezeichnet.

Der Flächen-Inhalt des △ *ABC* ist aber

$$\tfrac{1}{2} BC \cdot AB = \tfrac{1}{2} C \cdot T$$

folglich ist allgemein

$$S = \tfrac{1}{2} CT$$

2. Wenn nach Verlauf von *T* die absolute Kraft *P* auf die Masse *M* zu wirken aufhörte, so würde *M* in Folge des Beharrungsvermögens in der folgenden Zeit *T* den Weg *CT* zurücklegen. Es ist also allgemein der mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 in einer Zeit *T* gleichförmig beschleunigt durchlaufene Weg gleich der Hälfte des Weges, der mit der erlangten Endgeschwindigkeit in der folgenden gleichen Zeit *T* gleichförmig durchlaufen werden würde.

3. Setzt man $T = 1$ Secunde, so ist der Weg $S = \frac{1}{2} C$. Beim freien Fall ist aber erfahrungsmäfsig der Weg *S* in der ersten Sec. = $15\frac{5}{8}$ Fufs. Dieser Weg in der ersten Secunde wird die Beschleunigung (s. d.) beim freien Fall genannt und mit dem Buchstaben *g* bezeichnet.

Es ist nun die Endgeschwindigkeit nach einer Secunde $c = 2g$. In der zweiten Secunde wird vermöge der Beharrung der Weg $2g$, vermöge der Schwerkraft der Weg $g$, überhaupt der Weg $3g$ zurückgelegt; in beiden Secunden zusammen der Weg $4g = S$; so wie nach dem Obigen $S = \frac{1}{2} CT = \frac{1}{2} 2C = C = 4g$; in der dritten Sec. vermöge Beharrung also der Weg $4g$, vermöge der Schwerkraft $g$, überhaupt $5g$ u. s. w.

Die Beschleunigung *g* bleibt constant, die Wege in den auf einander folgenden Secunden sind $g$, $3g$, $5g$ .... der Wachsthum $2g$ derselben pro Secunde bleibt ebenfalls constant, desgl. der Wachsthum der Geschwindigkeiten $2g$, $4g$, $6g$ mit $2g$.

Es ist also der freie Fall eine gleichförmig beschleunigte B., und so jede andere B., welche durch eine permanent einwirkende gleich grofs bleibende Kraft hervorgebracht wird.

4. Da bei jeder g. b. B. die Geschwindigkeiten in gleichen auf einander folgenden Zeiten gleichviel wachsen, so verhalten sich die von der Geschw. = 0 ab entstandenen Endgeschwindigkeiten *C*, *c* wie die von da ab verflossenen Zeiten *T*, *t*

oder $C : c = T : t$

Nun ist (nach No. 1)

$$S = \tfrac{1}{2} CT$$

also auch $s = \frac{1}{2} ct$

daher $S : s = CT : ct$

hierzu $C : c = T : t$

giebt $S : s = T^2 : t^2$

und $S : s = C^2 : c^2$

Beim freien Fall ist in der Zeit $t = 1$ der Weg $= g$ und die Geschw. $= 2g$

Mithin $S : g = T^2 : 1$

woraus $S = gT^2$

und $S : g = C^2 : (2g)^2$

woraus $S = \dfrac{C^2}{4g}$

Nennt man bei einer anderen g. b. B. den Weg in der ersten Secunde (die Beschleunigung) $= G$, so ist allgemein

$$S = \tfrac{1}{2} CT \qquad (1)$$

$$S = GT^2 \qquad (2)$$

$$S = \frac{C^2}{4G} \qquad (3)$$

Aus 2 und 3 erhält man

$$C = 2GT \qquad (4)$$

Aus 1: $$C = \frac{2S}{T} \qquad (5)$$

Aus 3: $$C = 2\sqrt{GS} \qquad (6)$$

Ferner aus 1, 2, 4:

$$T = \frac{C}{2G} \quad (7)$$

$$T = \sqrt{\frac{S}{G}} \quad (8)$$

$$T = \frac{2S}{C} \quad (9)$$

Endlich aus 2, 3 und 7

$$G = \frac{S}{T^2} \quad (10)$$

$$G = \frac{C^2}{4S} \quad (11)$$

$$G = \frac{C}{2T} \quad (12)$$

5. Es fange die zu betrachtende g. b. B. nicht von der Ruhe an; der in der Zeit $t$ zurückgelegte Weg sei $= s$, die Geschw. im Anfang dieses Weges $= c$, am Ende desselben $= C$, die Beschleunigung, nämlich der Weg, der von der Ruhe aus in der ersten Sec. zurückgelegt wird $= G$, so ist (nach No. 4) der Zuwachs der Geschw. in jeder Sec. $= 2G$, also in $t$ Sec. $= 2\,Gt$, daher

$$C = c + 2Gt \quad (1)$$

Um den Weg zu erfahren, der in der Zeit $t$ zurückgelegt wird, hat man den von der Ruhe aus bis zur Endgeschw. $c$ zurückgelegt zu denkenden Weg (nach No. 4, Formel 3) $s' = \frac{c^2}{4G}$ den Weg $S'$ von der Ruhe bis zur Endgeschw. $C = \frac{C^2}{4G}$ mithin in der Zeit $t$ den Weg

$$s = \frac{C^2 - c^2}{4G} \quad (2)$$

Aus der Verbindung von 1 und 2 durch Elimination von $G$ erhält man noch den Weg

$$s = \frac{c + C}{2}\, t \quad (3)$$

6. Man kann den Ausdruck für den Weg $s$ auch ohne Hülfe der beiden Wege $S'$ und $s'$, die nicht wirklich zurückgelegt werden, entwickeln.

Denkt man sich nämlich die Zeit $t$ in $n$ gleiche Theile getheilt, so ist der Zuwachs an Geschw. in jedem $\frac{t}{n}$ gleich grofs, dieser betrage $\Delta$, so sind die Geschwindigkeiten

$$c,\ c + \Delta,\ c + 2\Delta,\ c + 3\Delta \ldots.\ c + n\Delta$$

Denkt man sich in jedem Zeittheilchen $\frac{t}{n}$ den Weg gleichförmig zurückgelegt, so ist, wie schon No. 1 figürlich nachweist, die Summe aller Wege kleiner als der wirklich zurückgelegte Weg $s$, wenn man die Wege mit den Anfangsgeschwindigkeiten, und gröfser als $s$, wenn man sie mit den Endgeschwindigkeiten zurückgelegt annimmt.

Die erste Summe beträgt

$$\frac{t}{n}\, c + \frac{t}{n}(c + \Delta) + \frac{t}{n}(c + 2\Delta) + \ldots.\ \frac{t}{n}[c + (n-1)\Delta]$$

$$= \frac{t}{n} \cdot \frac{2c + (n-1)\Delta}{2}\, n = tc + t \cdot \frac{n-1}{2}\, \Delta < s$$

Die zweite Summe beträgt

$$\frac{t}{n}(c + \Delta) + \frac{t}{n}(c + 2\Delta) + \ldots..\ \frac{t}{n}(c + n\Delta)$$

$$= \frac{t}{n} \cdot \frac{2c + (n+1)\Delta}{2}\, n = tc + t \cdot \frac{n+1}{2}\, \Delta > s$$

Nun ist offenbar

$$c + n\Delta = C$$

daher

$$\Delta = \frac{C - c}{n}$$

also

$$tc + \frac{n-1}{2n}(C - c)t < s < tc + \frac{n+1}{2n}(C - c)t$$

Zwischen den beiden Summen ist nicht nur $s$, sondern auch die Gröfse begriffen:

$$tc + \frac{n}{2n}(C - c)t = \frac{C + c}{2}\, t$$

und da mit dem beliebigen Wachsthum von $n$ die Differenz beider Summen beliebig klein werden kann, so ist

$$s = \frac{C + c}{2}\, t$$

d. h. der Weg, der bei einer g. b. B. mit den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten $c$ und $C$ zurückgelegt wird, ist gleich dem Wege, der mit dem arithmetischen Mittel

beider Geschwindigkeiten gleichförmig zurückgelegt werden würde.

7. Bei der g. b. B. sind, wenn die B. von der Ruhe ab geht, zur Bestimmung der wissenswürdigen Gröfsen $G$, $C$, $T$, $S$ nur 2 derselben als gegeben erforderlich, und es existiren die in No. 4 angegebenen 12 Formeln.

Hat aber die g. b. B. eine Anfangsgeschw. $c$, so sind mit dieser 5 Elemente, die zu bestimmen sind, und für jedes müssen 3 der übrigen Elemente gegeben sein. Da 5 Elemente 10 Combinationen jedes mit 3 Elementen zulassen, und da mit jeden 3 gegebenen Elementen 2 andre bestimmt werden, so hat man 20 Aufgaben, welche in folgenden 20 Formeln ausgedrückt sind, und die alle aus den No. 5 erwiesenen 3 Gesetzen hergeleitet werden:

1. $S = \frac{c + C}{2} T$
2. $S = \frac{C^2 - c^2}{4G}$
3. $S = CT - GT^2$
4. $S = cT + GT^2$
5. $C = \frac{2S}{T} - c$
6. $C = \sqrt{4GS + c^2}$
7. $C = \frac{S}{T} + GT$
8. $C = c + 2GT$
9. $c = \frac{2S}{T} - C$
10. $c = \frac{S}{T} - GT$
11. $c = \sqrt{C^2 - 4GS}$
12. $c = C - 2GT$
13. $T = \frac{2S}{C + c}$
14. $T = \frac{C - \sqrt{C^2 - 4GS}}{2G}$
15. $T = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4GS}}{2G}$
16. $T = \frac{C - c}{2G}$
17. $G = \frac{C^2 - c^2}{4S}$
18. $G = \frac{CT - S}{T^2}$
19. $G = \frac{S - cT}{T^2}$
20. $G = \frac{C - c}{2T}$

**Bewegung, gleichförmig verzögerte.** Diejenige B., bei welcher in gleichen auf einander folgenden noch so kleinen Zeiten die Wege immer um gleich viel abnehmen. In Folge des Beharrungsgesetzes in Beziehung auf Ruhe und Bewegung von Massen ist solche B. nicht anders denkbar, als dafs eine Kraft einer gleichförmig sich bewegenden Masse fortdauernd entgegenwirkt, und in dem Art.: Bahn geworfener Körper, No. 5, ist gezeigt, dafs die Gesetze beim freien Aufsteigen dieselben sind, wie beim freien Fall, eben so findet dies statt bei jeder anderen g. v. B.

Wenn ein Körper, der von der Ruhe mit der Beschleunigung $G$ (s. d. vor. Art.) sich gleichförmig beschleunigt $T$ Secunden lang fortbewegt, so dafs er den Weg $S$ durchläuft, und die Endgeschw. $C$ erlangt, so durchläuft derselbe Körper, wenn er mit der Anfangsgeschw. $C$ sich gleichförmig verzögert $T$ Secunden lang fortbewegt, den Weg $S$, und erlangt die Endgeschw. = Null, wenn die Beschleunigung $G$ während seiner Bewegung als Verzögerung wirkt. Ueberhaupt zeigt die Entwickelung der Gesetze für die gleichförmig beschleunigte B., dafs man nur nöthig hat, $g$ und $G$ negativ zu nehmen, um die Gesetze der g. v. B. zu erhalten, wie folgt.

Der vor. Art. No. 1 beweist, dafs $\triangle ABC$ (Fig. 224) der Weg ist, den eine Masse $M$ von der Ruhe in $A$ aus und in der Zeit $(T) = AB$ zurücklegt, wenn er die Endgeschw. $(C) = BC$ erlangt. Dieselbe Construction und dieselben Schlüsse gelten offenbar, wenn man $AB = T$ als Zeit, $BC = C$ als Anfangsgeschwindigkeit gelten läfst, und statt mit dem $\#\, a\alpha$, mit dem untersten $\#\, xC$ zu erklären beginnt.

Der vor. Art. No. 3 auf die g. v. B. angewendet, ist schon in dem Art.: Bahn geworfener Körper, No. 2 bis 5 geschehen, und was der vor. Art. No. 4 besagt, gilt auch von der g. v. B., wenn man statt der Worte: „von 0 ab bis zur Endgeschwindigkeit" die Worte: „von der Anfangsgeschw. bis zu Null" setzt. Demnach gelten die dort aufgestellten 12 Formeln auch für die g. v. B.

Eine gleiche Bewandtnifs hat es mit den Lehren des vor. Art., No. 5 bis 7: Man hat nur nöthig, $C$ als Anfangsgeschwindigkeit und $c$ als Endgeschwindigkeit zu setzen, und die Worte ohne Weiteres beizubehalten, um die Gesetze der g. v. B. zu erhalten, wobei zugleich auf den Art.: Beschleunigung verwiesen wird.

Die in No. 7. aufgestellten 20 Formeln gelten also auch für die g. v. B., wenn man

*C* als Anfangsgeschwindigkeit,
*c* als Endgeschwindigkeit und
*G* als Verzögerung ansieht.

**Bewegung, relative** s. u. absolute Bewegung.

**Bewegung, ungleichförmig veränderliche.** Die gleichförmige und die beiden gleichförmig veränderlichen B. sind Fortschreitungen nach bestimmten Gesetzen, die von der Wissenschaft aufgefafst und zu Grunde gelegt, zu Schlüssen führen, nach welchen die Berechnung dahin gehöriger unbekannter Gröfsen aus bekannten möglich wird. Eine B., die ungleichförmig sich ändert, kann ebenfalls nur dann Untersuchungen möglich machen, wenn auch die Ungleichförmigkeit bestimmten Gesetzen folgt, die zu Grunde zu legen sind, weil Gesetzloses aufser aller wissenschaftlichen Behandlung liegt.

Es sei demnach allgemein in der Zeit $t$ der Weg $s$ zurückgelegt, und die Endgeschwindigkeit sei $v$. Aendert sich $t$ um $\triangle t$, so ändern sich offenbar auch $s$ und $v$, und die zugehörigen Aenderungen seien $\triangle s$ und $\triangle v$, so dafs in der Zeit $\triangle t$ der Weg $\triangle s$ mit der Endgeschw. $v + \triangle v$ durchlaufen wird, und zwar so, dafs $\triangle t$, $\triangle s$, $\triangle v$ nach irgend einem Gesetze Zusammenhang haben. Je nachdem $\triangle v$ additiv oder subtractiv ist, wird die Bewegung beschleunigt oder verzögert. Ist $\triangle v$ additiv, so ist $\triangle s$ gröfser als der Weg $v\triangle t$, der in der Zeit $\triangle t$ mit der Anfangsgeschw. $v$ gleichförmig zurückgelegt wird, und kleiner als der Weg $(v + \triangle v)\triangle t$, der in der Zeit $\triangle t$ mit der Endgeschw. $(v + \triangle v)$ gleichförmig zurückgelegt wird, oder

$$v\triangle t > \triangle s > (v + \triangle v)\triangle t$$

Ist $\triangle v$ subtractiv, so ist

$$v\triangle t < \triangle s < (v + \triangle v)\triangle t$$

Es folgt aus beiden Ungleichungen

$$\text{entweder}\quad v > \frac{\triangle s}{\triangle t} > v + \triangle v$$

$$\text{oder}\quad v < \frac{\triangle s}{\triangle t} < v + \triangle v$$

In beiden Fällen können die beiden Endgröfsen mit beliebiger Abnahme von $\triangle v$ einander beliebig nahe gebracht werden, und $v$ ist deren Grenzwerth. Hierdurch kommen beide auch der eingeschlossenen Gröfse $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ beliebig nahe und beider Grenzwerth $v$ ist somit gleich dem Grenzwerth der eingeschlossenen Gröfse. Dieser Grenzwerth ist aber offenbar das Differenzial des Weges $s$ als Function der Zeit $t$ oder $= \frac{\partial s}{\partial t}$ und man hat sowohl für die beschleunigte als die verzögerte B.

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} \qquad (1)$$

hieraus

$$s = \int v\,\partial t + \text{Const.} \qquad (2)$$

und

$$t = \int \frac{1}{v}\,\partial s + \text{Const.} \qquad (3)$$

Man findet also den Weg $s$, wenn die Endgeschw. $v$ als Function der während Zurücklegung des Weges verflossenen Zeit $t$ gegeben ist, und die während des zurückgelegten Weges $s$ verflossene Zeit $t$, wenn die erlangte Endgeschwindigkeit $v$ als Function desselben Weges gegeben ist.

Zur Bestimmung der Constante hat man gegenseitig für $t = 0$ auch $s = 0$.

2. Die hier entwickelten Gesetze sind ganz allgemein, und gelten demnach auch für die gleichförmig beschleunigte und verzögerte B.

Es sei z. B. für eine während der Zeit $t$ stattfindende B. die Anfangsgeschw. $= c$, die Endgeschw. $= C$, und die Zu- oder Abnahme der Geschw. betrage während jeder Zeiteinheit $= a$, so ist

$$C = c \pm at$$

Um den Weg $s$ zu finden, hat man nach 2

$$s = \int C.\,\partial t + \text{Const.} = \int (c \pm at)\,\partial t + \text{Const.}$$

$$= c\int \partial t + a\int t\,\partial t = ct \pm \tfrac{1}{2}at^2 + \text{Const.}$$

wo Const. fortfällt, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ wird.

Aus $C = c \pm at$ erhält man

$$a = \pm\,\frac{C - c}{t}$$

Diesen Werth in das Integral gesetzt, giebt

$$s = ct \pm \tfrac{1}{2}\left(\pm\,\frac{C - c}{t}\right)t^2 = \frac{c + C}{2}\,t$$

(s. pag. 355, Formel 1.)

3. Nach dem Art.: Beschleunigung No. 4, wird die Beschleunigung einer ungleichförmig veränderlichen Bewegung aus derjenigen gleichförmig veränderlichen bestimmt, welche mit jener möglichst übereinstimmt, und es kommt demnach darauf an, für jede ungleichförmig veränderliche Bew. eine möglichst übereinstimmende gleichförmig veränderliche Bew. aufzufinden:

Der Weg $s$ während der Zeit $t$ einer ungleichförmig veränderlichen Bew. als Function von $t$ sei allgemein

$$s = ft \qquad (1)$$

so ist, wenn mit der Aenderung von $s$ um $\triangle s$, $t$ um $\triangle t$ sich ändert

$$s + \triangle s = f(t + \triangle t) \qquad (2)$$

und nach der Taylor'schen Reihe entwickelt

$$\triangle s = \frac{\partial s}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\frac{\triangle t^2}{1.2} + \frac{\partial^3 s}{\partial t^3}\frac{\triangle t^3}{1.2.3} + \ldots . \frac{\partial^n s}{\partial t^n}\frac{\triangle t^n}{1 \ldots n} \qquad (3)$$

Bezeichnet nun $G$ die Beschleunigung einer gleichförmig veränderlichen Bew., $w$ den Weg in der Zeit $t$, c die Anfangsgeschw., so ist (nach pag. 355, No. 4)

$$w = ct + Gt^2 \qquad (4)$$

und wenn mit der Aenderung von $w$ in $w + \triangle w$, $t$ in $t + \triangle t$ sich ändert

$$w + \triangle w = c(t + \triangle t) + G(t + \triangle t)^2$$
$$= ct + Gt^2 + c\,\triangle t + 2Gt\triangle t + G\triangle t^2$$

mithin

$$\triangle w = (c + 2\,Gt)\triangle t + G\triangle t^2$$

Nun ist $c + 2\,Gt$ die Endgeschw. nach Verlauf der Zeit $t$; bezeichnet man diese mit $C$, so hat man

$$\triangle w = C\triangle t + G\triangle t^2 \qquad (5)$$

Sollen nun beide Bew. möglichst übereinstimmen, so mufs

$$\triangle s - \triangle w = \left(\frac{\partial s}{\partial t} - C\right)\triangle t + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - G\right)\triangle t^2 + \frac{\partial^3 s}{\partial t^3}\cdot\frac{\triangle t^3}{1.2.3} + \ldots . \frac{\partial^n s}{\partial t^n}\frac{\triangle t^n}{1.2 \ldots n} \qquad (6)$$

möglichst klein werden.

Da man $\triangle t$ so klein nehmen kann, dafs in dem Ausdruck No. 3 die Summe sämmtlicher Glieder vom 3ten ab kleiner werden kann, als der Werth der beiden ersten Glieder, so wird $\triangle t - \triangle w$. am kleinsten, wenn die ersten beiden Glieder der Reihe No. 6 = Null werden, wenn also

$$C = \frac{\partial s}{\partial t}$$

und

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

als die beiden Bedingungen, unter welchen beide Bewegungen am meisten übereinstimmen, unter welchen also die Beschleunigung $G$ der gleichförmig veränderlichen Bew. zugleich für die Beschleunigung der ungleichförmig veränderlichen Bew. in dem Augenblick nach Verlauf der Zeit $t$ gelten kann.

Nach No. 1, Formel 1 ist $\frac{\partial s}{\partial t}$ = der Endgeschw. einer ungleichförmig veränderlichen Bew. nach Verlauf der Zeit $t$, und $C$ die Endgeschw. einer gleichförmig veränderlichen Bew. nach Verlauf der Zeit $t$; die erste Bedingung heifst also: die Geschwindigkeiten beider Bewegungen sollen nach Verlauf der Zeit $t$ einander gleich sein, und die zweite Bedingung ist, dafs die Beschleunigung $G$ der gleichförmig veränderlichen Bew. gleich sei dem halben Differenzial zweiter Ordnung des mit ungleichförmig veränderlicher Bew. zurückgelegten Weges $s$ als Function der bis dahin verflossenen Zeit $t$.

Die Beschleunigung $G$ kann, wie aus der allgemeinen Entwickelung hervorgeht, positiv oder negativ sein. Da nun $2G$ die Zunahme oder Abnahme der Geschw. einer gleichförmig veränderlichen Bew. innerhalb der Zeiteinheit ist, so hat man für die ungleichförmig veränderliche Bew. aus der zweiten Bedingung $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 2G\right)$ das zweite Differenzial des Weges in Beziehung auf die unveränderliche Zeit gleich jener Zu- oder Abnahme per Secunde.

4. Aus den ad 3 gefundenen beiden Formeln für die Endgeschw.

$$C = \frac{\partial s}{\partial t} \qquad (1)$$

und für die Beschleunigung

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \qquad (2)$$

lassen sich alle übrigen phoronomischen Formeln entwickeln, welche für die Auflösung sämmtlicher dahin gehörigen Aufgaben ausreichen.

Aus $C = \frac{\partial s}{\partial t}$ folgt

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

also mit Zuziehung der 2. Formel

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial t} \qquad (3)$$

Da ferner

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}$$

so ist mit Hülfe von 1

$$\frac{\partial C}{\partial t} = C\cdot\frac{\partial C}{\partial s}$$

also mit Hülfe von 3

$$G = \tfrac{1}{2} C \cdot \frac{\partial C}{\partial s}$$

u. s. w.

Sämmtliche für die ungleichförmig veränderliche Bew. bestehende Formeln sind

$$1.\quad C = \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$2.\quad C = 2 \int G \, \partial t$$

$$3.\quad C^2 = 4 \int G \, \partial s$$

$$4.\quad t = \int \frac{1}{C} \, \partial s$$

$$5.\quad t = \int \frac{1}{2G} \, \partial c$$

$$6.\quad s = \int C \, \partial t$$

$$7.\quad s = \int \frac{C}{2G} \, \partial C$$

$$8.\quad G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$9.\quad G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$10.\quad G = \tfrac{1}{2} C \frac{\partial C}{\partial s}$$

5. In dem Vorigen ist gezeigt worden, daſs wenn eine Kraft auf die Bew. eines Massenpunkts nur augenblicklich einwirkt, die daraus hervorgehende Bew. in Folge des Beharrungsvermögens *gleichförmig* fortgesetzt wird: die Bew. ist eine *gleichförmige Bew.* Wirkt dieselbe Kraft in jedem Augenblick wiederholt, so entsteht in jedem folgenden Augenblick ein *gleich grofser Zuwachs* an Weg, die Bew. wird also eine *gleichförmig beschleunigte* wie beim freien Fall.

Wirkt in jedem Augenblick eine gleichbleibende Kraft auf einen gleichförmig fortschreitenden Massenpunkt der Bewegungsrichtung entgegen, so entsteht eine *gleichförmig verzögerte* Bew.

Eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bew. erfolgt also offenbar, wenn auf einen Massenpunkt eine Kraft permanent wirkt, *die aber in jedem folgenden Augenblick nach irgend einem Gesetz an Gröſse sich ändert.*

Man kann eine unzählige Menge von Gesetzen erfinden, nach welchen eine auf einen Massenpunkt wirkende Kraft permanent sich ändert; allein es würde dies nur zu unnützen Untersuchungen führen; man untersucht daher nur Gesetze der Bew., welche aus den in der Natur uns gegebenen Kräften hervorgehen.

Die Kraft, auf welcher die Bew. aller Weltkörper beruht, ist *die Attraction der Massen*, und sie wirkt dergestalt, daſs die Beschleunigungen zweier Massen den Quadraten ihrer Entfernung umgekehrt proportional sind.

Z. B. beträgt die Beschleunigung eines auf die Erdoberfläche frei fallenden Körpers 15 pariser Fuſs; die Masse unserer Erde muſs in deren Mittelpunkt vereinigt gedacht werden, mithin befindet sich der fallende Körper in einer Entfernung des Erdhalbmessers, nämlich von etwa 860 Meilen von der Masse. Denkt man sich nun den fallenden Körper 860 Meilen weit über der Erdoberfläche, also zweimal so weit entfernt, so beträgt dessen Beschleunigung, d. h. sein Fallraum, in der ersten Secunde nur $(\frac{1}{2})^2 \cdot 15 = 3\frac{3}{4}$ par. Fuſs, und die Beschleunigung wächst in jedem folgenden Augenblick um das Quadrat der Annäherung; in einer Entfernung von 430 Meilen von der Erdoberfläche würde er schon die Beschleunigung $\left(\frac{1}{1\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot 15 = 6\frac{2}{3}$ par. Fuſs erhalten haben, und der Fallraum von 860 Meilen wird ungleichförmig beschleunigt durchlaufen. Es geht nun hieraus hervor, daſs *der freie Fall in der Nähe unserer Erdoberfläche nur näherungsweise gleichförmig beschleunigt ist*, allein unsre Fallhöhen, noch so groſs, sind gegen 860 Meilen Erdhalbmesser zu klein, als daſs sie berücksichtigt werden müſsten, und es wird die Wirkung der Anziehungskraft der Erde beim Fall constant angenommen.

6. Aus No. 5 entspringt nothwendig die Aufgabe:

*Das Gesetz zu untersuchen, nach welchem ein Massenpunkt in einer geraden Linie sich bewegt, wenn seine Beschleunigung den Quadraten der Entfernung von einem in der Linie befindlichen festen Punkt dem Mittelpunkt der Bew. umgekehrt proportional ist.*

*Auflösung.* Es sei die Beschleunigung des Massenpunkts $P$ in der Entfernung $r$ von dem Mittelpunkt $M$ der Bew. $= G$; $P$ beginne die Bew. von der Ruhe aus in der Entfernung $a$ von $M$, und nachdem der Weg $s$ zurückgelegt ist, sei die Beschleunigung $= \gamma$. Dann ist nach der Voraussetzung

$$G : \gamma = (a - s)^2 : r^2$$

woraus

$$\gamma = \left(\frac{r}{a - s}\right)^2 G$$

Es sei die in diesem Punkt seiner Bahn, also nach zurückgelegtem Wege $s$ statt-

findende Geschw. $= v$, so ist nach No. 4. also Formel 3

$$v^2 = 4\int\gamma\cdot\partial s = 4r^2G\int(a-s)^{-2}\,[-\partial(a-s)]$$
$$= \frac{4r^2G}{a-s} + \text{Const.}$$

Für $s = 0$ wird $v = 0$; daher

$$0 = \frac{4r^2G}{a} + C$$

woraus

$$C = -\frac{4r^2G}{a}$$

nnd vollständig

$$v^2 = 4Gr^2\frac{s}{a(a-s)}$$

also

$$v = 2r\sqrt{\frac{G}{a}\cdot\frac{s}{a-s}} \qquad \text{I}$$

Dieselbe Formel ist elementar entwickelt in d. Art.: Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft eines Weltkörpers bewegt wird. pag. 281, Formel 1, wo die Beschleunigung für die Entfernung $= 1$ vom Centralpunkt $= g'$ in pag. 283, Formel 1, aber für die Entfernnng $r = g$ gesetzt ist.

Nach No. 4, Formel 4 ist die Zeit, in welcher der Weg $s$ zurückgelegt wird

$$t = \int\frac{1}{v}\partial s = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\int\sqrt{\frac{a-s}{s}}\,\partial s \quad (1)$$

$$\int\sqrt{\frac{a-s}{s}} = \int(a-s)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\,\partial s^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a-s)\,s} + \int\sqrt{\frac{s}{a-s}} \qquad (2)$$

$$\int\sqrt{\frac{s}{a-s}}\,\partial s = \int\frac{s\cdot\partial s}{\sqrt{as-s^2}}$$

Setzt man in die allgemeine Integralformel

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$s$ für $x$, $a = 0$, $b = a$ und $c = -1$, so erhält man

$$\int\frac{s\,\partial s}{\sqrt{as-s^2}} = -\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\int\frac{\partial s}{\sqrt{a-s^2}} \quad (3)$$

Man hat also aus 1, 2 und 3

$$\int\sqrt{\frac{a-s}{s}}\,\partial s = \sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\int\frac{\partial}{\sqrt{as-s^2}}$$

Das $\int\frac{\partial s}{\sqrt{as-s^2}}$ kann entwickelt werden aus der allgemeinen Integralformel:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,Arc\sin\frac{-b+2cx}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

wenn man $x = s$, $a = 0$, $b = a$ und $c = +1$ setzt, und man hat

$$\int\frac{\partial s}{\sqrt{as-s^2}} = Arc\sin\frac{-a+2s}{a}$$

daher

$$t = \int\frac{1}{v}\partial s = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\,Arc\left(\sin = \frac{2s-a}{a}\right) + \text{Const.}\right]$$

für $s = 0$ wird $t = 0$; mithin

$$0 = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{0} + \frac{a}{2}\,Arc(\sin -1) + \text{Cnst.}\right]$$
$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left(-\tfrac{1}{4}a\pi + C\right)$$

worans Const. $= \frac{1}{4}a\pi$.

Also, da $\frac{1}{2}\pi - arc\sin x = arc\cos x$, das Integral vollständig

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\,Arc\cos\frac{a-2s}{a}\right] \quad \text{II}$$

Diese Formel ist in dem Art.: Bahn einer Masse etc., No. 2, pag. 283, wo für $r = 1$, $G = g'$ gesetzt ist, elementar entwickelt; in No. 3, pag 283, ist in dieselbe $G = g$ für die Entfernung $r$ vom Centralpnnkt gesetzt, nnd in No. 4 ein Beispiel für den Fall des Mondes auf die Erde berechnet.

7. No. 5 am Schlufs ist gesagt, dafs der freie Fall nahe der Erdoberfläche nur näherungsweise gleichförmig beschleunigt geschieht; dafs dieser Fall aber als gleichförmig beschleunigt betrachtet werden kann, läfst sich aus den Formeln I nnd II, No. 6, ableiten.

Bedentet nämlich in I:

$$v = 2r\sqrt{\frac{G}{a}\cdot\frac{s}{a-s}}$$

$r$ den Halbmesser der Erde $= 860$ Meilen, so ist $a$, die Entfernnng des Punkts von dem Erdmittelpunkt, in welchem der Fall

von der Ruhe aus beginnt $= r +$ der Fallhöhe $h$, welche höchstens in einigen hundert Fufs besteht, gegen $r$ verschwindet, so dafs $a = r$ gesetzt werden kann; aus demselben Grunde verschwindet $s$ gegen $a$, und man hat, da $G$ nun $= g$ wird

$$v = 2r\sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{s}{r}} = 2\sqrt{gs}$$

die Formel für den freien Fall bei gleichförmiger Beschleunigung.

Ebenso hat man in II

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\sqrt{as - s^2} + \frac{a}{2} arc\cos\frac{a - 2s}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\sqrt{s(r - s)} + \frac{r}{2} arc\cos\left(1 - \frac{2s}{r}\right)\right]$$

Der Bogen, der zum $\cos = \left(1 - \frac{2s}{r}\right)$ gehört, ist sehr klein, und daher für denselben sein *Sinus* zu setzen, dann hat man

$$arc\cos\left(1 - \frac{2s}{r}\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2s}{r}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{s}{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)} = \frac{2}{r}\sqrt{s(r - s)}$$

Da nun $s$ gegen $r$ verschwindet, so hat man

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\sqrt{sr} + \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{r}\sqrt{sr}\right)$$
$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot 2\sqrt{sr} = \sqrt{\frac{s}{g}}$$

woraus $\qquad s = gt^2$

die Formel für den freien Fall bei gleichförmiger Beschleunigung.

8. Die Attractionskraft eines jeden Weltkörpers ist in dessen Mittelpunkt concentrirt, indem jeder die Gestalt einer Kugel hat. Auf Punkte innerhalb des Körpers wirkt dessen Attraction direct wie die Entfernung vom Mittelpunkt. Der Fall einer Masse durch den hohlen Raum um den Durchmesser veranlafst also die Aufgabe:

Das Gesetz zu untersuchen, nach welchem ein Massenpunkt in einer geraden Linie sich bewegt, wenn seine Beschleunigung der Entfernung von einem in der Linie befindlichen festen Punkt dem Mittelpunkt der Bewegung proportional ist.

Auflösung. Es sei die Beschleunigung des Massenpunkts $P$ in der Entfernung $r$ vom Mittelpunkt $M$ der Bew. $= G$; $P$ beginne die Bew. von der Ruhe aus in der Entfernung $a$ von $M$, und nachdem der Weg $s$ zurückgelegt ist, sei die Beschleunigung $= \gamma$. Dann ist nach der Voraussetzung

$$G : \gamma = r : a - s$$

woraus

$$\gamma = \frac{a - s}{r} G$$

Es sei die in diesem Punkt erlangte Geschw. $= v$, dann ist nach Formel 3, No. 4

$$v^2 = 4\int \gamma\, \partial s = \frac{4G}{r}\int (a - s)\partial s$$
$$= \frac{4G}{r}(as - \tfrac{1}{2}s^2) + C$$

wo $C = 0$ ist, weil für $v = 0$ auch $s = 0$ und

$$v = \sqrt{\frac{4G}{r}(a - \tfrac{1}{2}s)s} = \sqrt{2\frac{G}{r}(2a - s)s} \quad (1)$$

Dieselbe Formel ist elementar entwickelt in dem Art.: Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft einer Masse bewegt wird, No. 5, pag. 284, wo die Beschleunigung für die Entfernung $= 1$ vom Centralpunkt $= g'$, in No. 9, pag. 287, aber für die Entfernung $= r$, gesetzt ist.

Für $s = a$, wenn nämlich der Massenpunkt in den Centralpunkt $M$ gekommen ist, hat man

$$V = a\sqrt{2\frac{G}{r}} \quad (2)$$

Um die Zeit $t$ zu finden hat man nach No. 4, Formel 4

$$t = \int_0 \frac{1}{v}\,\partial s$$

Diesen Werth in Gl. 1 substituirt, giebt

$$t = \int_0 \frac{1}{2\frac{G}{r}(2as - s^2)}\,\partial s = \sqrt{\frac{r}{2G}} \int_0 \sqrt{\frac{\partial s}{2as - s^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{r}{2G}} \int_0 \sqrt{\frac{\partial s}{a^2 - (a - s)^2}}$$

Dieses Integral kann entwickelt werden aus der allgemeinen Integralformel

$$\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} Arc\sin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

indem $a^2$ für $a$; 1 für $b$ und $(a - s)$ für $x$ geschrieben wird, dann ist aber $\partial(a - s) = -\partial s$ und

$$\int_0 \frac{\partial s}{a^2 - (a - s)^2} = -\int_0 \frac{-\partial s}{a^2 - (a - s)^2}$$
$$= -Arc\sin\left(\frac{a - s}{a}\right) + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ wird $s = 0$ daher

$$0 = \sqrt{\frac{r}{2G}}[-Arc\ sin(=1) + C]$$

woraus

$$C = + Arc\ sin(=1) = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\left[\frac{\pi}{2} - Arc\ sin\frac{a-s}{a}\right]$$

also vollständig

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\ Arc\ cos\frac{a-s}{a} \quad (3)$$

diese Formel ist in dem Art.: Bahn einer Masse etc., No. 7, pag. 285, wo für $r = 1$, $G = g'$ gesetzt ist, elementar entwickelt.

Für $s = a$, also wenn der Massenpunkt in den Centralpunkt $M$ gelangt, ist die verflossene Zeit

$$T = \sqrt{\frac{r}{2G}}\ Arc\ cos(=0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2G}} \quad (4)$$

Setzt der Massenpunkt seine Bew. über $M$ hinaus fort, wird also seine Beschleunignng nach demselben Gesetz negativ, und man rechnet den ferneren Weg $s$ von $M$ ab, so hat man die Beschleunignng

$$= -\gamma = -\frac{a-s}{r}G$$

$$v^2 = -\frac{4G}{r}\int s\,\partial s = -\frac{2G}{r}s^2 + C$$

Nun ist für $s = 0$; (nach 2) $v = V = a\sqrt{2\frac{G}{r}}$

$$C = V^2 = 2\frac{G}{r}a^2 \text{ nnd vollständig}$$

$$v^2 = \frac{2G}{r}[a^2 - s^2] \quad (5)$$

Hier ist $s$ dieselbe Länge, welche bis Formel 4 mit $a - s$ bezeichnet wnrde; setzt man diese für $s$, so erhält man

$$v^2 = \frac{2G}{r}(2as - s^2)$$

und

$$v = \sqrt{\frac{2G}{r}(2as - s^2)}$$

also dieselbe Formel wie 1.

Mithin hat der Massenpunkt in gleichen Entfernnngen vom Mittelpnnkt $M$ gleiche Geschwindigkeiten, nnd (wenn man in Formel 5, $s = a$ setzt) in der Entfernung $a$ von $M$ als Endgeschw. die Anfangsgeschw. Null.

Da nun allgemein $t = \int \frac{1}{v}\partial s$, so hat man für die Bew. von $M$ aus, wenn man für den Weg $s$ statt $(a - s)$ setzt nnd $V$ aus Gl. 5 nimmt

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}} \cdot \int\frac{\partial s}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{r}{2G}}\ Arc\left(sin = \frac{s}{a}\right) \quad (6)$$

und zwar vollständig, weil für $t = 0$, $s = 0$ nnd $arc\ (sin = 0) = 0$ ist.

Für $s = a$, also dem Endpnnkt in gleicher Entfernnng mit dem Anfangspnnkt der Bew. von $M$ hat man

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2G}} \quad (7)$$

dieselhe Formel mit 4, so dafs zu der Bew. von $M$ znm Endpnnkt dieselbe Zeit erforderlich ist, als die vom Anfangspnnkt zn $M$.

Suhtrahirt man Formel 6 von 7, so ist

$$T - t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\left[\frac{\pi}{2} - arc\left(sin\frac{s}{a}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{r}{2G}}\ arc\left(cos\frac{s}{a}\right)$$

Nun hat $T - t$ die Bedeutung von $t$ in Formel 3, und $s$ die Bedentnng von $a - s$ in Formel 3, folglich ist die Zeit, in welcher irgend ein Weg $a'$ nach $M$ durchlaufen wird = der Zeit für den Weg $a'$ von $M$ aus.

Um den Ort des Massenpunkts für jeden Zeitangenblick zu finden, hat man aus Gl. 3

$$t\sqrt{\frac{2g}{r}} = arc\ cos\frac{a-s}{a}$$

daher

$$\frac{a-s}{a} = cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{r}}\right)$$

woraus

$$s = a\left[1 - cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{r}}\right)\right] \quad (8)$$

**Bewegung, veränderliche**, s. den vor. Artikel.

**Bewegung in einem widerstehenden Mittel** heifst allgemein die Bew. eines Körpers innerhalb eines flüssigen Stoffs (als Luft, Wasser), der mit seiner Masse, die überall den Körper umgieht, dadurch dafs sie verdrängt werden mnfs, der freien Bew. desselben ein Hindernifs entgegensetzt.

Die Gröfse dieses Hindernisses hängt sowohl von den physikalischen Eigenschaften des Mittels, als anch von denen des sich bewegenden Körpers ab: Ein Stein nnd eine Flaumfeder würden in luftleerem Ranm gleich schnell auf die Erde fallen, während in Wirklichkeit letztere bei weitem langsamer fällt; von zwei Kngeln, einer eisernen und einer hölzernen, die ins Wasser geworfen werden, geht nnr die erste unter, die letzte bleibt schwimmend auf der Oberfläche: der Widerstand wächst mit dem specifischen Gewicht des Mittels, nnd nimmt ab mit dem spec. Gew. des bewegten Körpers.

Elasticität des Mittels, so wie des bewegten Körpers vermehren das Hinder-

nifs. Im ersten Fall entsteht vor dem Körper während seiner Bew. Verdichtung also Vermehrnng des spec. Gewichts der zu verdrängenden Flüssigkeit, im letzten Fall wirkt das hindernde Mittel zum Theil auf rückgängige Bew. des Körpers.

Die Geschwindigkeit des Körpers vermehrt den Widerstand in zweifacher Beziehnng; denn da einerlei Widerstand entsteht, der Körper mag ruhen und das Mittel sich bewegen, oder der Körper bewegt sich und das Mittel ruht, so bildet die Gröfse der Bew. des Mittels einen Widerstand; diese ist aber das Prodnct aus Masse in Geschwindigkeit, und folglich wird in dieser Beziehnng mit der Geschwindigkeit der Widerstand vermehrt. Die zweite Beziehnng besteht darin, dafs die Trägheit der ruhenden Masse des Mittels überwunden werden mufs, welches bei gröfserer Geschw. in kürzerer Zeit geschehen mufs. Aus diesen Gründen wird mit Newton allgemein angenommen, dafs der Widerstand des Mittels mit den Quadraten der Geschw. des bewegten Körpers wächst.

Die Gröfse und Gestalt des bewegten Körpers ist auf den Widerstand von Einflufs: Ein Pfeil findet weniger Widerstand in der Luft als eine Kugel, und diese weniger als ein umfangreicher kantiger Körper.

Setzt man daher den Widerstand des Mittels $Av^2$, wo $v$ die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist, so mnfs $A$ als Coefficient für jeden Körper je nach specifischem Gewicht und Gestalt und für jedes Mittel von besonderen physikalischen Eigenschaften aus der Erfahrung bestimmt werden.

2. Fällt ein Körper senkrecht herab auf die Erde, so würde im luftleeren Raum seine Beschleunigung $= g$ sein, in der Luft ist bei der Geschw. $v$ die Beschleunigung $= g - Av^2$

Steigt ein Körper mit der Geschw. $v$ senkrecht aufwärts, so ist seine anfängliche Beschleunigung $= -(g + Av^2)$, oder seine Verzögerung $= g + Av^2$.

3. Setzt man allgemein für die Geschw. $V$ des bewegten Körpers die Beschleunigung $G + Av^2$, so hat man aus der allgemeinen phoronomischen Formel (No. 3, pag. 358) worin $G$ die Beschleunigung, $s$ der von der Ruhe aus zurückgelegte Weg und $C$ die erlangte Endgeschw. ist.

$$v^2 = 4\int (G + Av^2)\,\partial s$$

Diese Gl. nach $s$ differenzirt giebt

$$2v\,\partial v = 4(G + Av^2)\,\partial s$$

woraus

$$\partial s = \frac{v\,\partial v}{2(G + Av^2)}$$

und

$$s = \tfrac{1}{2}\int_0^v \frac{v\,\partial v}{G + Av^2} + C$$

also

$$s = \frac{1}{4A}\log nat\,(G + Av^2) + C \qquad (1)$$

Beginnt die Bew. von der Ruhe aus, so ist bei $v = 0$ auch $s = 0$ und

$$0 = \frac{1}{4A}\log n\; G + C$$

daher vollständig

$$s = \frac{1}{4A}\log n\,\frac{G + Av^2}{G} \qquad (2)$$

also

$$e^{4As} = \frac{G + Av^2}{G}$$

woraus

$$v^2 = \frac{G}{A}\,(e^{4As} - 1) \qquad (3)$$

wo $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Beginnt dagegen die Bew. mit einer Geschw. $= c$, so ist in Formel (1) die Constante so zu bestimmen, dafs für $s = 0$ gesetzt $v = c$ wird; man hat demnach aus Formel (1)

$$0 = \frac{1}{4A}\log n\,(G + Ac^2) + C$$

woraus

$$s = \frac{1}{4A}\log n\,\frac{G + Av^2}{G + Ac^2} \qquad (4)$$

hieraus

$$e^{4As} = \frac{G + Av^2}{G + Ac^2}$$

und

$$v^2 = \frac{G}{A}\left(\frac{G + Ac^2}{G}\,e^{4As} - 1\right)$$

4. Man hat nun die Fälle zu untersuchen, bei welchen $G$ und $A$ entweder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie dies schon No. 2 aufgeführt ist: Fängt ein Körper von der Ruhe an sich zu bewegen, so ist die Beschleunigung immer $G - Av^2$, desgleichen wenn die Bew. mit einer Geschw. beginnt, die immer gröfser wird. Fängt die Bew. aber mit einer Geschw. an, die immer kleiner wird, und zuletzt $= 0$ werden kann, so ist die Beschleunigung $= -(G + Av^2)$.

5. Erster Fall. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $= 0$, so hat man die Beschleunigung $G - Av^2$

$$v^2 = 4\int (G - Av^2)\,\partial s$$

nach $s$ differenzirt

$$2v\,\partial v = 4(G - Av^2)\,\partial s$$

woraus

$$\partial s = \frac{v \cdot \partial v}{2(G - Av^2)}$$

und

$$s = \frac{1}{2}\int \frac{v\,\partial v}{G - Av^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4A}\, logn\,(G - Av^2) + C$$

und vollständig (s. Formel 2)

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G}{G - Av^2} \qquad (6)$$

woraus

$$\left[1 - \frac{1}{e^{4As}}\right] \qquad (7)$$

Zur Bestimmung der Zeit $t$ hat man aus der allgemeinen phoronischen Gl. 9, pag. 358

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\triangle t}$$

hieraus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2(G - Av^2)$$

also auch

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2(G - Av^2)}$$

und

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{\partial v}{G - Av^2} + C$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, logn\, \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}} + C$$

erhält man

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}} \qquad (8)$$

für $v = 0$ erhält man $logn\ 1 = 0$, mithin $C = 0$, daher $t$ (No. 8) vollständig ist.

6. Zweiter Fall. Die kleinere Anfangsgeschw. $v$ wächst bis zur gröfseren Endgeschw. $V$, so ist wieder die Beschleunigung zu Anfang $= G - Av^2$, zu Ende $G - AV^2$

Dann wird

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\ (G - AV^2) + C$$

und da für $s = 0$, $V = v$ wird, vollständig

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G - AV^2}{G - Av^2} \qquad (9)$$

hieraus

$$V^2 = \frac{G - (G - Av^2)e^{4As}}{A} = \frac{G}{A}\left[1 + \frac{Av^2 - G}{G}e^{4As}\right] \qquad (10)$$

Für $t$ (8) ist noch die Constante zu bestimmen durch

$$0 = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}} + C$$

woraus vollständig

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\left[logn\, \frac{1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}} - logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}}\right]$$

oder

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{\left(1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}\right)\left(1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}\right)}{\left(1 - V\sqrt{\frac{A}{G}}\right)\left(1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}\right)} \qquad (11)$$

Dritter Fall. Die gröfsere Anfangsgeschwindigkeit $V$ nimmt ab bis zur Geschw. $v$ und weiter bis Null. Dann ist die Beschleunigung anfangs $-(G + AV^2)$ bei der Geschwindigkeit $v = -(G + Av^2)$

Nun ist

$$v^2 = -4\int (G + Av^2)\,\partial s$$

hieraus

$$\partial s = -\frac{v\,\partial v}{2(G + Av^2)}$$

und

$$s = -\frac{1}{2}\int \frac{v\,\partial v}{G + Av^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4A}\, logn\,(G + Av^2) + C$$

Für $v = V$ wird $s = 0$, daher

$$0 = -\frac{1}{4A} \log n\, (G + AV^2) + C$$

also vollständig

$$s = \frac{1}{4A} \log n \frac{G + AV^2}{G + Av^2} \qquad (12)$$

hieraus die gröfste Höhe bei $v = 0$

$$S = \frac{1}{4A} \log n \frac{G + AV}{G} \qquad (13)$$

Aus (12) erhält man

$$v^2 = \frac{G}{A} \left[ \frac{G + AV^2}{G e^{4As}} - 1 \right] \qquad (14)$$

Zur Bestimmung von $t$ hat man bis zu dem Augenblick, wo die Geschwindigkeit noch $= v$ ist:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2(G + Av^2)$$

also

$$\frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{1}{2(G + Av^2)}$$

und

$$t = -\tfrac{1}{2} \int \frac{\partial v}{G + Av^2}$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} Arc\,tg \left( x \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

erhält man

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg \left( v \sqrt{\frac{A}{G}} \right) + C$$

Für $t = 0$ wird $v = V$, folglich

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg\, V \sqrt{\frac{A}{G}} + C$$

und vollständig

$$t = \frac{1}{2\sqrt{GA}} \left[ Arc\,tg\, V \sqrt{\frac{A}{G}} - Arc\,tg\, v \sqrt{\frac{A}{G}} \right] \qquad (15)$$

Für die Endgeschwindigkeit $= 0$ hat man

$$T = \frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg\, V \sqrt{\frac{A}{G}} \qquad (16)$$

Dieser dritte Fall ist derjenige, welcher in der Ballistik (s. d.) zur Sprache kommt.

**Beweis** ist eine Verbindung von Sätzen, durch deren Schlufsaussage erhellt, dafs eine Behauptung richtig oder unrichtig ist. Ersterer ist ein positiver, letzterer ein negativer B. Die Sätze, welche zum B. mit einander verbunden werden, sind Folgerungen, d. h. Sätze, deren Richtigkeit eingesehen wird, wenn der ihnen vorangegangene Satz richtig ist. Hieraus geht hervor, dafs man bei einem B. von einem als richtig erkannten Satz mufs ausgehen können, und so mufs also auch jede Behauptung auf eine schon anerkannte Wahrheit sich gründen, mit der als Voraussetzung der B. beginnt. Ein B., welcher die zu erweisende Behauptung als richtig voranstellt und durch Folgerungen zuletzt zu einem schon als richtig anerkannten Satz gelangt, ist ein indirecter B., woher ein B., der mit der Voraussetzung anfängt und mit der Behauptung schliefst, ein directer B. genannt wird (s. analytischer B., apagogischer B., analogischer B., Bedingung, Behauptung).

**Bezeichnung** einer mathematischen Gröfse ist die Einsetzung eines Zeichens für dieselbe. Z. B. das Zahlzeichen 8 vertritt das Achtfache derjenigen Zahlengröfse, welche durch das Zahlzeichen 1 vertreten wird. Dadurch, dafs man eine grofse Zahl z. B. dreihundert vier und zwanzig nicht durch ein einziges Zeichen, sondern durch drei neben einander gesetzte Zeichen 324 vertreten läfst, wird die B. der Zahlen zu einem System, einem Zahlensystem, dessen Anordnung schon in der Sprache begründet ist, indem die Zahl 324, wenn sie ausgesprochen wird, nichts anders ist als das Verlangen, ein Exempel auszurechnen, nämlich das Exempel

$$3 \times 100 + 4 + 2 \times 10$$

d. h. drei (mal) hundert (plus) vier und (noch) 2mal zehn; dafs nämlich nicht zweizig, wie dreifsig, sondern zwanzig gesprochen wird, ist eine Sprachausnahme.

Diese Bezeichnung bildet mithin eine Erleichterung zu Auffassung der Gröfsen, ihren Quantitäten nach und für die Rechnungsoperationen mit denselben. Denn die früher gebräuchliche Rechnungsweise mit Rechenpfennigen, Rechentafeln etc. war viel mühsamer und liefs nur schwer Entwickelungen und Erweiterungen der Rechenkunst zu.

So wie auch die B. für geforderte Rechnungsarten, für Addition u. s. w. kurz, bestimmt und entsprechend sind, als Wurzelausziehung durch $\sqrt{}$, ähnlich dem Anfangsbuchstaben $r$ von radix, so sollen es auch alle übrigen sein: Allgemeine Zahlenwerthe werden mit Buchstaben bezeichnet. Jeder Buchstab z. B. $a$ bedeutet irgend eine Zahl, der Buchstab $b$ ebenfalls, allein man hat unter $a$ und $b$

zwei verschieden grofse Zahlen sich zu denken.

In der Geometrie, wo Figuren von Linien, Körper von Flächen, und diese wieder von Linien begrenzt sind, ist schon jede Zeichnung an der Tafel oder auf dem Papier eine B., eine Vertreterin der wirklichen oder der zu denkenden Raumgröfse. Eine Linie bezeichnet man durch zwei grofse Buchstaben an deren beiden Endpunkten. Stofsen zwei Linien zusammen, so bezeichnet man den von ihnen gebildeten Winkel ganz geeignet durch die beiden Linien, welche ihn bilden, also z. B. mit $AB$, $BC$; man setzt aber der gröfseren Einfachheit wegen den an der Winkelspitze stehenden Buchstaben nur einmal, und zwar in die Mitte, und bezeichnet $\angle ABC$ auch ebenso sicher mit $\angle B$. Wenn aber drei Linien $AB$, $CB$, $DB$ der Reihenfolge nach in $B$ zusammentreffen, so entstehen 3 $\angle$, nämlich die $\angle ABC$, $ABD$ und $CBD$, welche so wie hier geschehen, bezeichnet werden müssen.

In der algebraischen Geometrie (s. d.) wo Linien durch Rechnungsarten mit einander verbunden werden, bezeichnet man des leichteren Rechnens wegen jede Linie mit einem kleinen lateinischen Buchstaben, als $a$, $b$, $c$.

In der Trigonometrie, wo $\angle$ addirt und subtrahirt werden, bezeichnet man aufserdem der Einfachheit wegen die $\angle$ mit kleinen griechischen Buchstaben, auch wohl mit den letzten Buchstaben $u$, $x$, $y$, $z$ des kleinen lateinischen Alphabets. Wo keine unbekannten Gröfsen vorkommen, die bekanntlich mit $x$, $y$, $z$ bezeichnet werden, hat dieselbe Bezeichnung für Winkel nichts Nachtheiliges; allein beim Durchlesen von Abhandlungen, wenn man nicht allein $\sin x$, $\cos x$ u. s. w., sondern auch $x$ findet, und da man gewöhnt ist, unter $x$ eine unbekannte Gröfse zu begreifen, wird die Uebersicht erschwert und man thut immer besser, für Winkel griechische Buchstaben zu wählen, weil man auf den ersten Anblick solches Zeichens weifs, dafs man einen Winkel vor sich hat.

So würde, wenn die oben gedachten $\angle ABC$ mit $\alpha$, $CBD$ mit $\beta$, $ABD$ mit $\gamma$ bezeichnet wären $\alpha = \beta - \gamma$, $\beta = \gamma - \alpha$, $\gamma = \alpha + \beta$ sein.

Das Differenzial bezeichnet man am entsprechendsten mit einem cursiven $\partial$, um es von einer Constanten $d$ sogleich unterscheiden zu können; das Integralzeichen $\int$ ist der Anfangsbuchstabe von Summe, da das Integral als eine Summe zu betrachten ist.

Gleichartige oder in einerlei Zusammenhang stehende Gröfsen, werden mit einerlei Buchstaben bezeichnet und durch Strichelungen unterschieden, z. B. Abscissen einerlei Axe $X$ mit $x$, $x'$, $x''$ .... Ordinaten bezeichnet man in der Regel mit $y$, also mehrere zu einerlei Axe $Y$ gehörige mit $y$, $y'$, $y''$ ... Constanten bei Integralen mit $C$, $C'$, $C''$ ..., $K$, $K'$, $K''$ ... Functionen mit $F$, $f$, $\varphi$, als $Fx$, $fy$, $\varphi z$; dagegen ist $F'x$ gleichbedeutend mit $\partial Fx$, dem Differenzial von $Fx$. Halbmesser von Kreisen bezeichnet man gern mit $R$, $r$ oder $\varrho$ oder $R$, $R'$, $R''$ ...., $r$, $r'$, $r''$ ....; $\varrho$, $\varrho'$, $\varrho''$ .... (dem Anfangsbuchstaben von Radius). Das Verhältnifs zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises, die constante Zahl 3,1415926 .... wird allgemein mit dem griechischen Buchstaben $\pi$, dem Anfangsbuchstaben von περιφερεια, Peripherie, bezeichnet. Die Beschleunigung, der Weg von der Ruhe aus in der ersten Secunde wird ziemlich allgemein mit $G$, $g$, $G'$ (Gravitas), die Geschwindigkeit mit $C$, $c$, $c'$ ... oder $V$, $v$, $v'$ .... (Celeritas, Velocitas); Zeiten werden mit $T$, $t$, $t''$ .... (tempus) bezeichnet.

Entsprechende B. erleichtern sehr das mathematische Studium und den Ueberblick während des Calcüls und bei Durchlesung desselben. So ist Fig. 188, pag. 296 der Kreis mit $KO$, die Ellipse mit $EO$, die Parabel mit $POP$ und die Hyperbel mit $HOH$ bezeichnet, damit man aus den Buchstaben sogleich die Curven unterscheide. Eben so bezeichne man in allgemeinen Ausdrücken: Summe mit $S$, Differenz mit $D$, Höhe mit $H$, Länge mit $L$, Breite mit $B$.

**Biconcav** sind Linsen (Augengläser), wenn sie auf beiden Seiten hohl sind, biconvex heifsen dieselben, wenn sie auf beiden Seiten erhaben sind; in jedem von beiden Fällen bildet jede der Linsenoberflächen den Theil einer Kugeloberfläche.

**Biegsam** ist ein Körper, der durch äufsere auf ihn wirkende Kräfte seine Gestalt ändert, ohne zu zerbrechen. Diese Eigenschaft haben mehr oder weniger alle Körper, und harte Körper in Folge und je nach dem Grade ihrer Elasticität, die indefs oft so gering ist, dafs die mögliche Biegung des Körpers nicht wahrgenommen werden kann, wo dann der Körper spröde heifst. Von Fossilien, die in Form von dünnen Blättchen sichtbar gebogen werden können, sagt man, sie seien biegsam. Körper, die nach aufgehobenem Druck der auf sie wirkenden Kräfte ihre

vorige Gestalt wieder annehmen, sind elastisch (s. Belastung), sonst weich. Eine vollkommene Biegsamkeit hat kein fester Körper; bei Untersuchung der Kettenlinie wird sie als vollkommen nur theoretisch vorausgesetzt.

**Biegung** eines elastischen Stabes veranlafst die Ausdehnung der Fibern auf der convexen und die Zusammendrückung derselben auf der concaven Seite; eine mittlere Fiber, die weder ausgedehnt noch zusammengeprefst wird, liegt in der neutralen Fläche des Stabes, die gebogene Mittellinie derselben heifst die neutrale Axe des Stabes und die Ebene, in der sich diese Axe befindet, heifst die Biegungsebene.

**Bierwaage**, ein Skalen-Aräometer von einfachster Einrichtung mit keiner oder nur wenigen Gradtheilungen, bis zu welchen die B. in die zu controllirenden Biere mindestens einsinken mufs, damit diese die vorgeschriebenen Stärken haben.

**Bild** ist die möglichst getrene Darstellung eines Gegenstandes. Die Natur erzeugt Bilder in unerreichbarer Vollkommenheit durch Brechung der Lichtstrahlen in der Linse des Auges von Menschen und Thieren, indem die von einem äufseren lichten Punkt auf die Augenlinsen fallenden unendlich vielen Lichtstrahlen alle in einem Punkt der Netzhaut vereinigt werden, wie dies in dem Art.: Auge erklärt worden ist. Die Nachbildung der Augenlinse aus durchsichtigem Glase giebt durch die Kunst hervorgerufene natürliche Bilder, von denen ein Beispiel in dem Art.: Astronomisches Fernrohr nachgewiesen ist.

**Billion** ist eine Zahl = Million × Million
= 1000 000 000 000

Nach anderer Zählweise ist B. eine Zahl = Tausend Millionen
= 1000 000 000

**Bimediale** ist bei Euklid (10 B. 38 und 39 Satz eine Irrationallinie, deren er zwei aufstellt: die erste und die zweite B. Zu mehrerem Verständnifs s. Art.: Apotome, und dort bezeichnen $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$, $\sqrt{E}$ ... Zahlen, die nur in Potenz (im Quadrat) commensurabel sind. Z. B. $\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, 7, $3\sqrt{5}$ .... die in der Potenz 2, 12, 49, 45 commensurabel sind. Werden nun aus jenen Linien als Seiten Rechtecke gebildet, so sind deren Werthe $\sqrt{BC}$, $\sqrt{BD}$, $\sqrt{BE}$, $\sqrt{CD}$ .... ($2\sqrt{6}$, $7\sqrt{2}$, $3\sqrt{10}$, $14\sqrt{3}$ ....) und eine Linie, welche ein solches Rechteck potenzirt (deren Quadrat dem Rechteck = ist) ist irrational (in Linie und Potenz mit Rationalen verglichen incommensurabel) und heifst nach Satz 22 eine Mediale. Eine solche ist also $\sqrt[4]{BC}$, $\sqrt[4]{BD}$, $\sqrt[4]{BE}$, $\sqrt[4]{CD}$ .... ($\sqrt[4]{24}$, $\sqrt[4]{98}$, $\sqrt[4]{90}$, $\sqrt[4]{588}$ ....)

Zwei Medialen können in Länge commensurabel sein als:

$$\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2} : 3\sqrt[4]{2} = 1 : 3$$

Eben so in Potenz commensurabel als: $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{8}$ indem $\sqrt[4]{2}^{\,2} : \sqrt[4]{8}^{\,2} = \sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 1 : 2$

Zwei Medialen als Seiten zu einem Rechteck zusammengesetzt, können ein Rationales enthalten; man erhält solche, wenn man zwischen 2 blofs in Potenz commensurablen Linien $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ die mittlere geometrische Proportionale $\sqrt[4]{BC}$ sucht als die eine, und in der 4ten geometrischen Proportionale der drei Zahlen $\sqrt[4]{\frac{C^3}{B}}$ die andere; denn es ist

$$\sqrt[4]{\frac{C^3}{B}} \times \sqrt[4]{BC} = C \text{ (Euklid 28. Satz)}$$

Solche 2 Linien sind immer in Potenz commensurabel, denn

$$\sqrt[4]{\frac{C^3}{B}}^{\,2} : \sqrt[4]{BC}^{\,2} = C\sqrt{\frac{C}{B}} : B\sqrt{\frac{C}{B}} = C : B$$

und die Summe zweier blofs in Potenz commensurablen Medialen, die ein Rationales enthalten, nennt Euklid (38. Satz) die erste Bimediale; sie ist eine Irrationallinie und hat unter der obigen Bedeutung von $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ ... immer die Form

$$\sqrt[4]{BC} + C\sqrt[4]{\frac{C}{B}}$$

Zwei Medialen als Seiten zu einem Rechteck zusammengesetzt, können ein Mediales enthalten; man erhält solche, wenn man swischen zwei von drei gegebenen blofs in Potenz commensurabelen Linien $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ die mittlere geometrische Proportionale sucht, $\sqrt[4]{BC}$ als die eine, und in der vierten geometrischen Proportionale zwischen der zweiten, dritten und der gefundenen, also in

$$\sqrt{\frac{D}{C}} \cdot \sqrt[4]{BC}$$

die zweite Linie, und es ist

$$\sqrt[4]{BC} \times \sqrt{\frac{D}{C}} \times \sqrt[4]{BC} = \sqrt{BD} \text{ (Enkl. 29. Satz)}$$

ein Mediales. Beide Linien sind in Potenz commensurabel, nämlich

$$\sqrt[4]{BC}^{\,2} : \frac{D}{C}\sqrt[4]{BC}^{\,2} = C : D$$

und die Summe zweier blofs in Potenz

commensurabelen Linien, die ein Mediales enthalten, nennt Euklid (39. Satz) die zweite Bimediale. Sie ist eine Irrationallinie und hat unter der obigen Bedeutung von $\sqrt{B}, \sqrt{C}, \sqrt{D} \dots$ immer die Form

$$\sqrt[4]{BC} + \sqrt[2]{\frac{D}{C}} \cdot \sqrt[4]{BC}$$

**Binion** eine Verbindung von je 2 Zahlen-Elementen; $ab$, $bc$, $cd \dots$ in der Combinationslehre.

**Binoculartelescop**, eine Verbindung von 2 Fernröhren für beide Augen des Beobachters. Abgesehen von dem doppelten Preiso hat es gewifs die Unbequemlichkeit in noch höherem Maafse, als bei dem Theater-Doppelperspectiv; auch sieht selten ein Mensch mit beiden Augen gleich scharf und wählt immer das schärfere Auge zu Beobachtungen.

**Binom, Binomium** ist eine zweigliedrige Gröfse, als $a + b$, $c - d$,

$$n \pm 2(a + x); \; m \cdot \frac{s}{y} + n(u + w)$$

**Binomiale**, eine der Euklidischen Irrationallinien (s. Apotome, Bimediale, schon wegen der in den beiden Artikeln beobachteten Bezeichnung). B. im Allgemeinen nennt Euklid die Summe zweier blofs in Potenz (Quadrat) commensurabelen Linien, also wie $a + \sqrt{B}$, $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

Euklid unterscheidet ebenso zweierlei B. wie Apotomen, nämlich 1) solche, bei welchen der gröfsere Name (Summand) um das Quadrat einer ihm in Länge commensurabelen Linie über den kleineren potenzirt und 2) solche, bei welchen der gröfsere Name um das Quadrat einer ihm in Länge incommensurablen Linie potenzirt.

Ist demnach $a$ oder $\sqrt{A}$ der gröfsere, $b$ oder $\sqrt{B}$ der kleinere Name, und bedeutet $m : n$ ein rationales $m' : n'$ ein irrationales Verhältnifs, so ist (s. Apotome) bei den ersten B.

$$\left.\begin{array}{r} a : \sqrt{a^2 - B} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - b^2} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - B} \end{array}\right\} = m : n$$

Bei den zweiten B.

$$\left.\begin{array}{r} a : \sqrt{a^2 - B} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - b^2} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - B} \end{array}\right\} = m' : n'$$

Euklid unterscheidet nun 6 B., die 3 ersten gehören der ersten, die 3 letzten der zweiten Klasse an.

Die erste B. ist die, bei welcher der gröfsere Name einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$a + \sqrt{B}$$

Die zweite B., bei welcher der kleinere Name einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + b$$

Die dritte B., bei welcher keiner der beiden Namen mit einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Die vierte B. (die erste der zweiten Klasse), wo der gröfsere Name einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$a + \sqrt{B}$$

Die fünfte B., wo der kleinere Name einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + b$$

Die sechste B., wo keiner der beiden Namen einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Es ist hieraus zu ersehen, dafs sich die B. von den Apotomen nur dadurch unterscheiden, dafs die B. Summen, die Apotomen Differenzen sind.

**Binomial-Coefficienten** sind die C. der Glieder derjenigen Reihen, welche aus der Entwickelung eines Binoms entstehen, als

in $1 \cdot a + 1 \cdot b = (a + b)^1$
die Coefficienten 1 1
in $1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2 = (a + b)^2$
dio Coefficienten $1 \cdot 2 \cdot 1$
in $1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3 = (a + b)^3$
die Coefficienten 1, 3, 3, 1.
in $a^4 + 4a^3b + 7a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
die Coefficienten 1, 4, 6, 4, 1

u. s. w.

Jede Reihe ist dadurch entstanden, dafs die ihr vorhergehende Reihe mit $a + b$ multiplicirt worden ist, und so würden alle folgenden Reihen entstehen.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a + b \\ \hline a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b_4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

Die oben ausgeführten Multiplicationen

geben für die gebildeten nnd noch ferner zu bildenden Reihen folgende Gesetze:

1. Durch die Multiplication einer aus einer Potenz des Binoms $(a+b)$ entwickelten Reihe mit dem Binom $(a+b)$ entstehen 2 Reihen, eine durch den Factor $a$, die andere durch den Factor $b$, jede von gleich vielen Gliedern mit dem Multiplicandus; beide Reihen sind einander gleich, wenn man in der ersten oder der zweiten $a$ mit $b$ vertauscht. Jedes der inneren Glieder in der aus der Addition beider Productreihen gebildeten binomischen Reihe ist theils mit gleichen, theils mit ungleichen Coefficienten 2 mal vorhanden, die beiden äußeren Glieder nur einmal, mithin erhält jede binomische Reihe ein Glied mehr als die voranstehende. Die Reihe für $(a+b)^1$ hat zwei Glieder, also die für $(a+b)^2$ hat drei Glieder, die für $(a+b)^3$ hat vier Glieder, die für $(a+b)^n$ hat $(n+1)$ Glieder.

Wegen der möglichen Vertauschung von $a$ und $b$ in beiden Multiplicationsreihen erhält man in der binomischen Reihe als Summe derselben dieselbe Reihe, wenn man die Reihe verkehrt schreibt und $a$ mit $b$ vertauscht, und die Coefficienten vom Anfangsglied nach der Mitte und vom Endglied nach der Mitte zu sind einander gleich. Für $(a+b)^{2m}$ sind $2m+1$ (eine ungrade Anzahl) Glieder, mithin existirt in der Mitte der binomischen Reihe das $m+1$te Glied von vorn oder hinten an gezählt mit einem nur einmal vorhandenen Coefficienten und dessen Exponenten von $a$ und $b$ sind einander gleich, $=m$. Für $(a+b)^{2m-1}$ sind $2m$ (eine grade Anzahl) Glieder, mithin existiren in der Mitte 2 Glieder mit gleichen Coefficienten und den binomischen Gliedern $a^m b^{m-1}$ und $a^{m-1} b^m$.

2. Die beiden Endglieder haben den Coefficient = 1; die beiden zweiten Glieder haben zum Coefficient den Exponent des Binoms. Denn das 2te Glied entsteht

für $(a+b)^2$ aus $a \cdot b + b \cdot a = 2ab$

für $(a+b)^3$ aus $a \cdot 2ab + b \cdot a^2 = 3a^2b$

für $(a+b)^4$ aus $a \cdot 3a^2b + b \cdot a^3 = 4a^3b$

. . . . . . . . . . . . . . .

für $(a+b)^n$ ans $a \cdot (n-1)\, a^{n-2}b + b \cdot a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}b$

Durch Vertauschung von $a$ nnd $b$ erhält man das 2te Glied vom Ende $= nb^{n-1}a$.

Das dritte Glied einer binomischen Reihe entsteht durch die Multiplication von $a$ mit dem dritten Gliede, nnd von $b$ mit dem zweiten Gliede der vorhergegangenen Reihe, also

für $(a+b)^2$ aus $a \cdot 0 + b \cdot b = b^2$

für $(a+b)^3$ ans $a \cdot b^2 + b \cdot 2ab = 3ab^2$

für $(a+b)^4$ aus $a \cdot 3ab^2 + b \cdot 3a^2b = 6a^2b^2$

für $(a+b)^5$ aus $a \cdot 6a^2b^2 + b \cdot 4a^3b = 10a^3b^2$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

für $(a+b)^n$ aus $a \times$ dem 3. Gliede von $(a+b)^{n-1} + b \times$ dem 2. Gliede von $(a+b)^{n-1}$

Der Coefficient des letzten Products ist $=(n-1)$, der Coeff. des ersten ist = dem Coeff. des 3ten Gliedes von $(a+b)^{n-2}$ $+ n-2$; der Coeff. vom 3ten Gliede von $(a+b)^{n-2}$ = dem des 3ten Gliedes von $(a+b)^{n-3} + n - 3$ u. s. w. bis zum ersten Gliede der binomischen Reihe, dessen Coefficient $n - n = 0$ ist; folglich ist der Coeff. des 3ten Gliedes von $(a+b)^n$ = der Summe

$$1+2+3+\ldots n-3+n-2+n-1 = n \cdot \frac{n-1}{2}$$

durch Vertauschung von $a$ und $b$ hat man den B.-C. des 3ten letzten Gliedes ebenfalls $n \cdot \frac{n-1}{2}$

Das 4te Glied von $(a+b)^n$ entsteht aus $a \times$ dem 4ten Gliede von $(a+b)^{n-1} + b \times$ dem 3ten Gliede von $(a+b)^{n-1}$; letzteres hat den C. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und geht man hier ebenso von $n-1$ bis 0 zurück, so erhält man das letzte Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{2}[n-(n-1)]\,[n-(n-2)] = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Der B.-C des 4ten Gliedes von $(a+b)^n$ ist demnach die Summe der Reihe von $n-2$ Gliedern:

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{(n-3)\cdot(n-2)}{2}+\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}$$

Diese Reihe ist eine Reihe der zweiten Ordnung

$$1\cdot 3\cdot 6\cdot 10\ldots\ \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Das 1ste Glied ist 1, das der ersten Differenzenreihe = 2, das der 2ten Differenzenreihe = 1, mithin nach pag. 128 (arithmetische Reihe)

$$S=\frac{n-2}{1}\cdot 1+\frac{(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2}\,2+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3}\cdot 1$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Durch Vertauschung von $a$ und $b$ erhält man den B.-C. des 4ten letzten Gliedes wie diesen.

Für das 5te Glied von Anfang und Ende gerechnet erhält man durch dasselbe Verfahren den B.-C.

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

3. Es läſst sich ganz allgemein beweisen, daſs der B.-C. des $m$ten Gliedes von $(a+b)^n$ = ist:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.[n-(m-2)]\,[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots.\ (m-1)\qquad m}$$

Denn es ist nach No. 2 dieser $m$te B.-C. = der Summe des $m$ten und des $(m-1)$ten C. von $(a+b)^{n-1}$. Gesetzt nun, es fände das Gesetz des Fortschreitens der B.-C. statt bis zu dem $m$ten Gliede von $(a+b)^{n-1}$, so ist das $m$te Glied =

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-1-(m-2)]\,[n-1-(m-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\quad(m-1)\qquad m}$$

und das $m-1$te Glied von $(a+b)^{n-1}$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-1-(m-3)]\,[n-1-(m-2)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\quad(m-2)\qquad(m-1)}$$

Kann nun nachgewiesen werden, daſs auch für $(a+b)^n$ das Gesetz stattfindet, so ist es allgemein gültig, denn da es bis zum 4ten Gliede gilt, gilt es dann auch für das 5te, folglich für das 6te Glied u. s. f. Zu diesem Nachweis löse man die letzten Doppelklammern auf und setze in den 2ten Coeff. noch $m$ als Factor in Zähler und Nenner, so hat man den ersten Coeff.:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-(m-1)]\,[n-m]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\quad m-1\qquad m}$$

den zweiten Coeff.:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-(m-2)]\,[n-(m-1)]\cdot m}{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \ldots.\quad(m-2)\qquad(m-1)\qquad m}$$

die Summe beider ist:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-(m-1)]}{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \ldots.\ m-1.m}[n-m+m]$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.n-(m-1)}{1\cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \ldots.\qquad m}$$

wie nachzuweisen war.

4. Die B.-C. für ein entwickeltes Binom $(a+b)^n$ schreiten also nach dem Gesetz fort, daſs wie ad 2 speciell bis zum 4ten Gliede nachgewiesen worden, der C. für das Glied $a^{n-m}b^m$ gleich ist

$$\frac{n\cdot n-1\cdot n-2\ldots.n-m+1}{1\ .\ 2\ \cdot\ 3\ \ldots.\qquad m}$$

wobei zu bemerken, daſs der allgemeine Schreibgebrauch die Klammern der 2- und

3gliedrigen Factoren durch die Punkte ersetzen läfst. Es ist dieser Ausdruck übrigens die Anzahl der Versetzungen, welche für $n$ Elemente möglich ist, wenn ein Element ($a$) $n - m$, das andere ($b$) $m$mal vorkommt. Denn

$(a+b)^2$ entsteht aus $(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$

$(a+b)^3$ wird $aaa + [aab + aba + baa] + [abb + bab + bba] + bbb$

$(a+b)^4$ wird $aaaa + [aaab + aaba + abaa$ $baaa] + [aabb + abab + abba + baab + baba + bbaa] + [abbb + babb + bbab + bbba] + bbbb$

u. s. w.

5. Es giebt verschiedene abkürzende Schreibarten für die B.-C. Nämlich es wird bezeichnet der

1. C. = 1 mit 1

2. C. = $\frac{n}{1}$ mit ${}^n\mathfrak{A}$ oder $n_1$

3. C. = $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$ mit ${}^n\mathfrak{B}$ oder $n_2$

der Coefficient einer unbestimmten Stelle

$(m+1)$ C. = $\frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \ldots m}$ mit ${}^n\mathfrak{M}$ od. $n_m$

Auch giebt man

dem C. = 1 die Stellenzahl 0,

" C. = $\frac{n}{1}$ ($n_1$) d. Stellenzahl 1 etc.

" C. = $n_m$ die Stellenzahl $m$,

was ganz zweckmäfsig ist, weil dann die Stellenzahl mit dem Index übereinstimmt.

Nach der ersten Schreibweise wird, wenn statt des unbestimmten Gliedes $\mathfrak{M}$ ein bestimmtes, z. B. das 5te angenommen werden soll, dies bezeichnet mit ${}^n\overset{+5}{\mathfrak{M}}$, nach der zweiten Schreibweise mit $n_5$.

Bedeutet ${}^n\mathfrak{M}$ so viel wie $n_x$

so ist ${}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}}$ " " " $n_{(x+1)}$

${}^n\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ " " " $n_{(x-1)}$

${}^{n+1}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$ " " " $(n+1)_{(x+2)}$

Man ersieht hieraus, dafs die erste Schreibweise unbequem, mitunter zweideutig, und dafs die zweite Schreibweise bestimmt und übersichtlicher ist.

6. Ein Binom in eine Reihe entwickelt, ist also

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots . n_m a^{n-m} b^m + \ldots . + n_n a^{n-n} b^n$$

oder

$$= a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots . + n_2 a^2 b^{n-2} + n_1 a b^{n-1} + b^n$$

7. Schreibt man in der binomischen Reihe

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots . + n_1 a b^{n-1} + b^n$$

für $a = 1$ und $b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + \ldots . + n_1 + 1$$

Hieraus folgt, dafs die Summe der B.-C. eines Binoms $(a+b)^n = 2^n$ ist. Als:

$$1 + \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 2^2 = 4$$

$$1 + \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2^3 = 8$$

$$1 + \frac{4}{1} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^4 = 16$$

8. Setzt man $a = b = 1$, so hat man die Summe $S$ der Reihen aller B.-C. in

$$(1+1)^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots . + n + 1 = {}^nS$$

$$(1+1)^m = 1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots . + m + 1 = {}^mS$$

und ebenso

$$(1+1)^{n+m} = 1 + (n+m)_1 + (n+m)_2 + (n+m)_3 + \ldots . + (n+m)_1 + 1 = {}^{n+m}S$$

Wenn man daher beide erste Reihen mit einander multiplicirt, und schreibt die einzelnen Productenreihen unter einander, so dafs die senkrechten Reihen der Coefficienten zu einerlei binomischem Gliede gehören, so erhält man

$$\begin{array}{lllllllll}
1+n_1 & +n_2 & +n_3 & +n_4 & +n_5 & +\ldots\ldots+n_x & +\ldots \\
\;\;+m_1 & +m_1n_1 & +m_1n_2 & +m_1n_3 & +m_1n_4 & +\ldots\ldots+m_1n_{x-1} & +\ldots \\
\;\;+ & \;\;m_2 & +m_2n_1 & +m_2n_2 & +m_2n_3 & +\ldots\ldots+m_2n_{x-2} & +\ldots \\
\;\;+ & & \;\;m_3 & +m_3n_1 & +m_3n_2 & +\ldots\ldots+m_3n_{x-3} & +\ldots \\
\;\;+ & & & \;\;m_4 & +m_4n_1 & +\ldots\ldots+m_4n_{x-4} & +\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\;\;+ & & & & & \;\;m_x & +\ldots
\end{array}$$

Man erhält durch Addition der senkrechten Reihen

$$\begin{array}{ll}
1 & =1 \\
+n_1 \;\; +m_1 & =(n+m)_1 \\
+n_2 \;\; +m_1n_1 \;\; +m_2 & =(n+m)_2 \\
+n_3 \;\; +m_1n_2 \;\; +m_2n_1 \;\; +m_3 & =(n+m)_3 \\
\ldots\ldots\ldots & \\
+n_{x-1}+m_1n_{x-2}+m_2n_{x-3}+\ldots\ldots+m_{x-2}n_1+m_{x-1} & =(n+m)_{x-1} \\
+n_x \;\; +m_1n_{x-1}+m_2n_{x-2}+m_3n_{x-3}+\ldots\ldots+m_x & =(n+m)_x
\end{array}$$

9. Eben so ist

$$(a+b)^n\times(a+b)^m\times(a+b)^p=(a+b)^{n+m+p}$$

u. s. w.

und

$${}^nS\times{}^mS\times{}^pS\times{}^qS\times{}^rS={}^{n+m+p+q+r}S$$

Ist

$$n+m+p+q+r=s$$

so ist

$${}^nS\cdot{}^mS\cdot{}^pS\cdot{}^qS\cdot{}^rS={}^sS$$

Setzt man

$$n=m=p=q=r=\ldots$$

und ist die Anzahl der gleichen Exponenten $=k$, so hat man

$${}^nS\cdot{}^nS\cdot{}^nS\ldots\ldots=[{}^nS]^k={}^{kn}S={}^sS$$

hieraus folgt

$${}^nS=\sqrt[k]{{}^sS}={}^sS^{\frac{1}{k}}={}^{\frac{s}{k}}S$$

wenn $n=\frac{s}{k}$ ist, und man hat

$${}^{\frac{s}{k}}S=(1+1)^{\frac{s}{k}}=1+\left(\frac{s}{k}\right)_1+\left(\frac{s}{k}\right)_2+\left(\frac{s}{k}\right)_3+\ldots\left(\frac{s}{k}\right)_x+\ldots\ldots$$

wo $s$ und $k$ ganze positive Zahlen sind, die nicht in einander aufzugehen brauchen, so dafs dies Gesetz der B.-C, auch für gebrochene Zahlen gilt.

Setzt man $s=n$; $k=m$, so hat man

$$\left(\frac{n}{m}\right)_1=\frac{n}{m}$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1}{1\cdot2}=\frac{n\cdot n-m}{m\cdot2m}$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_3=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1\cdot\frac{n}{m}-2}{1\;\cdot\;2\;\cdot\;3}=\frac{n\cdot n-m\cdot n-2m}{m\;\cdot\;2m\;\cdot\;3m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_x=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1\ldots\ldots\frac{n}{m}-x+1}{1\;\cdot\;2\;\ldots\ldots\;x}=\frac{n\cdot n-m\cdot n-2m\ldots\ldots n-(x-1)m}{m\cdot2m\cdot3m\;\ldots\ldots\;xm}$$

10. Wie

$$(1+1)^n=1+n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots={}^nS$$

und

$$(1+1)^m=1+m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots={}^mS$$

so ist auch

$$(1+1)^{n-m}=1+(n-m)_1+(n-m)_2+(n-m)_3+\ldots\ldots={}^{n-m}S$$

Es ist aber

$$(1+1)^{n-m}=\frac{(1+1)^n}{(1+1)_m}=\frac{{}^nS}{{}^mS}$$

und setzt man $n=0$, so hat man

$$(1+1)^{-m} = \frac{1}{(1+1)^m} = 1 + (-m)_1 + (-m)_2 + (-m)_3 + \ldots = {}^{-m}S = \frac{1}{{}^mS}$$

Es ist mithin das Gesetz der B.-C. auch für ganze negative Zahlen als richtig erwiesen.

11. Setzt man für $\frac{1}{(1+1)^m}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{(1+1)^{m+p+q+r+\ldots}} = \frac{1}{(1+1)^s} = {}^{-s}S$$

ferner

$$m = p = q = r = \ldots.$$

und

$$m + p + q + r + \ldots. = k \cdot m = s$$

so ist

$${}^{-s}S = {}^{-km}S$$

$${}^{-m}S = \sqrt[k]{{}^{-m}S} = {}^{-m}S^{\frac{1}{k}} = {}^{-\frac{m}{k}}S$$

$$= 1 + \left(-\frac{m}{k}\right)_1 + \left(-\frac{m}{k}\right)_2 + \cdots$$

wonach auch für negativ gebrochene Zahlen das Gesetz für die B.-C. erwiesen worden ist.

12. Wird ein Binom $(a+b)^n$ in eine Reihe entwickelt, und ist $n$ eine ganze positive Zahl, so ist die Reihe endlich, sie hat ein letztes Glied; ist aber $n$ negativ ganz oder positiv gebrochen oder negativ gebrochen, so kann man die Reihe bis ins Unendliche fortsetzen.

Z. B. $(a+b)^4$ giebt die Coefficienten 1; 4; 6; 4; 1.

$(a+b)^{-4}$ die Coeff. 1; $-4$; $\frac{-4 \cdot -5}{1 \cdot 2} = +10$;

$$\frac{-4 \cdot -5 \cdot -6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -20 \text{ u. s. w. in inf.}$$

$(a+b)^{\frac{2}{3}}$ die Coeff. 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3}}{1 \cdot 2} \cdot = -\frac{1}{9}$;

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = +\frac{4}{27} \text{ u. s. w. in inf.}$$

$(a+b)^{-\frac{2}{3}}$ die Coeff. 1; $-\frac{2}{3}$; $\frac{-\frac{2}{3} \cdot -\frac{5}{3}}{1 \cdot 2} = +\frac{5}{9}$

u. s. w. in inf.

13. Der $x$te Coefficient von $(a+b)^n$ ist = der Summe aller $(x-1)$ten Coefficienten von $(a+b)^1$ bis $(a+b)^{n-1}$. Es folgt dies aus No. 2. Für $n$ positiv ganz wird diese Summe endlich, ist $n$ negativ ganz oder positiv gebrochen oder negativ gebrochen, so wird die Reihe unendlich.

Man kann überall mit einem Ergänzungsgliede abbrechen. Denn nach No. 2 ist der Coefficient des $x$ten Gliedes der Reihe eines Binoms $(a+b)^n$

$$n_x = (n-1)_{x-1} + (n-1)_x \qquad (1)$$

$$= (n-1)_{x-1} + (n-2)_{x-1} + (n-2)_x \qquad (2)$$

$$= (n-1)_{x-1} + (n-2)_{x-1} + (n-3)_{x-1} + (n-3)_x \qquad (3)$$

u. s. w.

Das letzte Glied in jeder dieser 3 Reihen ist das Ergänzungsglied. Ist $n$ positiv ganz, so hört die Reihe auf und zwar mit dem Gliede $[n-(n-x+1)]_{x-1} = (x-1)_{x-1}$, indem das dazu gehörige Ergänzungsglied $(x-1)_x = 0$ wird.

Z. B. für $(a+b)^{10}$ hat man das 6te Glied ($n = 10$; $x = 6$)

$$10_6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 210$$

$$= 9_5 + 8_5 + 7_5 + 6_5 + 5_5 =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$$

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$$

$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$$

$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1 = 210$$

Für $(a+b)^{-10}$ hat man das 3te Glied ($n = 10$; $x = 3$)

$$\frac{-10 \cdot -11 \cdot -12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -220$$

$$= \frac{-11 \cdot -12}{1 \cdot 2} + \frac{-11 \cdot -12 \cdot -13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = +66 - 286 = -220$$

$$\text{oder } = \frac{-11 \cdot -12}{1 \cdot 2} + \frac{-12 \cdot -13}{1 \cdot 2} + \frac{-12 \cdot -13 \cdot -14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 66 + 78 - 364 = -220$$

u. s. w.

Für $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ hat man das 4te Glied ($n = \frac{2}{3}$; $x = 4$)

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3} \cdot -\frac{7}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = +\frac{7}{243}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\cdot-\frac{4}{3}\cdot-\frac{7}{3}}{1\cdot2\cdot3} + \frac{-\frac{1}{3}\cdot-\frac{4}{3}\cdot-\frac{7}{3}\cdot-\frac{10}{3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = -\frac{14}{81} + \frac{35}{243} = +\frac{7}{243}$$

u. s. w.

14. Da

$$n_x = \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\ldots n-x+2\cdot n-x+1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)\cdot x}$$

und

$$n_{x-1} = \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\ldots n-x+2}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)}$$

so ist

$$\frac{n_x}{n_{x-1}} = \frac{n-x+1}{x}$$

oder

$$x\cdot n_x = (n-x+1)\,n_{x-1}$$

hieraus hat man also

$$1\cdot n_1 = n\cdot n_0 \qquad = (n-1)_0\; n$$
$$2\cdot n_2 = (n-1)\,n_1 \qquad = (n-1)_1\cdot n$$
$$3\cdot n_3 = (n-2)\,n_2 \qquad = (n-1)_2\cdot n$$
$$4\cdot n_4 = (n-3)\,n_3 \qquad = (n-1)_3\cdot n$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$x\cdot n_x = (n-x+1)\cdot n_{x-1} = (n-1)_{x-1}\cdot n$$

15. In jedem Binom $(a+b)^n$ ist $1\cdot a^n$ das erste Glied; das folgende $n_1 a^{n-1}$. Dieser Coefficient $n_1$ wird oben der erste genannt, daher ist 1 der 0te und allgemein $n_0 = 1$.

So ist

$$n_n = (n-1)_{n-1} = (n-x)_{n-x} = n_0 = 1$$
$$n_{n-1} = n;\; (n-1)_{n-2} = n-1 \text{ u. s. w.}$$

und

$$n_{n+1} = (n-1)_n = 0$$

16. Wenn man in den folgenden beiden Reihen der B.-C.

$$1\cdot n_1\; n_2\; n_3\; n_4 \ldots n_x$$
$$1\cdot m_1\; m_2\; m_3\; m_4 \ldots m_x$$

die unter einander stehenden Glieder mit einander multiplicirt und die Summe bildet, so kommt man durch weitre Entwickelung auf ein interessantes Gesetz.

Man hat

$$1\cdot 1 + n_1 m_1 + n_2 m_2 + \ldots n_x\cdot m_x$$

Nach No. 13 ist

$$n_x = (n-1)_{x-1} + (n-1)_x \qquad (1)$$

also auch

$$m_x = (m-1)_{x-1} + (m-1)_x \qquad (2)$$

Nach No. 14 ist

$$x\cdot n_x = (n-x+1)\,n_{x-1} \qquad (3)$$

und

$$x\cdot m_x = (m-x+1)\,m_{x-1} \qquad (4)$$

Mithin hat man aus 2 und 3

$$x\cdot n_x m_x = (n-x+1)\,n_{x-1}\cdot[(m-1)_{x-1} + (m-1)_x] \qquad (5)$$

und aus 1 und 4

$$x\cdot n_x m_x = (m-x+1)\,m_{x-1}\cdot[(n-1)_{x-1} + (n-1)_x] \qquad (6)$$

In 5 und 6 für das zweite Glied den zweiten Summanden der Klammergröfse mit den Werthen $xn_x$ aus 3 und $xm_x$ aus 4 multiplicirt, giebt

$$x\cdot n_x\cdot m_x = (n-x+1)\,n_{x-1}\cdot(m-1)_{x-1} + xn_x\,(m-1)_x \qquad (7)$$
$$x\cdot n_x\cdot m_x = (m-x+1)\,m_{x-1}\cdot(n-1)_{x-1} + xm_x\,(n-1)_x \qquad (8)$$

Setzt man nach Formel 7 die Werthe 1, 2, 3 .... nach einander für $x$, so erhält man

$$1\cdot n_1 m_1 = n\cdot n_0\;(m-1)_0 + 1\cdot n_1\,(m-1)_1 = n.1.1 + n\,(m-1)$$
$$2\cdot n_2 m_2 = (n-1)\,n_1\,(m-1)_1 + 2\,n_2\,(m-1)_2$$
$$3\,n_3 m_3 = (n-2)\,n_2\,(m-1)_2 + 3\,n_3\,(m-1)_3$$
$$4\,n_4 m_4 = (n-3)\,n_3\,(m-1)_3 + 4\,n_4\,(m-1)_4$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$(x-1)\,n_{x-1}\,m_{x-1} = (n-x+2)\,n_{x-2}\,(m-1)_{x-2} + (x-1)\,n_{x-1}\,(m-1)_{x-1}$$
$$x\cdot n_x\cdot m_x = (n-x+1)\,n_{x-1}\,(m-1)_{x-1} + xn_x\cdot(m-1)_x$$

---

Hieraus durch Addition, wenn man rechts jedes erste Glied einer Reihe mit dem zweiten Gliede der vorherigen Reihe zusammen nimmt:

$$S = n\,[1\cdot 1 + n\,(m-1) + n_2\,(m-1)_2 + \ldots n_{x-1}\,(m-1)_{x-1}] + xn_x\,(m-1)_x$$

Verfährt man ebenso nach Formel 8, so hat man nur in der eben ermittelten Summe $n$ mit $m$ zu vertauschen und es ist

$$S = m\,[1\cdot 1 + m\,(n-1) + m_2\,(n-1)_2 + \ldots m_{x-1}\,(n-1)_{x-1}] + xm_x\,(n-1)_x$$

Setzt man $x = n$ und berücksichtigt, dafs $n_{n-1} = n$; $n_n = 1$ und $(n-1)_n = 0$, so erhält man

$$S = n[1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots . n_2(m-1)_{n-2} + n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n]$$
$$S = m[1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots . m_{n-2}(n-1) + m_{n-1}]$$
woraus
$$S' = 1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots . + n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n$$
$$= \frac{m}{n}[1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots . + m_{n-2}(n-1)_{n-2} + m_{n-1}]$$

Setzt man in der Reihe links $m$ statt $m-1$ und $n-1$ statt $n$, so erhält sie ein Glied weniger, und wird gleich der rechts eingeklammerten Reihe, nämlich
$$S'' = 1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots . + m_{n-2}(n-1) + m_{n-1}$$
$$= \frac{m+1}{n-1}[1 + (m+1)(n-2) + (m+1)_2(n-2)_2 + \ldots . + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}]$$
woraus
$$S' = \frac{m}{n} \cdot S'' = \frac{m}{n} \cdot \frac{m+1}{n-1}[1 + (m+1)(n-2) + (m+1)_2(n-2)_2$$
$$+ \ldots + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}]$$

Setzt man wiederum in der Reihe links von $S''$ $m+1$ für $m$, und $n-2$ für $n-1$, so erhält sie wieder ein Glied weniger und wird gleich der rechts eingeklammerten Reihe der letzten Gleichung, nämlich es entsteht aus $S''$
$$S''' = 1 + (m+1)(n-2 + (m+1)_2(n-2)_2 + \ldots + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}$$
$$= \frac{m+2}{n-2}[1 + (m+2)(n-3) + (m+2)_2(n-3)_2 + \ldots . + (m+2)_{n-3}]$$
woraus
$$S' = \frac{m}{n} \cdot \frac{m+1}{n-1} S''' = \frac{m}{n} \cdot \frac{m+1}{n-1} \cdot \frac{m+2}{n-2}[1 + (m+2)(n-3) + \ldots + (m+2)_{n-3}]$$

Fährt man so fort, so erhält man die Klammergröfse rechts in immer weniger Gliedern.

Ist der letzte Factor
$$\frac{m+n-3}{n-n+3} = \frac{m+n-3}{3} \text{ statt } \frac{m+2}{n-2}$$
so ist die Klammergröfse
$$= 1 + 2_1(m+n-3)_1 + 2_2(m+n-3)_2$$
Für den letzten Factor
$$\frac{m+n-2}{2}$$
ist die Klammergröfse
$$1 + 1_1(m+n-2)_1$$
und für den letzten Factor
$$\frac{m+n-1}{1}$$
die Klammergröfse
$$1 + 0 \cdot (m+n-1)_0 = 1$$
Mithin ist

$$S' = 1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots . n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n$$
$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{m+1}{n-1} \cdot \frac{m+2}{n-2} \times \ldots \times \frac{m+n-1}{1}$$
$$= \frac{m+n-1 \cdot m+n-2 \ldots . m+2 \cdot m+1 \cdot m}{1 \cdot 2 \ldots . n-2 \cdot n-1 \cdot m} = (m+n-1)_n$$

Setzt man in diese Formel für $S'$, $m$ für $m-1$, so erhält man
$$1 + n \cdot m + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \ldots . n_n m_n = (m+n)_n$$
und für $m = n$
$$1 + n^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2 + \ldots . n_n{}^2 = (2n)_n$$
eine Reihe der Quadrate der B.-C. durch einen einfachen B.-C. ausgedrückt.

**Binomischer Lehrsatz** ist der Satz, dafs die in dem vorigen Artikel No. 4 gegebene Formel für die Reihen-Entwickelung irgend einer Potenz eines Binoms richtig ist, nämlich
$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b^1 + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$+ n_2 a^2 b^{n-2} + n_1 a^1 b^{n-1} + b^n$$
Die Richtigkeit für den Exponent $n$ als ganze positive Zahl beweist No. 4, für $n$ als gebrochene positive Zahl No. 7, und für $n$ als ganze oder gebrochene negative Zahl No. 8. Sämmtliche Beweise und Entwickelungen sind auf elementarem Wege geschehen.

Die Taylor'sche Reihe giebt den b. Satz unmittelbar: diese ist

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{(2)} f^2x + \frac{k^3}{(3)} f^3x + \ldots + \frac{k^n}{(n)} f^nx \text{ in inf}$$

durch dieselbe wird nämlich irgend eine Function ($f$) einer zweigliedrigen Urveränderlichen in eine Reihe entwickelt, die nach den auf einander folgenden Differenzialen der einen und nach den auf einander folgenden Potenzen der anderen Urveränderlichen fortschreitet. Unter (2) wird $1 \cdot 2$, unter (3) wird $1 \cdot 2 \cdot 3$, unter ($n$) wird $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n$ verstanden.

Ist nun

$$f(x+k) = (x+k)^n$$

so hat man

$fx = x^n$; $f^1x = nx^{n-1}$; $f^2x = n \cdot n - 1 \cdot x^{n-2}$ u. s. w.

Man erhält also aus der Taylor'schen Reihe

$$(x+k)^n = x^n + k \cdot nx^{n-1} + k^2 \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} + k^3 \cdot \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \text{ u. s. w.}$$

also

$$(x+k)^n + x^n + n_1 x^{n-1} k + n_2 x^{n-2} k^2 + \ldots + n_{n-1} x k^{n-1} + k^n$$

2. Es ist noch zu beachten, daſs wenn das zweite Glied negativ ist, wie $(a-b)^n$, $(x-k)^n$, alle Glieder der Reihe negativ werden, in welchen $b$, $k$ mit einem ungraden Exponent vorkommt.

Es ist

$$(a-b)^n = a^n - n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots \pm n_2 a^2 b^{n-2} \mp n_1 a b^{n-1} \pm b^n$$

die Vorzeichen der letzten Glieder bleiben unbestimmt, wenn nicht der Exponent bestimmt ausgedrückt wird. Ist $n$ eine ganze Zahl, so ist $2n$ eine gerade, $2n-1$ eine ungerade Zahl und es ist

$$(a-b)^{2n} = a^{2n} - n_1 a^{2n-1} b + n_2 a^{2n-2} b^2 - \ldots + a^2 b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}$$
$$(a-b)^{2n-1} = a^{2n-1} - n_1 a^{2n-2} b + \ldots - a^2 b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}$$

**Biquadrat** die vierte Potenz, die Potenz mit dem Exponent $\pm 4$ als $a^4$; $(a+b)^4$; $a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4$ das Quadrat eines Quadrats: $a^4 = (a^2)^2$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

**Biquadratische Gleichung** ist eine Gleichung vom 4ten Grade, s. algebraische Gleichung No. 1 bis 5, und Auflösung der b. Gl. s. No. 26 bis 28, pag. 57 bis 60.

**Biquadratische Parabel**, eine P. höherer Ordnung. Bedeuten $y$ die Ordinate, $x$ die Abscisse, $a, b, c \ldots$ Constanten, so ist die Gleichung der b. P.

entweder $y^4 = a^3x$

oder $y^4 = a^2x^2$

oder $y^4 = ax^3$

oder $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

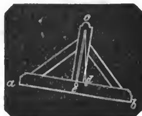
s. Apollonische Parabel.

**Blätterdurchgang** (Miner.) oder Spaltungsrichtung heiſst die Richtung oder vielmehr, da unter Richtung immer nur eine gerade Linie verstanden werden sollte, die Lage der Fläche, nach welcher ein krystallinisches Fossil von regelmäſsiger Structur durch äuſsere mechanische Einwirkung auf dasselbe zerspaltet. Der B. ist immer eine ebene Fläche und einer der Krystallflächen des Fossils parallel.

**Bleiwaage, Maurerwaage, Setzwaage,** ein Instrument, mit welchem der Bauhandwerker Baustücke in horizontale Lage bringt, oder solche beabsichtigte Lagen prüft. Auch wird sie zur Herstellung richtiger Querprofile beim Chausseebau, bei Wasserbauten zum Nivelliren des Wasserspiegels, und überhaupt zu allen kleinen örtlichen Nivellements wegen ihrer Einfachheit und Sicherheit mit Nutzen angewendet.

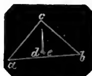
Die Hauptconstruction des Werkzeugs besteht in der genauen Abrichtung eines

Fig. 225.



rechten Winkels, dafs also eine Linie *ce* mit der Linie *ab* zwei rechte Winkel *cea* und *ceb* bildet. *ab* ist die genau abgerichtete Unterkaute eines Lineals, *ce* eine eingeschnittene Rinne, die in eine halbkugelförmige Vertiefung *e* endigt. In *c* wird eine Schnur befestigt, an der eine Bleikugel *d* hängt; spielt die Schnur frei, so giebt in Folge der Schwere die Linie *cd* die Verticale an, trifft also *cd* mit *ce* zusammen, so ist *ab* horizontal. Bei der für unbedeutende Arbeiten behufs der schnellen Handhabnng aus einem dreieckigen Brett bestehenden B. ist, wie

Fig. 226.




gezeichnet *a* gegen *b* noch zu tief, bei der gröfseren noch zu hoch. Je länger die Linien *ab* und *ce*, desto genauer wird die Arbeit.

**Blendung**, ein undurchsichtiger Ring gegen den Rand des Objectivglases eines Fernrohrs. s. achromatisch No. 1.

**Blindrechnung**, Regel cöci, ist die Auflösung einer Rechenaufgabe, welche bei elementarer Rechnungsweise dahin führt, dafs man probiren (blindlings herumsuchen) mufs, um das Resultat zu finden, woher auch ihr Name herrühren mag; sie gehört der unbestimmten Analytik (den diophantischen Gleichungen) an, beschränkt sich aber nur auf die einzige Art von Aufgaben: eine gegebene Zahl ($a$) in 3 oder mehrere Theile ($x + y + z + \ldots = a$) zu theilen, so dafs, wenn man jeden Theil mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, die Summe der Producte einer gegebenen Zahl = sei ($mx + ny + pz + \ldots = b$)

Ist die Zahl $a$ nur in 2 Theile zu theilen, so ist die Aufgabe bestimmt. Denn

$$x + y = a$$
$$mx + ny = b$$

giebt (s. algebraische Gleichung No. 29)

$$x = \frac{b - na}{m - n}$$

und

$$y = \frac{ma - b}{m - n}$$

Ist die Zahl $a$ in 3 Theile zu theilen, so erhält man 2 Gleichungen mit 3 unbekannten Gröfsen, nämlich

$$x + y + z = a$$
$$mx + ny + pz = b$$

Multiplicirt man die erste Gl. mit $p$, so erhält man

$$px + py + pz = pa$$

hierzu

$$mx + ny + pz = b$$

woraus durch Subtraction

$$(p - m)x + (p - n)y = pa - b \qquad \text{I}$$

Multiplicirt man die erste Gl. statt mit $p$ mit $n$, so erhält man

$$(n - m)x - (p - n)z = na - b \qquad \text{II}$$

und multiplicirt man jene Gl. mit $m$

$$(n - m)y + (p - m)z = b - ma \qquad \text{III}$$

Sollen nun $x, y, z$ wie $a$ ganze Zahlen sein, so mufs

$pa - b \; - (p - m)x$ durch $p - n$

$na - b \; + (p - n)z$ durch $n - m$

und $b - ma - (n - m)y$ durch $p - m$

ohne Rest theilbar sein.

Beispiel 1. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 24.) Man soll 30 in 3 Theile zerlegen, die so beschaffen sind, dafs wenn man den ersten Theil mit 7, den zweiten mit 19 und den dritten mit 38 multiplicirt, die Summe dieser 3 Producte 745 sei. Welche Theile sind es?

Hier ist

$$x + y + z = 30$$
$$7x + 19y + 38z = 745$$

mithin

$$a = 30;\; b = 745;\; m = 7;\; n = 19;\; p = 38$$

Man hat also die 3 Gleichungen

$$(38 - 7)x + (38 - 19)y = 38 \cdot 30 - 745$$
$$(19 - 7)x - (38 - 19)z = 19 \cdot 30 - 745$$
$$(19 - 7)y + (38 - 7)z = 745 - 7 \cdot 30$$

oder reducirt:

$$31x + 19y = 395 \qquad (1)$$
$$12x + 19z = -175 \qquad (2)$$
$$12y + 31z = 535 \qquad (3)$$

Aus Gl. 1 geht hervor, dafs $395 - 31x$ durch 19 theilbar sein mufs oder $(21 \cdot 19 - 4) - (2 \cdot 19 \cdot x - 7x)$ also $-4 + 7x$ durch 19 theilbar.

Bezeichnet $A$ irgend eine ganze Zahl, so ist nun offenbar

$$7x = 19A + 4$$

woraus

$$x = \frac{19A + 4}{7} = 3A + 1 - \frac{2A + 3}{7}$$

Da $A$ eine ganze Zahl sein mufs, so kann $\frac{2A + 3}{7}$ nur ungrade sein.

Für $\frac{2A + 3}{7} = 1$ erhält man $A = 2$ und

$$x = 3 \cdot 2 + 1 - 1 = 6$$

Für $\frac{2A + 3}{7} = 3$ erhält man $A = 9$ und

$$x = 3 \cdot 9 + 1 - 3 = 25$$

Für $\frac{2A+3}{7} = 5$ wird $x > 30$, was schon unmöglich ist, es können also nur die beiden ersten Werthe 1 und 3 gelten.

Setzt man in die erste Gl. $x = 25$, so erhält man

$$31 \cdot 25 + 19\,y = 395$$

woraus $y$ negativ wird, mithin ist $x = 25$ unmöglich, und der einzig mögliche Werth für $x = 6$.

Diesen Werth in 1 gesetzt, giebt

$$y = \frac{209}{19} = 11$$

und

$$30 - (11 + 6) = 13 \text{ ist} = z$$

Die Theile von 30 sind also 6, 11, 13 und $6 \cdot 7 + 11 \cdot 19 + 13 \cdot 38 = 745$.

Beispiel 2. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 28.) Dreifsig Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren zusammen 58 Thlr. Ein Mann bezahlt 3 Thlr. 12 gGr., eine Frau 1 Thlr. 9 gGr. und ein Kind 6 gGr. Wie viel Männer ($x$) Weiber ($y$) und Kinder ($z$) waren es?

Man hat

$$x + \;.\; y + z = 30$$
$$84x + 33y + 6z = 1392 \text{ (gGr.)}$$

$m = 84$; $n = 33$; $p = 6$; $a = 30$; $b = 1392$ also nach obiger Formel I:

$$(6 - 84)x + (6 - 33)y = 6 \cdot 30 - 1392$$

oder reducirt

$$26x + 9y = 404$$

und $404 - 26x$ mufs durch 9 theilbar sein oder wie beim ersten Beispiel

$9 \cdot 45 - 1 - 3 \cdot 9 \cdot x + x$ durch 9 theilbar oder

$$\frac{x-1}{9} = A$$

Der Form nach ist $x$ also 10, 19, 28 u. s. w. Allein 19 Männer zu $3\frac{1}{2}$ Thlr. würden schon $66\frac{1}{2}$ Thlr., also mehr als die ganze Gesellschaft zusammen verzehrt haben, mithin können nur 10 Männer gewesen sein. Man findet wie nach Beispiel 1. 16 Weiber und 4 Kinder.

Beispiel 3. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 25.) Man soll 100 in 3 Theile zerlegen von solcher Beschaffenheit, dafs wenn man den ersten Theil mit 17, den zweiten mit 11, den dritten mit 3 multiplicirt, und hierauf die 3 Producte addirt, die Summe 880 sei. Welche Theile sind es?

$$x + y + z = 100$$
$$17x + 11y + 3z = 880$$

$p = 3$; $m = 17$; $n = 11$; $a = 100$; $b = 880$ mithin nach obiger Formel 1

$$(3 - 17)x + (3 - 11)y = 3 \cdot 100 - 880$$

und reducirt:

$$7x + 4y = 290$$

$$\frac{290 - 7x}{4} = y; \text{ und } \frac{x+2}{4} = A$$

woraus der Form nach, und da $x < 42$ sein mufs

$x = 2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; 34$ u. 38 sein kann.

Setzt man diese Werthe in $\frac{290 - 7x}{4} = y$ so erhält man die zugehörigen

$y = 69; 62; 55; 48; 41; 34; 27; 20; 13$ u. 6

Da $z = 100 - (x + y)$ so erhält man die zugehörigen

$z = 29; 32; 35; 38; 41; 44; 47; 50; 53$ u. 56 und alle 10 zusammengehörigen Zahlen thun der Aufgabe Genüge.

Soll eine Zahl $a$ in 4 Theile getheilt werden, dann hat man die Gleichungen

$$w + x + y + z = a$$
$$mw + nx + py + qz = b$$

Multiplicirt man die obere Gleichung erst mit $m$, dann mit $n$ und zieht jedesmal die untere davon ab, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(m-n)x + (m-p)y + (m-q)z = ma - b \quad (1)$$
$$-(m-n)w + (n-p)y + (n-q)z = na - b \quad (2)$$

Beispiel (Meier Hirsch, pag. 261, No. 27). Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück verkauft, eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7 und eine Taube für 4 gGr. und insgesammt 29 Thlr. 11 gGr. daraus gelöst. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

$$w + x + y + z = 76 \text{ (Stück)}$$
$$20w + 10\tfrac{1}{2}x + 7y + 4z = 707 \text{ (gGr.)}$$

Nach den beiden Formeln hat man

$$(20 - 10\tfrac{1}{2})x + (20 - 7)y + (20 - 4)z = 20 \cdot 76 - 707$$

und

$$-(20 - 10\tfrac{1}{2})w + (10\tfrac{1}{2} - 7)y + (10\tfrac{1}{2} - 4)z = 10\tfrac{1}{2} \cdot 76 - 707$$

reducirt:

$$19x + 26y + 32z = 1626$$
$$-19w + 7y + 13z = 182$$

Aufser diesen beiden Gleichungen können noch 2 aufgestellt werden, nämlich eine zwischen $w$, $x$, $y$ und zwischen $w$, $x$, $z$, und jede hat 3 unbekannte Gröfsen. Es genügen also eine unzählige Menge von Auflösungen, bei welchen $w$, $x$, $y$, $z$ wie verlangt, ganze Zahlen sind, und daher können 2 ganz willkührliche Bestimmungen in Betreff zweier genommen werden. Meier Hirsch scheint aus der Gleichung zwischen $w$, $y$, $z$ bestimmt zu haben, dafs $z = 2w$ sei, dafs nämlich doppelt so viel Tauben als Gänse verkauft seien.

Aus 1 folgt, dafs

$$2 \cdot (813 - 13y - 16z)$$

durch 19 theilbar sein mufs, also auch

$$3z + 6y - 4$$

durch 19 theilbar; mithin

$$3z + 6y = 19A + 4$$

und

$$z + 2y = \frac{19A + 4}{3} = 6A + 1 + \frac{A + 1}{3}$$

Aus 2 folgt, dafs

$$7y + 13z - 182$$

durch 19 theilbar sein mufs, mithin auch

$$7y - 6z + 8$$

durch 19, und

$$7y - 6z = 19B - 8$$

Nimmt man aus $3z + 6y = 19A + 4$ die Bestimmung, dafs $3z = 6y$, d. h. $z = 2y$ sei, so hat man der Form nach

$$6z = 19A + 4$$

woraus $z$ von der Form

$$3A + 1 + \frac{A - 2}{6}$$

Für $A$ den kleinsten Werth 8 gesetzt, erhält man

$$z = 26, \text{ also } y = 13$$

diese Werthe in Gl. 2 gesetzt, giebt

$$w = 13$$

und aus $w + x + y + z = 76$ endlich

$$x = 24$$

$w = 13$ Gänse zu 20 gGr. = 260 gGr.
$x = 24$ Hühner zu $10\frac{1}{2}$ gGr. = 252 „
$y = 13$ Enten zu 7 gGr. = 91 „
$z = 26$ Tauben zu 4 gGr. = 104 „
Summa 707 gGr.
= 29 Thlr. 11 gGr.

Aus der 2ten Form

$$7y - 6z = 19B - 8$$

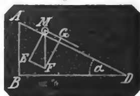
geht hervor, dafs die Annahme $7y = 6z$ nicht möglich ist, weil $19B - 8$ für keinen ganzen Werth von $B = 0$ wird.

Aufser belustigenden Gesellschafts-Aufgaben findet die Blindrechnung selten, wenigstens nicht leicht, eine ernste Anwendung.

**Böschung**. Abweichung der ebenen Aufsenfläche eines Baukörpers von der lothrechten Ebene, indem sie unten am weitesten hervortritt. Sie hat den Zweck, die Grundebene zu verbreitern, und dadurch dem Bauwerk eine gröfsere Stabilität zu verschaffen. Bei Steinmauerwerk sollte die B. möglichst vermieden werden, weil sie der nachtheiligen Einwirkung der Witterung ausgesetzt ist. Die Hafenmolen erhalten eine sehr bedeutende B., man scheint aber, wie in England schon geschehen, davon zurück zu kommen, weil die Schräge der Mole dem Wasser die Leitung zu hohem Aufsteigen giebt, das bei Sturm thurmartig wird, und grofse Beschädigungen verursacht; bei ganz senkrechten Aufsenwänden aber prallt das Wasser in sich zurück, und ist nicht weiter schädlich, indem die See nur auf eine nicht sehr grofse Tiefe unruhig, darunter ruhig ist, weil das Wasser keine Elasticität hat. Bei Erdbauten sind die B. nicht zu vermeiden, besonders wenn das Bauwerk den Erschütterungen ausgesetzt ist. Bei Chausseen giebt man deshalb dem Graben an der Strafsenseite gröfsere B. als an der Feldseite. Bei Festungsbauten erhält die Brustwehr nach aufsen eine gröfsere B. als die Contrescarpe, weil jene dem feindlichen Feuer ausgesetzt ist. Man bezeichnet eine B. als $\frac{1}{2}$füfsig, 1füfsig, 2füfsig u. s. w., wenn auf jeden Fufs senkrechte Höhe $AB$ die horizontale Ausladung $BD$ $\frac{1}{2}$Fufs, 1 Fufs, 2 Fufs u. s. w. beträgt.

2. Unter natürlicher B. unfester Massen, wie Erde, Getreidekörner u. s. w. versteht man die B., bei welcher die Masse gerade liegen bleibt, nicht mehr herabrutscht. Es sei $M$ ein Theilchen einer aufgeschütteten Masse von dem Gewicht $P$, so hat dieses das Bestreben, nach $MF$

Fig. 227.




senkrecht herabzufallen; es wird aber durch die Oberfläche $AD$ daran gehindert, und äufsert auf diese einen Druck nach der Richtung $ME$ senkrecht darauf, und zwar mit einem Gewicht $\frac{ME}{MF} \cdot P = P \cos \alpha$

Ferner hat $M$ das Bestreben, längs $AD$ herabzugleiten, und zwar mit dem Gewicht $\frac{MG}{MF} \cdot P = P \sin \alpha$

An diesem Herabrollen oder rutschen wird $M$ gehindert durch die Reibung, welche der erstgedachte Druck zwischen $M$ und der Fläche $AD$ veranlafst, und wenn $\mu$ die Gröfse des Reibungswerths für die Gewichts-Einheit ist, mit dem Hindernifs $\mu P \cos \alpha$.

Offenbar bleibt noch eben die Masse $M$ liegen, wenn beide Wirkungen im Gleichgewicht sind, wenn also

$$\mu P \cos \alpha = P \sin \alpha$$

oder wenn

$\mu = tg\,\alpha$ (Reibnngswinkel)

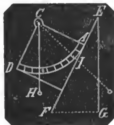
Die natürliche B. einer anfgeschütteten Masse ist daher diejenige B., deren ∠ (Böschnngswinkel) sngleich der Reibnngswinkel der Masse ist.

Moseley, die mechanischen Principien etc., übersetzt von H. Scheffler, giebt § 320, pag. 55 für folgende aufznschüttende Massen die natürlichen B.winkel an:

| Bezeichnung der Massen. | Natürlicher Böschnngswinkel. |
|---|---|
| Dammerde oder Lehm in trockenem Znstande | 30° |
| desgl. in fenchtem Znstande | 45° |
| desgl. ganz mit Wasser dnrchzogen | 17° |
| desgl. festgestampft | 66 bis 74° |
| Feiner nnd trockener Stanbsand | 27° |
| Reiner trockener Strensand, Grand und feiner Kies | 26° |
| desgl. in fenchtem Znstande | 32° |
| Unregelmäfsige Kieselsteine | 45° |
| Abgerundete Kiesel nnd Schrot | 23° |
| Getreide nnd andere Samen, nach der Glätte der Körner | 30 bis 35° |

**Böschungsquadrant**, ein Instrument znm Messen der Böschung. Es besteht ans einem qnadratischen Brett von 3 bis bis 4 Fufs Seitenlänge, von dessen einer Ecke aus ein Quadrant verzeichnet ist, und ein Bleiloth oder Perpendikel herabreicht. Wie gezeichnet ist ∠ $DCH =$ ∠ $FEG$ nnd $DH : DC = FG : GE$; mithin

Fig. 228.




giebt $DH : DC$ das Verhältnifs der Grundlinie znr Höhe, das Böschungsverhältnifs an, nnd dieses wird hier etwa $\frac{1}{1}$ betragen. Dem entsprechend kann der Viertelkreis eingetheilt werden. Spielt das Perpendikel über $B$, so ist die Böschnng einfüfsig, weiter nach $A$ zn wird sie mehr als einfüfsig; spielt das Perpendikel über $A$, so ist die Ebene $EF$ horizontal. Bei der Verticale des Perpendikels von $C$ zwischen $B$ und $A$, wie z. B. in $J$, giebt $CA : AJ$ das Verhältnifs der Grundlinie snr Höhe.

**Böschungsverhältnifs** s. n. Böschnngsqnadrant.

**Böschungswinkel** ist der W., den die Böschungsebene mit der horizontalen Grundebene bildet, Fig. 228, ∠ $EFG$, Fig. 227, ∠ $\alpha$.

**Bogen.** Der Theil einer krnmmen Linie, z. B. der Kreislinie (s. Arcus No. 1 bis 7) vorausgesetzt, dafs dieser Theil einerlei Krümmungsrichtnng habe, nämlich dafs er nach einer Seite der Linie nnr concav, auf der anderen also nnr convex sei. Hat die Linie zweierlei Krümmungsrichtungen, so reicht ein Bogen nur bis zum Wendungspnnkt, von da ab fängt ein zweiter, dem ersten Bogen angrenzender Bogen an.

Jeder Bogen $ADB$ ist gröfser als seine Sehne $AB$. Denn zieht man die Sehnen $AD$, $BD$, so ist $AB < AD + BD$, da die drei geraden Linien Seiten eines Dreiecks

Fig. 229.




sind. Zieht man weiter nach den Zwischenpunkten $E$ nnd $F$ die geraden $AE$, $ED$, $DF$, $BF$, so ist $AD < AE + DE$ und

$BD < DF + BF$, folglich $AB < AE + ED + DF + FB$. Fährt man mit der Sehnenconstruction so fort, so kommt die Summe der Sehnen der Länge des Bogens immer näher, und kann demselben beliebig nahe gebracht werden; da nun $AB <$ als die Summe aller Sehnen ist, so ist auch $AB <$ als der Bogen.

Die von den beiden Endpunkten $A$, $B$ eines Bogens bis zu ihrem Durchschnittspunkt $C$ gezeichneten Tangenten sind gröfser als der Bogen; also $AC + BC >$ Bogen $AFB$. Denn zieht man an einem zwischen $A$ und $B$ liegenden Punkt z. B. $F$, eine Tangente $DE$ bis in die Richtungen von $AC$ und $BC$, so ist $DE < DC + EC$, daher $AD + DE + EB < AC + BC$. Fährt

Fig. 230.




man so fort, an Zwischenpunkten Tangenten zu ziehen, so kann man durch beliebige Vermehrung deren Anzahl mit der Summe deren Längen der Länge des Bogens beliebig nahe kommen, und je näher sie dem Bogen kommen, desto kleiner wird diese Summe gegen $AC + BC$, folglich ist $AC + BC >$ Bogen $AFB$.

**Bogenmaafs.** 1. Im Gegensatze zu Winkelmaafs in der Geometrie, Trigonometrie und Analysis (s. Arcus No. 4 bis 6). B. auf einer Kugeloberfläche ist der Abstand zweier auf derselben befindlichen Punkte in dem beiden Punkten zugehörigen gröfsten Kreise gemessen, und als Theil dieses Kreises ausgedrückt.

2. Im Gegensatz zu Zeitmaafs in der Astronomie bei Berechnung und Angabe der Umdrehungszeit von Weltkörpern. Z. B. die Zeit, in welcher die Sonne um die Erde sich herumzudrehen scheint, ist 24 Stunden, der Bogen, den sie scheinbar durchläuft, ist 360 Grad, mithin sind 24 Stunden Zeitmaafs = 360 Grad B., und wenn man mit 24 dividirt, 1 Stunde Zeitmaafs = 15° B., und wieder mit 60 dividirt, 1 Minute Zeitm. = 15 Minuten B. Man hat daher Zeitminuten und Bogenminuten. Paris liegt unter 20°, Berlin unter $31\frac{1}{4}$° östlicher Länge (von Ferro), Unterschied $11\frac{1}{4}$° Länge, die Sonne hat also um aus dem Meridian von Berlin nach dem Meridian von Paris zu kommen $11\frac{1}{4}$° durchlaufen; nun sind 15 Bogenminuten = 1 Zeitminute oder 1 Grad (Bogengrad sagt man wohl nicht, da es keine Zeitgrade giebt) = 4 Zeitminuten, folglich vollbringt die Sonne diesen Lauf in 15 Minuten, und ein Berliner mit richtiger Uhr findet in Paris, dafs seine Uhr gegen dort 15 Min. zu früh, oder vorgeht.

Bei der Umdrehung der Erde um die Sonne in $365\frac{1}{4}$ Tag, ist diese Zeit = 360° und 1 Tag von 24 Stunden = 0,9856° = 59′ 8″ 10‴ B.

Jeder Planet hat ein anderes B. gegen Zeitmaafs.

Folgende Tabelle giebt die Vergleichung zwischen dem Bogenmaafs und dem Zeitmaafs bei scheinbarer Umdrehung der Sonne um die Erde in 24 Stunden.

**Bogen-Secunden.**

| Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde. | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sec. | Sec. | Terzien. | Sec. | Sec. | Terzien. | Sec. | Sec. | Terzien. |
| 1 | — | 4 | 21 | 1 | 24 | 41 | 2 | 44 |
| 2 | — | 8 | 22 | 1 | 28 | 42 | 2 | 48 |
| 3 | — | 12 | 23 | 1 | 32 | 43 | 2 | 52 |
| 4 | — | 16 | 24 | 1 | 36 | 44 | 2 | 56 |
| 5 | — | 20 | 25 | 1 | 40 | 45 | 3 | — |
| 6 | — | 24 | 26 | 1 | 44 | 46 | 3 | 4 |
| 7 | — | 28 | 27 | 1 | 48 | 47 | 3 | 8 |
| 8 | — | 32 | 28 | 1 | 52 | 48 | 3 | 12 |
| 9 | — | 36 | 29 | 1 | 56 | 49 | 3 | 16 |
| 10 | — | 40 | 30 | 2 | — | 50 | 3 | 20 |
| 11 | — | 44 | 31 | 2 | 4 | 51 | 3 | 24 |
| 12 | — | 48 | 32 | 2 | 8 | 52 | 3 | 28 |
| 13 | — | 52 | 33 | 2 | 12 | 53 | 3 | 32 |
| 14 | — | 56 | 34 | 2 | 16 | 54 | 3 | 36 |
| 15 | 1 | — | 35 | 2 | 20 | 55 | 3 | 40 |
| 16 | 1 | 4 | 36 | 2 | 24 | 56 | 3 | 44 |
| 17 | 1 | 8 | 37 | 2 | 28 | 57 | 3 | 48 |
| 18 | 1 | 12 | 38 | 2 | 32 | 58 | 3 | 52 |
| 19 | 1 | 16 | 39 | 2 | 36 | 59 | 3 | 56 |
| 20 | 1 | 20 | 40 | 2 | 40 | 60 | 4 | — |

**Bogen-Minuten.**

| Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuten. | Min. | Sec. | Minuten. | Min. | Sec. | Minuten. | Min. | Sec. |
| 1 | — | 4 | 21 | 1 | 24 | 41 | 2 | 44 |
| 2 | — | 8 | 22 | 1 | 28 | 42 | 2 | 48 |
| 3 | — | 12 | 23 | 1 | 32 | 43 | 2 | 52 |
| 4 | — | 16 | 24 | 1 | 36 | 44 | 2 | 56 |
| 5 | — | 20 | 25 | 1 | 40 | 45 | 3 | — |
| 6 | — | 24 | 26 | 1 | 44 | 46 | 3 | 4 |
| 7 | — | 28 | 27 | 1 | 48 | 47 | 3 | 8 |
| 8 | — | 32 | 28 | 1 | 52 | 48 | 3 | 12 |
| 9 | — | 36 | 29 | 1 | 56 | 49 | 3 | 16 |
| 10 | — | 40 | 30 | 2 | — | 50 | 3 | 20 |
| 11 | — | 44 | 31 | 2 | 4 | 51 | 3 | 24 |
| 12 | — | 48 | 32 | 2 | 8 | 52 | 3 | 28 |
| 13 | — | 52 | 33 | 2 | 12 | 53 | 3 | 32 |
| 14 | — | 56 | 34 | 2 | 16 | 54 | 3 | 36 |
| 15 | 1 | — | 35 | 2 | 20 | 55 | 3 | 40 |
| 16 | 1 | 4 | 36 | 2 | 24 | 56 | 3 | 44 |
| 17 | 1 | 8 | 37 | 2 | 28 | 57 | 3 | 48 |
| 18 | 1 | 12 | 38 | 2 | 32 | 58 | 3 | 52 |
| 19 | 1 | 16 | 39 | 2 | 36 | 59 | 3 | 56 |
| 20 | 1 | 20 | 40 | 2 | 40 | 60 | 4 | — |

Bogen-Grade.

| Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade. | Std. | Minuten. | Grade. | Std. | Minuten. | Grade. | Std. | Minuten. |
| 1 | — | 4 | 55 | 3 | 40 | 109 | 7 | 16 |
| 2 | — | 8 | 56 | 3 | 44 | 110 | 7 | 20 |
| 3 | — | 12 | 57 | 3 | 48 | 111 | 7 | 24 |
| 4 | — | 16 | 58 | 3 | 52 | 112 | 7 | 28 |
| 5 | — | 20 | 59 | 3 | 56 | 113 | 7 | 32 |
| 6 | — | 24 | 60 | 4 | — | 114 | 7 | 36 |
| 7 | — | 28 | 61 | 4 | 4 | 115 | 7 | 40 |
| 8 | — | 32 | 62 | 4 | 8 | 116 | 7 | 44 |
| 9 | — | 36 | 63 | 4 | 12 | 117 | 7 | 48 |
| 10 | — | 40 | 64 | 4 | 16 | 118 | 7 | 52 |
| 11 | — | 44 | 65 | 4 | 20 | 119 | 7 | 56 |
| 12 | — | 48 | 66 | 4 | 24 | 120 | 8 | — |
| 13 | — | 52 | 67 | 4 | 28 | 121 | 8 | 4 |
| 14 | — | 56 | 68 | 4 | 32 | 122 | 8 | 8 |
| 15 | 1 | — | 69 | 4 | 36 | 123 | 8 | 12 |
| 16 | 1 | 4 | 70 | 4 | 40 | 124 | 8 | 16 |
| 17 | 1 | 8 | 71 | 4 | 44 | 125 | 8 | 20 |
| 18 | 1 | 12 | 72 | 4 | 48 | 126 | 8 | 24 |
| 19 | 1 | 16 | 73 | 4 | 52 | 127 | 8 | 28 |
| 20 | 1 | 20 | 74 | 4 | 56 | 128 | 8 | 32 |
| 21 | 1 | 24 | 75 | 5 | — | 129 | 8 | 36 |
| 22 | 1 | 28 | 76 | 5 | 4 | 130 | 8 | 40 |
| 23 | 1 | 32 | 77 | 5 | 8 | 131 | 8 | 44 |
| 24 | 1 | 36 | 78 | 5 | 12 | 132 | 8 | 48 |
| 25 | 1 | 40 | 79 | 5 | 16 | 133 | 8 | 52 |
| 26 | 1 | 44 | 80 | 5 | 20 | 134 | 8 | 56 |
| 27 | 1 | 48 | 81 | 5 | 24 | 135 | 9 | — |
| 28 | 1 | 52 | 82 | 5 | 28 | 136 | 9 | 4 |
| 29 | 1 | 56 | 83 | 5 | 32 | 137 | 9 | 8 |
| 30 | 2 | — | 84 | 5 | 36 | 138 | 9 | 12 |
| 31 | 2 | 4 | 85 | 5 | 40 | 139 | 9 | 16 |
| 32 | 2 | 8 | 86 | 5 | 44 | 140 | 9 | 20 |
| 33 | 2 | 12 | 87 | 5 | 48 | 141 | 9 | 24 |
| 34 | 2 | 16 | 88 | 5 | 52 | 142 | 9 | 28 |
| 35 | 2 | 20 | 89 | 5 | 56 | 143 | 9 | 32 |
| 36 | 2 | 24 | 90 | 6 | — | 144 | 9 | 36 |
| 37 | 2 | 28 | 91 | 6 | 4 | 145 | 9 | 40 |
| 38 | 2 | 32 | 92 | 6 | 8 | 146 | 9 | 44 |
| 39 | 2 | 36 | 93 | 6 | 12 | 147 | 9 | 48 |
| 40 | 2 | 40 | 94 | 6 | 16 | 148 | 9 | 52 |
| 41 | 2 | 44 | 95 | 6 | 20 | 149 | 9 | 56 |
| 42 | 2 | 48 | 96 | 6 | 24 | 150 | 10 | — |
| 43 | 2 | 52 | 97 | 6 | 28 | 151 | 10 | 4 |
| 44 | 2 | 56 | 98 | 6 | 32 | 152 | 10 | 8 |
| 45 | 3 | — | 99 | 6 | 36 | 153 | 10 | 12 |
| 46 | 3 | 4 | 100 | 6 | 40 | 154 | 10 | 16 |
| 47 | 3 | 8 | 101 | 6 | 44 | 155 | 10 | 20 |
| 48 | 3 | 12 | 102 | 6 | 48 | 156 | 10 | 24 |
| 49 | 3 | 16 | 103 | 6 | 52 | 157 | 10 | 28 |
| 50 | 3 | 20 | 104 | 6 | 56 | 158 | 10 | 32 |
| 51 | 3 | 24 | 105 | 7 | — | 159 | 10 | 36 |
| 52 | 3 | 28 | 106 | 7 | 4 | 160 | 10 | 40 |
| 53 | 3 | 32 | 107 | 7 | 8 | 161 | 10 | 44 |
| 54 | 3 | 36 | 108 | 7 | 12 | 162 | 10 | 48 |

| Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade. | Std. | Minuten. | Grade. | Std. | Minuten. | Grade. | Std. | Minuten. |
| 163 | 10 | 52 | 217 | 14 | 28 | 271 | 18 | 4 |
| 164 | 10 | 56 | 218 | 14 | 32 | 272 | 18 | 8 |
| 165 | 11 | — | 219 | 14 | 36 | 273 | 18 | 12 |
| 166 | 11 | 4 | 220 | 14 | 40 | 274 | 18 | 16 |
| 167 | 11 | 8 | 221 | 14 | 44 | 275 | 18 | 20 |
| 168 | 11 | 12 | 222 | 14 | 48 | 276 | 18 | 24 |
| 169 | 11 | 16 | 223 | 14 | 52 | 277 | 18 | 28 |
| 170 | 11 | 20 | 224 | 14 | 56 | 278 | 18 | 32 |
| 171 | 11 | 24 | 225 | 15 | — | 279 | 18 | 36 |
| 172 | 11 | 28 | 226 | 15 | 4 | 280 | 18 | 40 |
| 173 | 11 | 32 | 227 | 15 | 8 | 281 | 18 | 44 |
| 174 | 11 | 36 | 228 | 15 | 12 | 282 | 18 | 48 |
| 175 | 11 | 40 | 229 | 15 | 16 | 283 | 18 | 52 |
| 176 | 11 | 44 | 230 | 15 | 20 | 284 | 18 | 56 |
| 177 | 11 | 48 | 231 | 15 | 24 | 285 | 19 | — |
| 178 | 11 | 52 | 232 | 15 | 28 | 286 | 19 | 4 |
| 179 | 11 | 56 | 233 | 15 | 32 | 287 | 19 | 8 |
| 180 | 12 | — | 234 | 15 | 36 | 288 | 19 | 12 |
| 181 | 12 | 4 | 235 | 15 | 40 | 289 | 19 | 16 |
| 182 | 12 | 8 | 236 | 15 | 44 | 290 | 19 | 20 |
| 183 | 12 | 12 | 237 | 15 | 48 | 291 | 19 | 24 |
| 184 | 12 | 16 | 238 | 14 | 52 | 292 | 19 | 28 |
| 185 | 12 | 20 | 239 | 15 | 56 | 293 | 19 | 32 |
| 186 | 12 | 24 | 240 | 16 | — | 294 | 19 | 36 |
| 187 | 12 | 28 | 241 | 16 | 4 | 295 | 19 | 40 |
| 188 | 12 | 32 | 242 | 16 | 8 | 296 | 19 | 44 |
| 189 | 12 | 36 | 243 | 16 | 12 | 297 | 19 | 48 |
| 190 | 12 | 40 | 244 | 16 | 16 | 298 | 19 | 52 |
| 191 | 12 | 44 | 245 | 16 | 20 | 299 | 19 | 56 |
| 192 | 12 | 48 | 246 | 16 | 24 | 300 | 20 | — |
| 193 | 12 | 52 | 247 | 16 | 28 | 301 | 20 | 4 |
| 194 | 12 | 56 | 248 | 16 | 32 | 302 | 20 | 8 |
| 195 | 13 | — | 249 | 16 | 36 | 303 | 20 | 12 |
| 196 | 13 | 4 | 250 | 16 | 40 | 304 | 20 | 16 |
| 197 | 13 | 8 | 251 | 16 | 44 | 305 | 20 | 20 |
| 198 | 13 | 12 | 252 | 16 | 48 | 306 | 20 | 24 |
| 199 | 13 | 16 | 253 | 16 | 52 | 307 | 20 | 28 |
| 200 | 13 | 20 | 254 | 16 | 56 | 308 | 20 | 32 |
| 201 | 13 | 24 | 255 | 17 | — | 309 | 20 | 36 |
| 202 | 13 | 28 | 256 | 17 | 4 | 310 | 20 | 40 |
| 203 | 13 | 32 | 257 | 17 | 8 | 311 | 20 | 44 |
| 204 | 13 | 36 | 258 | 17 | 12 | 312 | 20 | 48 |
| 205 | 13 | 40 | 259 | 17 | 16 | 313 | 20 | 52 |
| 206 | 13 | 44 | 260 | 17 | 20 | 314 | 20 | 56 |
| 207 | 13 | 48 | 261 | 17 | 24 | 315 | 21 | — |
| 208 | 13 | 52 | 262 | 17 | 28 | 316 | 21 | 4 |
| 209 | 13 | 56 | 263 | 17 | 32 | 317 | 21 | 8 |
| 210 | 14 | — | 264 | 17 | 36 | 318 | 21 | 12 |
| 211 | 14 | 4 | 265 | 17 | 40 | 319 | 21 | 16 |
| 212 | 14 | 8 | 266 | 17 | 44 | 320 | 21 | 20 |
| 213 | 14 | 12 | 267 | 17 | 48 | 321 | 21 | 24 |
| 214 | 14 | 16 | 268 | 17 | 52 | 322 | 21 | 28 |
| 215 | 14 | 20 | 269 | 17 | 56 | 323 | 21 | 32 |
| 216 | 14 | 24 | 270 | 18 | — | 324 | 21 | 36 |

| Bogen d. Sonne um die Erde. | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde. | Tageszeit | | Bogen d. Sonne um die Erde | Tageszeit | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade | Std. | Min. | Grade | Std. | Min. | Grade | Std. | Min. |
| 325 | 21 | 40 | 337 | 22 | 28 | 349 | 23 | 16 |
| 326 | 21 | 44 | 338 | 22 | 32 | 350 | 23 | 20 |
| 327 | 21 | 48 | 339 | 22 | 36 | 351 | 23 | 24 |
| 328 | 21 | 52 | 340 | 22 | 40 | 352 | 23 | 28 |
| 329 | 21 | 56 | 341 | 22 | 44 | 353 | 23 | 32 |
| 330 | 22 | — | 342 | 22 | 48 | 354 | 23 | 36 |
| 331 | 22 | 4 | 343 | 22 | 52 | 355 | 23 | 40 |
| 332 | 22 | 8 | 344 | 22 | 56 | 356 | 23 | 44 |
| 333 | 22 | 12 | 345 | 23 | — | 357 | 23 | 48 |
| 334 | 22 | 16 | 346 | 23 | 4 | 358 | 23 | 52 |
| 335 | 22 | 20 | 347 | 23 | 8 | 359 | 23 | 56 |
| 336 | 22 | 24 | 348 | 23 | 12 | 360 | 24 | — |

Folgende Tabelle giebt die Vergleichnng zwischen dem Bogenmaafs und dem Zeitmaafs während des scheinbaren Umlaufs der Sonne in der Ekliptik vom Frühlingspunkt bis zum nächsten Wiedereintritt in denselben innerhalb 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 51 Secnnden, also während der Dauer des tropischen Jahres, und folglich die Vergleichung zwischen Bogenmaafs und mittlerer Sonnenzeit.

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit. | | Bogen | Mittlere Sonnenzeit | |
|---|---|---|---|---|---|
| Secnnden. | Minnten. | Secnnden. | Secnnden. | Minnten. | Secnnden. |
| 1 | — | 24,349484 | 27 | 10 | 57.436068 |
| 2 | — | 48,698968 | 28 | 11 | 21,785552 |
| 3 | 1 | 13,048452 | 29 | 11 | 46,135036 |
| 4 | 1 | 37,397936 | 30 | 12 | 10,484520 |
| 5 | 2 | 1,747420 | 31 | 12 | 34,834004 |
| 6 | 2 | 26,096904 | 32 | 12 | 59,183488 |
| 7 | 2 | 50,446388 | 33 | 13 | 23,532972 |
| 8 | 3 | 14,795872 | 34 | 13 | 47,882456 |
| 9 | 3 | 39,145356 | 35 | 14 | 12,231940 |
| 10 | 4 | 3,494840 | 36 | 14 | 36,581424 |
| 11 | 4 | 27,844324 | 37 | 15 | 0,930908 |
| 12 | 4 | 52,193808 | 38 | 15 | 25,280392 |
| 13 | 5 | 16,543292 | 39 | 15 | 49,629876 |
| 14 | 5 | 40,892776 | 40 | 16 | 13,979360 |
| 15 | 6 | 5,242260 | 41 | 16 | 38,328844 |
| 16 | 6 | 29,591744 | 42 | 17 | 2,678328 |
| 17 | 6 | 53,941228 | 43 | 17 | 27,027812 |
| 18 | 7 | 18,290712 | 44 | 17 | 51,377296 |
| 19 | 7 | 42,640196 | 45 | 18 | 15,726780 |
| 20 | 8 | 6,989680 | 46 | 18 | 40,076264 |
| 21 | 8 | 31,339164 | 47 | 19 | 4,425748 |
| 22 | 8 | 55,688648 | 48 | 19 | 28,775232 |
| 23 | 9 | 20,038132 | 49 | 19 | 53,124716 |
| 24 | 9 | 44,387616 | 50 | 20 | 17,474200 |
| 25 | 10 | 8,737100 | 51 | 20 | 41,823684 |
| 26 | 10 | 33,086584 | 52 | 21 | 6,173168 |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | Bogen | Mittlere Sonnenzeit | |
|---|---|---|---|---|---|
| Secunden | Minuten. | Secunden. | Secunden | Minuten. | Secunden. |
| 53 | 21 | 30,522652 | 57 | 23 | 7,920588 |
| 54 | 21 | 54,872136 | 58 | 23 | 32,270072 |
| 55 | 22 | 19,221620 | 59 | 23 | 56,619556 |
| 56 | 22 | 43,571104 | 60 | 24 | 20,969040 |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuten | Stunden | Minuten | Secunden | Minuten | Stunden | Minuten | Secunden |
| 1 | — | 24 | 20,969 | 31 | 12 | 34 | 50,039 |
| 2 | — | 48 | 41,938 | 32 | 12 | 59 | 11,008 |
| 3 | 1 | 13 | 2,907 | 33 | 13 | 23 | 31,977 |
| 4 | 1 | 37 | 23,876 | 34 | 13 | 47 | 52,946 |
| 5 | 2 | 1 | 44,845 | 35 | 14 | 12 | 13,915 |
| 6 | 2 | 26 | 5,814 | 36 | 14 | 36 | 34,884 |
| 7 | 2 | 50 | 26,783 | 37 | 15 | — | 55,853 |
| 8 | 3 | 14 | 47,752 | 38 | 15 | 25 | 16,822 |
| 9 | 3 | 39 | 8,721 | 39 | 15 | 49 | 37,791 |
| 10 | 4 | 3 | 29,690 | 40 | 16 | 13 | 58,760 |
| 11 | 4 | 27 | 50,659 | 41 | 16 | 38 | 19,729 |
| 12 | 4 | 52 | 11,628 | 42 | 17 | 2 | 40,698 |
| 13 | 5 | 16 | 32,597 | 43 | 17 | 27 | 1,667 |
| 14 | 5 | 40 | 53,566 | 44 | 17 | 51 | 22,636 |
| 15 | 6 | 5 | 14,535 | 45 | 18 | 15 | 43,605 |
| 16 | 6 | 29 | 35,504 | 46 | 18 | 40 | 4,574 |
| 17 | 6 | 53 | 56,473 | 47 | 19 | 4 | 25,543 |
| 18 | 7 | 18 | 17,442 | 48 | 19 | 28 | 46,512 |
| 19 | 7 | 42 | 38,411 | 49 | 19 | 53 | 7,481 |
| 20 | 8 | 6 | 59,380 | 50 | 20 | 17 | 28,450 |
| 21 | 8 | 31 | 20,349 | 51 | 20 | 41 | 49,419 |
| 22 | 8 | 55 | 41,318 | 52 | 21 | 6 | 10,388 |
| 23 | 9 | 20 | 2,287 | 53 | 21 | 30 | 31,357 |
| 24 | 9 | 44 | 23,256 | 54 | 21 | 54 | 52,326 |
| 25 | 10 | 8 | 44,225 | 55 | 22 | 19 | 13,295 |
| 26 | 10 | 33 | 5,194 | 56 | 22 | 43 | 34,264 |
| 27 | 10 | 57 | 26,163 | 57 | 23 | 7 | 55,233 |
| 28 | 11 | 21 | 47,132 | 58 | 23 | 32 | 16,202 |
| 29 | 11 | 46 | 8,101 | 59 | 23 | 56 | 37,171 |
| 30 | 12 | 10 | 29,070 | 60 | 24 | 20 | 58,142 |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | | Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden | Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 1 | 1 | — | 20 | 58,1416 ... | 9 | 9 | 3 | 8 | 43,2750 |
| 2 | 2 | — | 41 | 56,2833 ... | 10 | 10 | 3 | 29 | 41,4166 .. |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 54,4250 | 11 | 11 | 3 | 50 | 39,5583 ... |
| 4 | 4 | 1 | 23 | 52,5666 .. | 12 | 12 | 4 | 11 | 37,7000 |
| 5 | 5 | 1 | 44 | 50,7083 ... | 13 | 13 | 4 | 32 | 35,8416 ... |
| 6 | 6 | 2 | 5 | 48,8500 | 14 | 14 | 4 | 53 | 33,9833 ... |
| 7 | 7 | 2 | 26 | 46,9916 ... | 15 | 15 | 5 | 14 | 32,1250 |
| 8 | 8 | 2 | 47 | 45,1333 ... | 16 | 16 | 5 | 35 | 30,2666 .. |

| Bogen Grade | Mittlere Sonnenzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 17 | 5 | 56 | 28,4083 ... |
| 18 | 18 | 6 | 17 | 26,5500 |
| 19 | 19 | 6 | 38 | 24,6916 ... |
| 20 | 20 | 6 | 59 | 22,8333 ... |
| 21 | 21 | 7 | 20 | 20,9750 |
| 22 | 22 | 7 | 41 | 19,1166 ... |
| 23 | 23 | 8 | 2 | 17,2583 ... |
| 24 | 24 | 8 | 23 | 15,4000 |
| 25 | 25 | 8 | 44 | 13,5416 ... |
| 26 | 26 | 9 | 5 | 11,6833 ... |
| 27 | 27 | 9 | 26 | 9,8250 |
| 28 | 28 | 9 | 47 | 7,9666 ... |
| 29 | 29 | 10 | 8 | 6,1083 ... |
| 30 | 30 | 10 | 29 | 4,2500 |
| 31 | 31 | 10 | 50 | 2,3916 ... |
| 32 | 32 | 11 | 11 | 0,5333 ... |
| 33 | 33 | 11 | 31 | 58,6750 |
| 34 | 34 | 11 | 52 | 56,8166 ... |
| 35 | 35 | 12 | 13 | 54,9582 ... |
| 36 | 36 | 12 | 34 | 53,1000 |
| 37 | 37 | 12 | 55 | 51,2416 ... |
| 38 | 38 | 13 | 16 | 49,3833 ... |
| 39 | 39 | 13 | 37 | 47,5250 |
| 40 | 40 | 13 | 58 | 45,6666 ... |
| 41 | 41 | 14 | 19 | 43,8083 ... |
| 42 | 42 | 14 | 40 | 41,9500 |
| 43 | 43 | 15 | 1 | 40,0916 ... |
| 44 | 44 | 15 | 22 | 38,2333 ... |
| 45 | 45 | 15 | 43 | 36,3750 |
| 46 | 46 | 16 | 4 | 34,5166 ... |
| 47 | 47 | 16 | 25 | 32,6583 ... |
| 48 | 48 | 16 | 46 | 30,8000 |
| 49 | 49 | 17 | 7 | 28,9416 ... |
| 50 | 50 | 17 | 28 | 27,0833 ... |
| 51 | 51 | 17 | 49 | 25,2250 |
| 52 | 52 | 18 | 10 | 23,3666 ... |
| 53 | 55 | 18 | 31 | 21,5083 ... |
| 54 | 54 | 18 | 52 | 19,6500 |
| 55 | 55 | 19 | 13 | 17,7916 ... |
| 56 | 56 | 19 | 34 | 15,9333 ... |
| 57 | 57 | 19 | 55 | 14,0750 |
| 58 | 58 | 20 | 16 | 12,2166 ... |
| 59 | 59 | 20 | 37 | 10,3583 ... |
| 60 | 60 | 20 | 58 | 8,5000 |
| 61 | 61 | 21 | 19 | 6,6416 ... |
| 62 | 62 | 21 | 40 | 4,7833 ... |
| 63 | 63 | 22 | 1 | 2,9250 |
| 64 | 64 | 22 | 22 | 1,0666 ... |
| 65 | 65 | 22 | 42 | 59,2083 ... |
| 66 | 66 | 23 | 3 | 57,3500 |
| 67 | 67 | 23 | 24 | 55,4916 ... |
| 68 | 68 | 23 | 45 | 53,6333 ... |
| 69 | 70 | — | 6 | 51,7750 |
| 70 | 71 | — | 27 | 49,9166 ... |
| 71 | 72 | — | 48 | 48,0583 ... |

| Bogen Grade | Mittlere Sonnenzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|
| 72 | 73 | 1 | 9 | 46,2000 |
| 73 | 74 | 1 | 30 | 44,3416 ... |
| 74 | 75 | 1 | 51 | 42,4833 ... |
| 75 | 76 | 2 | 12 | 40,6250 |
| 76 | 77 | 2 | 33 | 38,7666 ... |
| 77 | 78 | 2 | 54 | 36,9083 ... |
| 78 | 79 | 3 | 15 | 35,0500 |
| 79 | 80 | 3 | 36 | 33,1916 ... |
| 80 | 81 | 3 | 57 | 31,3333 ... |
| 81 | 82 | 4 | 18 | 29,4750 |
| 82 | 83 | 4 | 39 | 27,6166 ... |
| 83 | 84 | 5 | — | 25,7583 ... |
| 84 | 85 | 5 | 21 | 23,9000 |
| 85 | 86 | 5 | 42 | 22,0416 ... |
| 86 | 87 | 6 | 3 | 20,1833 ... |
| 87 | 88 | 6 | 24 | 18,3250 |
| 88 | 89 | 6 | 45 | 16,4666 ... |
| 89 | 90 | 7 | 6 | 14,6083 ... |
| 90 | 91 | 7 | 27 | 12,7500 |
| 91 | 92 | 7 | 48 | 10,8916 ... |
| 92 | 93 | 8 | 9 | 9,0333 ... |
| 93 | 94 | 8 | 30 | 7,1750 |
| 94 | 95 | 8 | 51 | 5,3166 ... |
| 95 | 96 | 9 | 12 | 3,4583 ... |
| 96 | 97 | 9 | 33 | 1,6000 |
| 97 | 98 | 9 | 53 | 59,7416 ... |
| 98 | 99 | 10 | 14 | 57,8833 ... |
| 99 | 100 | 10 | 35 | 56,0250 |
| 100 | 101 | 10 | 56 | 54,1666 ... |
| 101 | 102 | 11 | 17 | 52,3083 ... |
| 102 | 103 | 11 | 38 | 50,4500 |
| 103 | 104 | 11 | 59 | 48,5916 ... |
| 104 | 105 | 12 | 20 | 46,7333 ... |
| 105 | 106 | 12 | 41 | 44,8750 |
| 106 | 107 | 13 | 2 | 43,0166 ... |
| 107 | 108 | 13 | 23 | 41,1583 ... |
| 108 | 109 | 13 | 44 | 39,3000 |
| 109 | 110 | 14 | 5 | 37,4416 ... |
| 110 | 111 | 14 | 26 | 35,5833 ... |
| 111 | 112 | 14 | 47 | 33,7250 |
| 112 | 113 | 15 | 8 | 31,8666 ... |
| 113 | 114 | 15 | 29 | 30,0083 ... |
| 114 | 115 | 15 | 50 | 28,1500 |
| 115 | 116 | 16 | 11 | 26,2916 ... |
| 116 | 117 | 16 | 32 | 24,4333 ... |
| 117 | 118 | 16 | 53 | 22,5750 |
| 118 | 119 | 17 | 14 | 20,7166 ... |
| 119 | 120 | 17 | 35 | 18,8583 ... |
| 120 | 121 | 17 | 56 | 17,0000 |
| 121 | 122 | 18 | 17 | 15,1416 ... |
| 122 | 123 | 18 | 38 | 13,2833 ... |
| 123 | 124 | 18 | 59 | 11,4250 |
| 124 | 125 | 19 | 20 | 9,5666 ... |
| 125 | 126 | 19 | 41 | 7,7083 ... |
| 126 | 127 | 20 | 2 | 5,8500 |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 127 | 128 | 20 | 23 | 3,9916... |
| 128 | 129 | 20 | 44 | 2,1333... |
| 129 | 130 | 21 | 5 | 0,2750 |
| 130 | 131 | 21 | 25 | 58,4166... |
| 131 | 132 | 21 | 46 | 56,5583... |
| 132 | 133 | 22 | 7 | 54,7000 |
| 133 | 184 | 22 | 28 | 52,8416... |
| 134 | 135 | 22 | 49 | 50,9833... |
| 135 | 136 | 23 | 10 | 49,1250 |
| 136 | 137 | 23 | 31 | 47,2666... |
| 137 | 138 | 23 | 52 | 45,4083... |
| 138 | 140 | — | 13 | 43,5500 |
| 139 | 141 | — | 34 | 41,6916... |
| 140 | 142 | — | 55 | 39,8333... |
| 141 | 143 | 1 | 16 | 37,9750 |
| 142 | 144 | 1 | 37 | 36,1166... |
| 143 | 145 | 1 | 58 | 34,2583... |
| 144 | 146 | 2 | 19 | 32,4000 |
| 145 | 147 | 2 | 40 | 30,5416... |
| 146 | 148 | 3 | 1 | 28,6833... |
| 147 | 149 | 3 | 22 | 26,8250 |
| 148 | 150 | 3 | 43 | 24,9666... |
| 149 | 151 | 4 | 4 | 23,1083... |
| 150 | 152 | 4 | 25 | 21,2500 |
| 151 | 153 | 4 | 46 | 19,3916... |
| 152 | 154 | 5 | 7 | 17,5333... |
| 153 | 155 | 5 | 28 | 15,6750 |
| 154 | 156 | 5 | 49 | 13,9166... |
| 155 | 157 | 6 | 10 | 11,9583... |
| 156 | 158 | 6 | 31 | 10,1000 |
| 157 | 159 | 6 | 52 | 8,2416... |
| 158 | 160 | 7 | 13 | 6,3833... |
| 159 | 161 | 7 | 34 | 4,5250 |
| 160 | 162 | 7 | 55 | 2,6666... |
| 161 | 163 | 8 | 16 | 0,8083... |
| 162 | 164 | 8 | 36 | 58,9500 |
| 163 | 165 | 8 | 57 | 57,0916... |
| 164 | 166 | 9 | 18 | 55,2333... |
| 165 | 167 | 9 | 39 | 53,3750 |
| 166 | 168 | 10 | — | 51,5166... |
| 167 | 169 | 10 | 21 | 49,6583... |
| 168 | 170 | 10 | 42 | 47,8000 |
| 169 | 171 | 11 | 3 | 45,9416... |
| 170 | 172 | 11 | 24 | 44,0833... |
| 171 | 173 | 11 | 45 | 42,2250 |
| 172 | 174 | 12 | 6 | 40,3666... |
| 173 | 175 | 12 | 27 | 38,5083... |
| 174 | 176 | 12 | 48 | 36,6500 |
| 175 | 177 | 13 | 9 | 34,7916... |
| 176 | 178 | 13 | 30 | 32,9333... |
| 177 | 179 | 13 | 51 | 31,0750 |
| 178 | 180 | 14 | 12 | 29,2166... |
| 179 | 181 | 14 | 33 | 27,3583... |
| 180 | 182 | 14 | 54 | 25,5000 |
| 181 | 183 | 15 | 15 | 23,6416... |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 182 | 184 | 15 | 36 | 21,7833... |
| 183 | 185 | 15 | 57 | 19,9250 |
| 184 | 186 | 16 | 18 | 18,0666... |
| 185 | 187 | 16 | 39 | 16,2083... |
| 186 | 188 | 17 | — | 14,3500 |
| 187 | 189 | 17 | 21 | 12,4916... |
| 188 | 190 | 17 | 42 | 10,6333... |
| 189 | 191 | 18 | 3 | 8,7750 |
| 199 | 192 | 18 | 24 | 6,9166... |
| 191 | 193 | 18 | 45 | 5,0583... |
| 192 | 194 | 19 | 6 | 3,2000 |
| 193 | 195 | 19 | 27 | 1,3416... |
| 194 | 196 | 19 | 47 | 59,4833... |
| 195 | 197 | 20 | 8 | 57,6250 |
| 196 | 198 | 20 | 29 | 55,7666... |
| 197 | 199 | 20 | 50 | 53,9083... |
| 198 | 200 | 21 | 11 | 52,0500 |
| 199 | 201 | 21 | 32 | 50,1916... |
| 200 | 202 | 21 | 53 | 48,3333... |
| 201 | 203 | 22 | 14 | 46,4750 |
| 202 | 204 | 22 | 35 | 44,6166... |
| 203 | 205 | 22 | 56 | 42,7583... |
| 204 | 206 | 23 | 17 | 40,9000 |
| 205 | 207 | 23 | 38 | 39,0416... |
| 206 | 208 | 23 | 59 | 37,1833... |
| 207 | 210 | — | 20 | 35,3250 |
| 208 | 211 | — | 41 | 33,4666... |
| 209 | 212 | 1 | 2 | 31,6083... |
| 210 | 213 | 1 | 23 | 29,7500 |
| 211 | 214 | 1 | 44 | 27,8916... |
| 212 | 215 | 2 | 5 | 26,0333... |
| 213 | 216 | 2 | 26 | 24,1750 |
| 214 | 217 | 2 | 47 | 22,3166... |
| 215 | 218 | 3 | 8 | 20,4583... |
| 216 | 219 | 3 | 29 | 18,6000 |
| 217 | 220 | 3 | 50 | 16,7416... |
| 218 | 221 | 4 | 11 | 14,8833... |
| 219 | 222 | 4 | 32 | 13,0250 |
| 220 | 223 | 4 | 53 | 11,1666... |
| 221 | 224 | 5 | 14 | 9,3083... |
| 222 | 225 | 5 | 35 | 7,4500 |
| 223 | 226 | 5 | 56 | 5,5916... |
| 224 | 227 | 6 | 17 | 3,7333... |
| 225 | 228 | 6 | 38 | 1,8750 |
| 226 | 229 | 6 | 59 | 0,0166... |
| 227 | 230 | 7 | 19 | 58,1583... |
| 228 | 231 | 7 | 40 | 56,3000 |
| 229 | 232 | 8 | 1 | 54,4416... |
| 230 | 233 | 8 | 22 | 52,5833... |
| 231 | 234 | 8 | 43 | 50,7250 |
| 232 | 235 | 9 | 4 | 48,8666... |
| 233 | 236 | 9 | 25 | 47,0083... |
| 234 | 237 | 9 | 46 | 45,1500 |
| 235 | 238 | 10 | 7 | 43,2916... |
| 236 | 239 | 10 | 28 | 41,4333... |

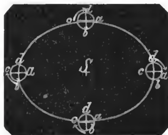
| Bogen Grade | Mittlere Sonnenzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|
| 237 | 240 | 10 | 49 | 39,5750 |
| 238 | 241 | 11 | 10 | 37,7166... |
| 239 | 242 | 11 | 31 | 35,8583... |
| 240 | 243 | 11 | 52 | 34,0000 |
| 241 | 244 | 12 | 13 | 32,1416... |
| 242 | 245 | 12 | 34 | 30,2833... |
| 243 | 246 | 12 | 55 | 28,4250 |
| 244 | 247 | 13 | 16 | 26,5666... |
| 245 | 248 | 13 | 37 | 24,7083... |
| 246 | 249 | 13 | 58 | 22,8500 |
| 247 | 250 | 14 | 19 | 20,9916... |
| 248 | 251 | 14 | 40 | 19,1333... |
| 249 | 252 | 15 | 1 | 17,2750 |
| 250 | 253 | 15 | 22 | 15,4166... |
| 251 | 254 | 15 | 43 | 13,5583... |
| 252 | 255 | 16 | 4 | 11,7000 |
| 253 | 256 | 16 | 25 | 9,8416... |
| 254 | 257 | 16 | 46 | 7,9833... |
| 255 | 258 | 17 | 7 | 6,1250 |
| 256 | 259 | 17 | 28 | 4,2666... |
| 257 | 260 | 17 | 49 | 2,4083... |
| 258 | 261 | 18 | 10 | 0,5500 |
| 259 | 262 | 18 | 30 | 58,6916... |
| 260 | 263 | 18 | 51 | 56,8333... |
| 261 | 264 | 19 | 12 | 54,9750 |
| 262 | 265 | 19 | 33 | 53,1166... |
| 263 | 266 | 19 | 54 | 51,2583... |
| 264 | 267 | 20 | 15 | 49,4000 |
| 265 | 268 | 20 | 36 | -47,5416... |
| 266 | 269 | 20 | 57 | 45,6833... |
| 267 | 270 | 21 | 18 | 43,8250 |
| 268 | 271 | 21 | 39 | 41,9666... |
| 269 | 272 | 22 | — | 40,1083... |
| 270 | 273 | 22 | 21 | 38,2500 |
| 271 | 274 | 22 | 42 | 36,3916... |
| 272 | 275 | 23 | 3 | 34,5333... |
| 273 | 276 | 23 | 24 | 32,6750 |
| 274 | 277 | 23 | 45 | 30,8166... |
| 275 | 279 | — | 6 | 28,9583... |
| 276 | 280 | — | 27 | 27,1000 |
| 277 | 281 | — | 48 | 25,2416... |
| 278 | 282 | 1 | 9 | 23,3833... |
| 279 | 283 | 1 | 30 | 21,5250 |
| 280 | 284 | 1 | 51 | 19,6666... |
| 281 | 285 | 2 | 12 | 17,8083... |
| 282 | 286 | 2 | 33 | 15,9500 |
| 283 | 287 | 2 | 54 | 14,0916... |
| 284 | 288 | 3 | 15 | 12,2333... |
| 285 | 289 | 3 | 36 | 10,3750 |
| 286 | 290 | 3 | 57 | 8,5166... |
| 287 | 291 | 4 | 18 | 6,6583... |
| 288 | 292 | 4 | 39 | 4,8000 |
| 289 | 293 | 5 | — | 2,9416... |
| 290 | 294 | 5 | 21 | 1,0833... |
| 291 | 295 | 5 | 41 | 59,2250 |
| 292 | 296 | 6 | 2 | 57,3666... |
| 293 | 297 | 6 | 23 | 55,5083... |
| 294 | 298 | 6 | 44 | 53,6500 |
| 295 | 299 | 7 | 5 | 51,7916... |
| 296 | 300 | 7 | 26 | 49,9333... |
| 297 | 301 | 7 | 47 | 48,0750 |
| 298 | 302 | 8 | 8 | 46,2166... |
| 299 | 303 | 8 | 29 | 44,3583... |
| 300 | 304 | 8 | 50 | 42,5000 |
| 301 | 305 | 9 | 11 | 40,6416... |
| 302 | 306 | 9 | 32 | 38,7833... |
| 303 | 307 | 9 | 53 | 36,9250 |
| 304 | 308 | 10 | 14 | 35,0666... |
| 305 | 309 | 10 | 35 | 33,2083... |
| 306 | 310 | 10 | 56 | 31,3500 |
| 307 | 311 | 11 | 17 | 29,4916... |
| 308 | 312 | 11 | 38 | 27,6333... |
| 309 | 313 | 11 | 59 | 25,7750 |
| 310 | 314 | 12 | 20 | 23,9166... |
| 311 | 315 | 12 | 41 | 22,0583... |
| 312 | 316 | 13 | 2 | 20,2000 |
| 313 | 317 | 13 | 23 | 18,3416... |
| 314 | 318 | 13 | 44 | 16,4833... |
| 315 | 319 | 14 | 5 | 14,6250 |
| 316 | 320 | 14 | 26 | 12,7666... |
| 317 | 321 | 14 | 47 | 10,9083... |
| 318 | 322 | 15 | 8 | 9,0500 |
| 319 | 323 | 15 | 29 | 7,1916... |
| 320 | 324 | 15 | 50 | 5,3333... |
| 321 | 325 | 16 | 11 | 3,4750 |
| 322 | 326 | 16 | 32 | 1,6166... |
| 323 | 327 | 16 | 52 | 59,7583... |
| 324 | 328 | 17 | 13 | 57,9000 |
| 355 | 329 | 17 | 34 | 56,0416... |
| 326 | 330 | 17 | 55 | 54,1833... |
| 327 | 331 | 18 | 16 | 52,3250 |
| 328 | 332 | 18 | 37 | 50,4666... |
| 329 | 333 | 18 | 58 | 48,6083... |
| 330 | 334 | 19 | 19 | 46,7500 |
| 331 | 335 | 19 | 40 | 44,8916... |
| 332 | 336 | 20 | 1 | 43,0333... |
| 333 | 357 | 20 | 22 | 41,1750 |
| 334 | 338 | 20 | 43 | 39,3166... |
| 335 | 339 | 21 | 4 | 37,4583... |
| 336 | 340 | 21 | 25 | 35,6000 |
| 337 | 341 | 21 | 46 | 33,7416... |
| 338 | 342 | 22 | 7 | 31,8833... |
| 339 | 343 | 22 | 28 | 30,0250 |
| 340 | 344 | 22 | 49 | 28,1666... |
| 341 | 345 | 23 | 10 | 26,3083... |
| 342 | 346 | 23 | 31 | 24,4500 |
| 343 | 347 | 23 | 52 | 22,5916... |
| 344 | 349 | — | 13 | 20,7333... |
| 345 | 350 | — | 34 | 18,8750 |
| 346 | 351 | — | 55 | 17,0166... |

| Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | | Bogen | Mittlere Sonnenzeit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden | Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 347 | 352 | 1 | 16 | 15,1583 ... | 354 | 359 | 3 | 43 | 2,1500 |
| 348 | 353 | 1 | 37 | 13,3000 | 355 | 360 | 4 | 4 | 0,2916 ... |
| 349 | 354 | 1 | 58 | 11,4416 ... | 356 | 361 | 4 | 24 | 58,4333 ... |
| 350 | 355 | 2 | 19 | 9,5833 ... | 357 | 362 | 4 | 45 | 56,5750 |
| 351 | 356 | 2 | 40 | 7,7250 | 358 | 363 | 5 | 6 | 54,7166 ... |
| 352 | 357 | 3 | 1 | 5,8666 ... | 359 | 364 | 5 | 27 | 52,8583 ... |
| 353 | 358 | 3 | 22 | 4,0083 ... | 360 | 365 | 5 | 48 | 51,0000 |

Nachstehende Tabelle zeigt das Verhältnifs zwischen Bogenzeit nnd Sternzeit. Hierbei ist Folgendes zu bemerken: Unter Sternzeit versteht man die Zeit, welche statt der Sonne ein Fixstern angiebt, ein Sterntag ist die Zeit zweier anf einander folgender Culminationen eines und desselben Fixsterns mit irgend einem Ort der Erdoberfläche, und das Sternjahr hat so viel Sterntage, als in demselben Culminationen von diesem Stern wirklich vollendet werden. In nachstehender Zeichnung sei *S* die Sonne, I bis IV seien 4 rechtwinklig mit einander befindliche Lagen der Erde in der Ekliptik. In I sei der Anfang des Jahres, der maafsgebende Fixstern stehe in der Richtnng I *S* III, so hat in I der Pnnkt *a* Sonnenmittag und Sternmittag. In II hat der Punkt *a* Sternmittag, der Pnnkt *b* Sonnenmittag, und *a* mnfs noch 6 Stnnden lang sich bewegen, ehe er den Sonnenmittag erhält. Hat also *a* in II $x$ Sterntage erlebt, so hat er erst $x - \frac{1}{4}$ Sonnentage erlebt.

In III hat *a* Sternmittag, *c* Sonnenmittag. *a* hat $2x$ Sterntage nnd $2x - \frac{1}{2}$ Sonnentage erlebt. In IV hat *a* bei $3x$ Sterntagen nur $3x - \frac{3}{4}$ Sonnentage gehabt, nnd wieder in I znrückgekehrt $4x$ Sterntage und $4x - 1$ Sonnentage.

Fig. 231.



In I sei der Frühlingspnnkt, so ist, wenn die Erde den Lauf durch II, III, IV wieder bis I vollendet hat, ein Jahr, nnd zwar ein tropisches Jahr v. 365,242256 Tagen = 365 Tage 5 Stnnden 48 Minuten 51 Secunden verflossen, indem zugleich der Frühlingspunkt in I um 50,1 Bogensecunden nach IV der Erde entgegenrückt. Vermöge dieses Umstandes ist das Sonnenjahr wie das Sternjahr um 50,1 Bogensecunden kürzer als das siderische Jahr von 365,25638 Sonnentagen, und da der Frühlingspunkt statt des oben gedachten Fixsterns Maafs giebt, so ist auch hier das Sternjahr um genau einen Tag länger als das tropische oder das mittlere Sonnenjahr, d. h. das Sternjahr hat 366 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden.

Vergleichung zwischen Bogenmaafs und Sternzeit.

| Bogen | Sternzeit | | Bogen | Sternzeit | |
|---|---|---|---|---|---|
| Secunden | Minuten | Secunden | Secnnden | Minuten | Secunden |
| 1 | — | 24,416150 | 5 | 2 | 2,080750 |
| 2 | — | 48,832300 | 6 | 2 | 26,496900 |
| 3 | 1 | 13,248450 | 7 | 2 | 50,913050 |
| 4 | 1 | 37,664600 | 8 | 3 | 15,329200 |

| Bogen | Sternzeit | |
|---|---|---|
| Secunden | Minuten | Secunden |
| 9 | 3 | 39,745350 |
| 10 | 4 | 4,161500 |
| 11 | 4 | 28,577650 |
| 12 | 4 | 52,993800 |
| 13 | 5 | 17,409950 |
| 14 | 5 | 41,826100 |
| 15 | 6 | 6,242250 |
| 16 | 6 | 30,658400 |
| 17 | 6 | 55,074550 |
| 18 | 7 | 19,490700 |
| 19 | 7 | 43,906850 |
| 20 | 8 | 8,323000 |
| 21 | 8 | 32,739150 |
| 22 | 8 | 57,155300 |
| 23 | 9 | 21,571450 |
| 24 | 9 | 45,987600 |
| 25 | 10 | 10,403750 |
| 26 | 10 | 34,819900 |
| 27 | 10 | 59,236050 |
| 28 | 11 | 23,652200 |
| 29 | 11 | 48,068350 |
| 30 | 12 | 12,484500 |
| 31 | 12 | 36,900650 |
| 32 | 13 | 1,316800 |
| 33 | 13 | 25,732950 |
| 34 | 13 | 50,149100 |

| Bogen | Sternzeit | |
|---|---|---|
| Secunden | Minuten | Secunden |
| 35 | 14 | 14,565250 |
| 36 | 14 | 38,981400 |
| 37 | 15 | 3,397550 |
| 38 | 15 | 27,813700 |
| 39 | 15 | 52,229850 |
| 40 | 16 | 16,846000 |
| 41 | 16 | 41,062150 |
| 42 | 17 | 5,478300 |
| 43 | 17 | 29,894450 |
| 44 | 17 | 54,310600 |
| 45 | 18 | 18,726750 |
| 46 | 18 | 43,142900 |
| 47 | 19 | 7,559050 |
| 48 | 19 | 31,975200 |
| 49 | 19 | 56,391350 |
| 50 | 20 | 20,807500 |
| 51 | 20 | 45,223650 |
| 52 | 21 | 9,639800 |
| 53 | 21 | 34,055950 |
| 54 | 21 | 58,472100 |
| 55 | 22 | 22,888250 |
| 56 | 22 | 47,304400 |
| 57 | 23 | 11,720550 |
| 58 | 23 | 36,136700 |
| 59 | 24 | 0,552850 |
| 60 | 24 | 24,969000 |

| Bogen | Sternzeit | | |
|---|---|---|---|
| Minuten | Stunden | Minuten | Secunden |
| 1 | — | 24 | 24,969 |
| 2 | — | 48 | 49,938 |
| 3 | 1 | 13 | 14,907 |
| 4 | 1 | 37 | 39,876 |
| 5 | 2 | 2 | 4,845 |
| 6 | 2 | 26 | 29,814 |
| 7 | 2 | 50 | 54,783 |
| 8 | 3 | 15 | 19,752 |
| 9 | 3 | 39 | 44,721 |
| 10 | 4 | 4 | 9,690 |
| 11 | 4 | 28 | 34,659 |
| 12 | 4 | 52 | 59,628 |
| 13 | 5 | 17 | 24,597 |
| 14 | 5 | 41 | 49,566 |
| 15 | 6 | 6 | 14,535 |
| 16 | 6 | 30 | 39,504 |
| 17 | 6 | 55 | 4,473 |
| 18 | 7 | 19 | 29,442 |
| 19 | 7 | 43 | 54,411 |
| 20 | 8 | 8 | 19,380 |
| 21 | 8 | 32 | 44,349 |
| 22 | 8 | 57 | 9,318 |
| 23 | 9 | 21 | 34,287 |

| Bogen | Sternzeit | | |
|---|---|---|---|
| Minuten | Stunden | Minuten | Secunden |
| 24 | 9 | 45 | 59,256 |
| 25 | 10 | 10 | 24,225 |
| 26 | 10 | 34 | 49,194 |
| 27 | 10 | 59 | 14,163 |
| 28 | 11 | 23 | 39,132 |
| 29 | 11 | 48 | 4,101 |
| 30 | 12 | 12 | 29,070 |
| 31 | 12 | 36 | 54,039 |
| 32 | 13 | 1 | 19,008 |
| 33 | 13 | 25 | 43,977 |
| 34 | 13 | 50 | 8,946 |
| 35 | 14 | 14 | 33,915 |
| 36 | 14 | 38 | 58,884 |
| 37 | 15 | 3 | 23,853 |
| 38 | 15 | 27 | 48,822 |
| 39 | 15 | 52 | 13,791 |
| 40 | 16 | 16 | 38,760 |
| 41 | 16 | 41 | 3,729 |
| 42 | 17 | 5 | 28,698 |
| 43 | 17 | 29 | 53,667 |
| 44 | 17 | 54 | 18,636 |
| 45 | 18 | 18 | 43,605 |
| 46 | 18 | 43 | 8,574 |

| Bogen | Sternzeit | | | Bogen | Sternzeit | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuten | Stunden | Minuten | Secunden | Minuten | Stunden | Minuten | Secunden |
| 47 | 19 | 5 | 33,543 | 54 | 21 | 58 | 28,326 |
| 48 | 19 | 31 | 58,512 | 55 | 22 | 22 | 53,295 |
| 49 | 19 | 56 | 23,481 | 56 | 22 | 47 | 18,264 |
| 50 | 20 | 20 | 48,450 | 57 | 23 | 11 | 43,233 |
| 51 | 20 | 45 | 13,419 | 58 | 23 | 36 | 8,202 |
| 52 | 21 | 9 | 38,388 | 59 | 24 | — | 33,171 |
| 53 | 21 | 34 | 3,357 | 60 | 24 | 24 | 58,140 |

| Bogen | Sternzeit | | | | Bogen | Sternzeit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden | Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 1 | 1 | — | 24 | 58,1416 ... | 41 | 41 | 17 | 3 | 43,8083 ... |
| 2 | 2 | — | 49 | 56,2833 ... | 42 | 42 | 17 | 28 | 41,9500 |
| 3 | 3 | 1 | 14 | 54,4250 | 43 | 43 | 17 | 53 | 40,0916 ... |
| 4 | 4 | 1 | 39 | 52,5666 ... | 44 | 44 | 18 | 18 | 38,2333 ... |
| 5 | 5 | 2 | 4 | 50,7083 ... | 45 | 45 | 18 | 43 | 36,3750 |
| 6 | 6 | 2 | 29 | 48,8500 | 46 | 46 | 19 | 8 | 34,5166 ... |
| 7 | 7 | 2 | 54 | 46,9916 ... | 47 | 47 | 19 | 33 | 32,6583 ... |
| 8 | 8 | 3 | 19 | 45,1333 ... | 48 | 48 | 19 | 58 | 30,8000 |
| 9 | 9 | 3 | 44 | 43,2750 | 49 | 49 | 20 | 23 | 28,9416 ... |
| 10 | 10 | 4 | 9 | 41,4166 ... | 50 | 50 | 20 | 48 | 27,0833 ... |
| 11 | 11 | 4 | 34 | 39,5583 ... | 51 | 51 | 21 | 13 | 25,2250 |
| 12 | 12 | 4 | 59 | 37,7000 | 52 | 52 | 21 | 38 | 23,3666 ... |
| 13 | 13 | 5 | 24 | 35,8416 ... | 53 | 53 | 22 | 3 | 21,5083 ... |
| 14 | 14 | 5 | 49 | 33,9833 ... | 54 | 54 | 22 | 28 | 19,6500 |
| 15 | 15 | 6 | 14 | 32,1250 | 55 | 55 | 22 | 53 | 17,7916 ... |
| 16 | 16 | 6 | 39 | 30,2666 ... | 56 | 56 | 23 | 18 | 15,9333 ... |
| 17 | 17 | 7 | 4 | 28,4083 ... | 57 | 57 | 23 | 43 | 14,0750 |
| 18 | 18 | 7 | 29 | 26,5500 | 58 | 59 | — | 8 | 12,2166 ... |
| 19 | 19 | 7 | 54 | 24,6916 ... | 59 | 60 | — | 33 | 10,3583 ... |
| 20 | 20 | 8 | 19 | 22,8333 ... | 60 | 61 | — | 58 | 8,5000 |
| 21 | 21 | 8 | 44 | 20,9750 | 61 | 62 | 1 | 23 | 6,6416 ... |
| 22 | 22 | 9 | 9 | 19,1166 ... | 62 | 63 | 1 | 48 | 4,7833 ... |
| 23 | 23 | 9 | 34 | 17,2583 ... | 63 | 64 | 2 | 13 | 2,9250 |
| 24 | 24 | 9 | 59 | 15,4000 | 64 | 65 | 2 | 38 | 1,0666 ... |
| 25 | 25 | 10 | 24 | 13,5416 ... | 65 | 66 | 3 | 2 | 59,2083 ... |
| 26 | 26 | 10 | 49 | 11,6833 ... | 66 | 67 | 3 | 27 | 57,3500 |
| 27 | 27 | 11 | 14 | 9,8250 | 67 | 68 | 3 | 52 | 55,4916 ... |
| 28 | 28 | 11 | 39 | 7,9666 ... | 68 | 69 | 4 | 17 | 53,6333 ... |
| 29 | 29 | 12 | 4 | 6,1083 ... | 69 | 70 | 4 | 42 | 51,7750 |
| 30 | 30 | 12 | 29 | 4,2500 | 70 | 71 | 5 | 7 | 49,9166 ... |
| 31 | 31 | 12 | 54 | 2,3916 ... | 71 | 72 | 5 | 32 | 48,0583 ... |
| 32 | 32 | 13 | 19 | 0,5333 ... | 72 | 73 | 5 | 57 | 46,2000 |
| 33 | 33 | 13 | 43 | 58,6750 | 73 | 74 | 6 | 22 | 44,3416 ... |
| 34 | 34 | 14 | 8 | 56,8166 ... | 74 | 75 | 6 | 47 | 42,4833 ... |
| 35 | 35 | 14 | 33 | 54,9583 ... | 75 | 76 | 7 | 12 | 40,6250 |
| 36 | 36 | 14 | 58 | 53,1000 | 76 | 77 | 7 | 37 | 38,7666 ... |
| 37 | 37 | 15 | 23 | 51,2416 ... | 77 | 78 | 8 | 2 | 36,9083 ... |
| 38 | 38 | 15 | 48 | 49,3833 ... | 78 | 79 | 8 | 27 | 35,0500 |
| 39 | 39 | 16 | 13 | 47,5250 | 79 | 80 | 8 | 52 | 33,1916 ... |
| 40 | 40 | 16 | 38 | 45,6666 ... | 80 | 81 | 9 | 17 | 31,3333 ... |

| Bogen Grade | Sternzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|
| 81 | 82 | 9 | 42 | 29,4750 |
| 82 | 83 | 10 | 7 | 27,6166 ... |
| 83 | 84 | 10 | 32 | 25,7583 ... |
| 84 | 85 | 10 | 57 | 23,9000 |
| 85 | 86 | 11 | 22 | 22,0416 ... |
| 86 | 87 | 11 | 47 | 20,1833 ... |
| 87 | 88 | 12 | 12 | 18,3250 |
| 88 | 89 | 12 | 37 | 16,4666 ... |
| 89 | 90 | 13 | 2 | 14,6083 ... |
| 90 | 91 | 13 | 27 | 12,7500 |
| 91 | 92 | 13 | 52 | 10,8916 ... |
| 92 | 93 | 14 | 17 | 9,0333 ... |
| 93 | 94 | 14 | 42 | 7,1750 |
| 94 | 95 | 15 | 7 | 5,3166 ... |
| 95 | 96 | 15 | 32 | 3,4583 ... |
| 96 | 97 | 15 | 57 | 1,6000 |
| 97 | 98 | 16 | 21 | 59,7416 ... |
| 98 | 99 | 16 | 46 | 57,8833 ... |
| 99 | 100 | 17 | 11 | 56,0250 |
| 100 | 101 | 17 | 36 | 54,1666 ... |
| 101 | 102 | 18 | 1 | 52,3083 ... |
| 102 | 103 | 18 | 26 | 50,4500 |
| 103 | 104 | 18 | 51 | 48,5916 ... |
| 104 | 105 | 19 | 16 | 46,7333 ... |
| 105 | 106 | 19 | 41 | 44,8750 |
| 106 | 107 | 20 | 6 | 43,0166 ... |
| 107 | 108 | 20 | 31 | 41,1583 ... |
| 108 | 109 | 20 | 56 | 39,3000 |
| 109 | 110 | 21 | 21 | 37,4416 ... |
| 110 | 111 | 21 | 46 | 35,5833 ... |
| 111 | 112 | 22 | 11 | 33,7250 |
| 112 | 113 | 22 | 36 | 31,8666 ... |
| 113 | 114 | 23 | 1 | 30,0083 ... |
| 114 | 115 | 23 | 26 | 28,1500 |
| 115 | 116 | 23 | 51 | 26,2916 ... |
| 116 | 118 | — | 16 | 24,4333 ... |
| 117 | 119 | — | 41 | 22,5750 |
| 118 | 120 | 1 | 6 | 20,7166 ... |
| 119 | 121 | 1 | 31 | 18,8583 ... |
| 120 | 122 | 1 | 56 | 17,0000 |
| 121 | 123 | 2 | 21 | 15,1416 ... |
| 122 | 124 | 2 | 46 | 13,2833 ... |
| 123 | 125 | 3 | 11 | 11,4250 |
| 124 | 126 | 3 | 36 | 9,5666 ... |
| 125 | 127 | 4 | 1 | 7,7083 ... |
| 126 | 128 | 4 | 26 | 5,8500 |
| 127 | 129 | 4 | 51 | 3,9916 ... |
| 128 | 130 | 5 | 16 | 2,1333 ... |
| 129 | 131 | 5 | 41 | 0,2750 |
| 130 | 132 | 6 | 5 | 58,4166 ... |
| 131 | 133 | 6 | 30 | 56,5583 ... |
| 132 | 134 | 6 | 55 | 54,7000 |
| 133 | 135 | 7 | 20 | 52,8416 ... |
| 134 | 136 | 7 | 45 | 50,9833 ... |
| 135 | 137 | 8 | 10 | 49,1250 |

| Bogen Grade | Sternzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|
| 136 | 138 | 8 | 35 | 47,2666 ... |
| 137 | 139 | 9 | — | 45,4083 ... |
| 138 | 140 | 9 | 25 | 43,5500 |
| 139 | 141 | 9 | 50 | 41,6916 ... |
| 140 | 142 | 10 | 15 | 39,8333 ... |
| 141 | 143 | 10 | 40 | 37,9750 |
| 142 | 144 | 11 | 5 | 36,1166 ... |
| 143 | 145 | 11 | 30 | 34,2583 ... |
| 144 | 146 | 11 | 55 | 32,4000 |
| 145 | 147 | 12 | 20 | 30,5416 ... |
| 146 | 148 | 12 | 45 | 28,6833 ... |
| 147 | 149 | 13 | 10 | 26,8250 |
| 148 | 150 | 13 | 35 | 24,9666 ... |
| 149 | 151 | 14 | — | 23,1083 ... |
| 150 | 152 | 14 | 25 | 21,2500 |
| 151 | 153 | 14 | 50 | 19,3916 ... |
| 152 | 154 | 15 | 15 | 17,5333 ... |
| 153 | 155 | 15 | 40 | 15,6750 |
| 154 | 156 | 16 | 5 | 13,8166 ... |
| 155 | 157 | 16 | 30 | 11,9583 ... |
| 156 | 158 | 16 | 55 | 10,1000 |
| 157 | 159 | 17 | 20 | 8,2416 ... |
| 158 | 160 | 17 | 45 | 6,3833 ... |
| 159 | 161 | 18 | 10 | 4,5250 |
| 160 | 162 | 18 | 35 | 2,6666 ... |
| 161 | 163 | 19 | — | 0,8083 ... |
| 162 | 164 | 19 | 24 | 58,9500 |
| 163 | 165 | 19 | 49 | 57,0916 ... |
| 164 | 166 | 20 | 14 | 55,2333 ... |
| 165 | 167 | 20 | 39 | 53,3750 |
| 166 | 168 | 21 | 4 | 51,5166 ... |
| 167 | 169 | 21 | 29 | 49,6583 ... |
| 168 | 170 | 21 | 54 | 47,8000 |
| 169 | 171 | 22 | 19 | 45,9416 ... |
| 170 | 172 | 22 | 44 | 44,0833 ... |
| 171 | 173 | 23 | 9 | 42,2250 |
| 172 | 174 | 23 | 34 | 40,3666 ... |
| 173 | 175 | 23 | 59 | 38,5083 ... |
| 174 | 177 | — | 24 | 36,6500 |
| 175 | 178 | — | 49 | 34,7916 ... |
| 176 | 179 | 1 | 14 | 32,9333 ... |
| 177 | 180 | 1 | 39 | 31,0750 |
| 178 | 181 | 2 | 4 | 29,2166 ... |
| 179 | 182 | 2 | 29 | 27,3583 ... |
| 180 | 183 | 2 | 54 | 25,5000 |
| 181 | 184 | 3 | 19 | 23,6416 ... |
| 182 | 185 | 3 | 44 | 21,7833 ... |
| 183 | 186 | 4 | 9 | 19,9250 |
| 184 | 187 | 4 | 34 | 18,0666 ... |
| 185 | 188 | 4 | 59 | 16,2083 ... |
| 186 | 189 | 5 | 24 | 14,3500 |
| 187 | 190 | 5 | 49 | 12,4916 ... |
| 188 | 191 | 6 | 14 | 10,6333 ... |
| 189 | 192 | 6 | 39 | 8,7750 |
| 190 | 193 | 7 | 4 | 6,9166 ... |

| Bogen | Sternzeit | | | | Bogen | Sternzeit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden | Grade | Tage | Std. | Min. | Secunden |
| 191 | 194 | 7 | 29 | 5,0583... | 246 | 250 | 6 | 22 | 22,8500 |
| 192 | 195 | 7 | 54 | 3,2000 | 247 | 251 | 6 | 47 | 20,9916... |
| 193 | 196 | 8 | 19 | 1,3416... | 248 | 252 | 7 | 12 | 19,1333... |
| 194 | 197 | 8 | 43 | 59,4833... | 249 | 253 | 7 | 37 | 17,2750 |
| 195 | 198 | 9 | 8 | 57,6250 | 250 | 254 | 8 | 2 | 15,4166... |
| 196 | 199 | 9 | 33 | 55,7666... | 251 | 255 | 8 | 27 | 13,5583... |
| 197 | 200 | 9 | 58 | 53,9083... | 252 | 256 | 8 | 52 | 11,7000 |
| 198 | 201 | 10 | 23 | 52,0500 | 253 | 257 | 9 | 17 | 9,8416... |
| 199 | 202 | 10 | 48 | 50,1916... | 254 | 258 | 9 | 42 | 7,9833... |
| 200 | 203 | 11 | 13 | 48,3333... | 255 | 259 | 10 | 7 | 6,1250 |
| 201 | 204 | 11 | 38 | 46,4750 | 256 | 260 | 10 | 32 | 4,2666... |
| 202 | 205 | 12 | 3 | 44,6166... | 257 | 261 | 10 | 57 | 2,4083... |
| 203 | 206 | 12 | 28 | 42,7583... | 258 | 262 | 11 | 21 | 0,5500 |
| 204 | 207 | 12 | 53 | 40,9000 | 259 | 263 | 11 | 46 | 58,6916... |
| 205 | 208 | 13 | 18 | 39,0416... | 260 | 264 | 12 | 11 | 56,8333... |
| 206 | 209 | 13 | 43 | 37,1833... | 261 | 265 | 12 | 36 | 54,9750 |
| 207 | 210 | 14 | 8 | 35,3250 | 262 | 266 | 13 | 1 | 53,1166... |
| 208 | 211 | 14 | 33 | 33,4666... | 263 | 267 | 13 | 26 | 51,2583... |
| 209 | 212 | 14 | 58 | 31,6083... | 264 | 268 | 13 | 51 | 49,4000 |
| 210 | 213 | 15 | 23 | 29,7500 | 265 | 269 | 14 | 16 | 47,5416... |
| 211 | 214 | 15 | 48 | 27,8916... | 266 | 270 | 14 | 41 | 45,6833... |
| 212 | 215 | 16 | 13 | 26,0333... | 267 | 271 | 15 | 6 | 43,8250 |
| 213 | 216 | 16 | 38 | 24,1750 | 268 | 272 | 15 | 31 | 41,9666... |
| 214 | 217 | 17 | 3 | 22,3166... | 269 | 273 | 15 | 56 | 40,1083... |
| 215 | 218 | 17 | 28 | 20,4583... | 270 | 274 | 16 | 21 | 38,2500 |
| 216 | 219 | 17 | 53 | 18,6000 | 271 | 275 | 16 | 46 | 36,3916... |
| 217 | 220 | 18 | 18 | 16,7416... | 272 | 276 | 17 | 11 | 34,5333... |
| 218 | 221 | 18 | 43 | 14,8833... | 273 | 277 | 17 | 36 | 32,6750 |
| 219 | 222 | 19 | 8 | 13,0250 | 274 | 278 | 18 | 1 | 30,8166... |
| 220 | 223 | 19 | 33 | 11,1666... | 275 | 279 | 18 | 26 | 28,9583... |
| 221 | 224 | 19 | 58 | 9,3083... | 276 | 280 | 18 | 51 | 27,1000 |
| 222 | 225 | 20 | 23 | 7,4500 | 277 | 281 | 19 | 16 | 25,2416... |
| 223 | 226 | 20 | 48 | 5,5916... | 278 | 282 | 19 | 41 | 23,3833... |
| 224 | 227 | 21 | 13 | 3,7333... | 279 | 283 | 20 | 6 | 21,5250 |
| 225 | 228 | 21 | 38 | 1,8750 | 280 | 284 | 20 | 31 | 19,6666... |
| 226 | 229 | 22 | 3 | 0,0166... | 281 | 285 | 20 | 56 | 17,8083... |
| 227 | 330 | 22 | 27 | 58,1583... | 282 | 286 | 21 | 21 | 15,9500 |
| 228 | 231 | 22 | 52 | 56,3000 | 283 | 287 | 21 | 46 | 14,0916... |
| 229 | 232 | 23 | 17 | 54,4416... | 284 | 288 | 22 | 11 | 12,2333... |
| 230 | 233 | 23 | 42 | 52,5833... | 285 | 289 | 22 | 36 | 10,3750 |
| 231 | 235 | — | 7 | 50,7250 | 286 | 290 | 23 | 1 | 8,5166... |
| 232 | 236 | — | 32 | 48,8666... | 287 | 291 | 23 | 26 | 6,6583... |
| 233 | 237 | — | 57 | 47,0083... | 288 | 292 | 23 | 51 | 4,8000 |
| 234 | 238 | 1 | 22 | 45,1500 | 289 | 294 | — | 16 | 2,9416... |
| 235 | 239 | 1 | 47 | 43,2916... | 290 | 295 | — | 41 | 1,0833... |
| 236 | 240 | 2 | 12 | 41,4333... | 291 | 296 | 1 | 5 | 59,2250 |
| 237 | 241 | 2 | 37 | 39,5750 | 292 | 297 | 1 | 30 | 57,3666... |
| 238 | 242 | 3 | 2 | 37,7166... | 293 | 298 | 1 | 55 | 55,5083... |
| 239 | 243 | 3 | 27 | 35,8583... | 294 | 299 | 2 | 20 | 53,6500 |
| 240 | 244 | 3 | 52 | 34,0000 | 295 | 300 | 2 | 45 | 51,7916... |
| 241 | 245 | 4 | 17 | 32,1416... | 296 | 301 | 3 | 10 | 49,9333... |
| 242 | 246 | 4 | 42 | 30,2833... | 297 | 302 | 3 | 35 | 48,0750 |
| 243 | 247 | 5 | 7 | 28,4250 | 298 | 303 | 4 | — | 46,2166... |
| 244 | 248 | 5 | 32 | 26,5666... | 299 | 304 | 4 | 25 | 44,3583... |
| 245 | 249 | 5 | 57 | 24,7083... | 300 | 305 | 4 | 50 | 42,5000 |

| Bogen Grade | Sternzeit Tage | Std. | Min. | Secunden | Bogen Grade | Sternzeit Tage | Std. | Min. | Secunden |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 301 | 306 | 5 | 15 | 40,6616... | 331 | 336 | 17 | 44 | 44,8916... |
| 302 | 307 | 5 | 40 | 38,7833... | 332 | 337 | 18 | 9 | 43,0333... |
| 303 | 308 | 6 | 5 | 36,9250 | 333 | 338 | 18 | 34 | 41,1750 |
| 304 | 309 | 6 | 30 | 35,0666... | 334 | 339 | 18 | 59 | 39,3166... |
| 305 | 310 | 6 | 55 | 33,2083... | 335 | 340 | 19 | 24 | 37,4583... |
| 306 | 311 | 7 | 20 | 31,3500 | 336 | 341 | 19 | 49 | 35,6000 |
| 307 | 312 | 7 | 45 | 29,4916... | 337 | 342 | 20 | 14 | 33,7416... |
| 308 | 313 | 8 | 10 | 27,6333... | 338 | 343 | 20 | 39 | 31,8833... |
| 309 | 314 | 8 | 35 | 25,7750 | 339 | 344 | 21 | 4 | 30,0250 |
| 310 | 315 | 9 | — | 23,9166... | 340 | 345 | 21 | 29 | 28,1666... |
| 311 | 316 | 9 | 25 | 22,0583... | 341 | 346 | 21 | 54 | 26,3083... |
| 312 | 317 | 9 | 50 | 20,2000 | 342 | 347 | 22 | 19 | 24,4500 |
| 313 | 318 | 10 | 15 | 18,3416... | 343 | 348 | 22 | 44 | 22,5916... |
| 314 | 319 | 10 | 40 | 16,4833... | 344 | 349 | 23 | 9 | 20,7333... |
| 315 | 320 | 11 | 5 | 14,6250 | 345 | 350 | 23 | 34 | 18,8750 |
| 316 | 321 | 11 | 30 | 12,7666... | 346 | 351 | 23 | 59 | 17,0166... |
| 317 | 322 | 11 | 55 | 10,9083... | 347 | 353 | — | 24 | 15,1583... |
| 318 | 323 | 12 | 20 | 9,0500 | 348 | 354 | — | 49 | 13,3000 |
| 319 | 324 | 12 | 45 | 7,1916... | 349 | 355 | 1 | 14 | 11,4416... |
| 320 | 325 | 13 | 10 | 5,3333... | 350 | 356 | 1 | 39 | 9,5833... |
| 321 | 326 | 13 | 35 | 3,4750 | 351 | 357 | 2 | 4 | 7,7250 |
| 322 | 327 | 14 | — | 1,6166... | 352 | 358 | 2 | 29 | 5,8666... |
| 323 | 328 | 14 | 24 | 59,7583... | 353 | 359 | 2 | 54 | 4,0083... |
| 324 | 329 | 14 | 49 | 57,9000 | 354 | 360 | 3 | 19 | 2,1500 |
| 325 | 330 | 15 | 14 | 56,0416... | 355 | 361 | 3 | 44 | 0,2916... |
| 326 | 331 | 15 | 39 | 54,1833... | 356 | 362 | 4 | 8 | 58,4333... |
| 327 | 332 | 16 | 4 | 52,3250 | 357 | 363 | 4 | 33 | 56,5750 |
| 328 | 333 | 16 | 29 | 50,4666... | 358 | 364 | 4 | 58 | 54,7166... |
| 329 | 334 | 16 | 54 | 48,6083... | 359 | 365 | 5 | 23 | 52,8583... |
| 330 | 335 | 17 | 19 | 46,7500 | 360 | 366 | 5 | 48 | 51,0000 |

**Bogengrad** im Gegensatz zu Winkelgrad in der Geometrie, Trigonometrie und Analysis, der 360ste Theil eines Kreisumfangs.

**Bogenminute** im Gegensatz zu Zeitminute, der 60ste Theil eines Grades, s. Bogenmaafs.

**Bogensecunde** im Gegensatz zu Zeitsecunde, der 60ste Theil einer Bogenminute, s. Bogenmaafs.

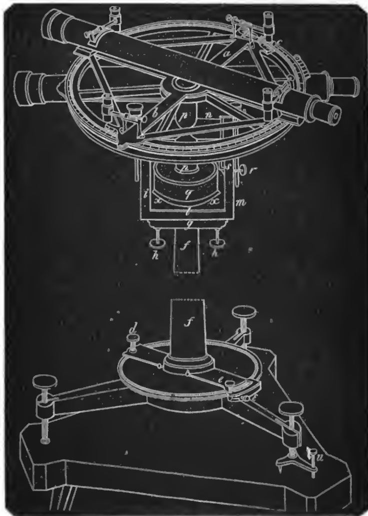
**Bogensehne, Sehne**, die zu einem Bogen gehörende Sehne.

**Borda'scher Kreis**, B. Repetitions-Kreis, B. Multiplications-Kreis, auch B. Vollkreis genannt, war vor Erfindung des Theodoliten das vorzüglichste Winkelmefs - Instrument Die Zeichnung ist aus dem Werke entnommen: Base du système metrique décimal ou mesure de l'arc du méridien, compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone par Méchain et Delambre. Paris 1807, Tome II, pag. 160. Fig. 232 zeigt den Kreis in perspectivischer Ansicht und in einer solchen geneigten Lage, welche man ihm für Azimuthalbeobachtungen giebt. Der Kreis ist aus einem ganzen Stück Messing gefertigt, damit er sich durch Temperaturänderung nicht ungleichmäfsig verzieht; der von Silber eingelegte Limbus ist entweder nach französischer Weise in 4000 gleiche Theile oder in 360 Grade und Unterabtheilungen getheilt, 6 Speichen verbinden die Fernröhre mit der Axe; das obere Fernrohr befindet sich über dem Centrum; ferner sieht man die 4 Alhidaden mit ihren Nonien und Mikroskopen zum Ablesen der Theilung. Bei 16 Zoll Durchmesser des Limbus kann man mit Hülfe der Nonien die beobachteten Winkel bis auf 5 Secunden genau ablesen; eine genauere Bestimmung derselben erhält man durch die später zu gedenkende Repitition oder Multiplication. Die oberen horizontalen Schrauben dienen dazu um die Mikroskope nach Belieben

zu verstellen, indem sie auf den Stegen fortgeschoben werden.

Die beiden Alhidaden *a*, *b* sind mit Schrauben versehen, mit welchen sie auf dem Kreis festgestellt werden können; ferner dient noch die Stellschraube *c* dazu, das Fernrohr nach und nach auf das zu beobachtende Object zu richten. In der Mitte der überall gleichen Stärkenfläche des Kreises theilt eine eingedrehte Fuge den Kreis in zwei Ränder, einen oberen und einen unteren Rand, so dafs deren Oberflächen einander genau ⫩ sind, und wodurch es möglich wird, das eine Fern-

Fig. 232.



rohr noch um die Axe herum bewegen zu können, wenn das andere Fernrohr arretirt ist. Beide Fernröhre sind in jeder Lage des Kreises ‡ dessen Grundebenen, sie sind astronomisch, man sieht also die Bilder verkehrt. Das Fadenkreuz ist in einer besondren kurzen Röhre ausgespannt, welcher man innerhalb des Fernrohrs geradlinige und kreisförmige Bewegungen geben kann, um das Kreuz genau in den Brennpunkt führen zu können.

Das untere Fernrohr, welches zum Theil durch den Kreis verdeckt wird, ist excentrisch, es hat weder Nonius noch Alhidaden, sonst aber dieselben Befestigungsstücke, Stellschrauben und dieselben Dimensionen wie das obere Fernrohr.

An dem Fufs sieht man die drei Schrauben, welche ihn tragen, die 3 Arme, in welchen die Schrauben stecken, den Azimuthalkreis, die Alhidade mit der Schraube *d*, mit welcher dieselbe auf irgend einem Punkt der Theilung befestigt werden kann. Die Spindel *e* endigt in ein Getriebe, durch welches die Alhidade auf einen beliebigen Punkt des Azimuthalkreises und das Fernrohr auf den zu beobachtenden Gegenstand geführt werden kann, wobei die Schraube *d* lose bleibt; die Schraube *r* hat den Zweck, das Getriebe gegen die Zähne mehr oder weniger anzudrücken, welche an dem Umfange des Azimuthalkreises sich befinden. Die Axe der runden Säule *f* ist zugleich die verticale Axe des Instruments, die Säule endigt in ein Querstück *g*, auf welches mittelst zweier Schrauben *h*, *h* der Rahmen *ilm* befestigt ist, der die Unterstützung der horizontalen Umdrehungsaxe *n* bildet. Diese Axe ist von einem senkrechten Cylinder *p* durchkreuzt, welcher die Axe des Kreises bildet; auf dieser Axe ist die Trommel *q* befestigt, welche mit Blei ausgefüllt, in geneigter und senkrechter Lage des Kreises diesem als Gegengewicht dient, woher sie auch zwischen den senkrechten Stäben des Rahmens sich ungehindert bewegen kann, und zugleich dazu dient, dem Kreise eine langsame und schnelle Bewegung um seine Axe zu geben.

An einem der Rahmenstäbe befindet sich eine Schraube *r*, welche einen kleinen Viertelskreis *s* ansieht, der an einem der Enden der Umdrehungsaxe sich befindet, und wodurch die Kreisscheibe in einer beliebigen geneigten Lage festgehalten werden kann. Man fügt bisweilen diesem Quadranten eine Stellschraube ohne Ende hinzu, welche von grofser Bequemlichkeit für Azimuthalbewegungen ist, und wenn man den Kreis in eine genaue verticale Lage bringen will. Diese Stellschraube fehlte bei Delambre's Instrument, und um mit dem Kreise die verticale Lage hervorzubringen, war nur eine sehr kurze Schraube vorhanden, gegen welche der kleine Quadrant sich anfing zu stemmen, sobald das Instrument sehr nahe die verticale Lage schon hatte. Hierauf war nur eine kleine Bewegung dieser Schraube erforderlich, um auf ziemlich bequeme Weise und vielleicht noch viel sicherer die wirkliche Verticalität herzustellen, als wenn das Instrument jene Schraube ohne Ende gehabt hätte. Eine Schraube ohne Ende, welche in das Gewinde *xx* der Trommel *q* greift, verursacht eine langsame Bew. Eine grofse Feder drückt diese Schraube ohne Ende gegen das Gewinde *x* und ein Schlüssel drängt die Feder zurück, und löst die Schraube, wenn die Bewegung frei werden soll.

Die runde Säule *f* steht mit einem cylindrischen Zapfen in dem dreiarmigen Fufs, und kann mit dem darauf befindlichen Instrument herumgedreht werden. Für die Verpackung und den Transport wird der Kreis mit dem Rahmen *ilm* abgeschraubt, desgleichen die Säule *f* mit dem Querstück *g* von dem Fufs abgenommen, und die 3 Stücke werden einzeln verpackt.

Die 3 kupfernen Schrauben des Fufses stehen in Hülsen, welche auf der oberen Fläche des hölzernen Fufses befestigt sind, und diese Hülsen dienen nicht blofs, dem Instrument die richtige Stellung zu bewahren, wenn von einer Beobachtung zu einer anderen geschritten werden soll, sondern ganz besonders eine vollkommene Stellung herzustellen, weil das Instrument ohne dieselben rutschen, und der Gegenstand von dem Fadenkreuz des Fernrohrs sich entfernen würde. Die zur Rechten befindliche Fufsschraube ist noch mit einer Vorrichtung versehen, mit welcher ein sanfteres Erheben und Senken derselben möglich wird, denn die Schraube würde wegen der Stärke ihrer Windung sich weder langsam noch regelmäfsig genug bewegen, das kleine Dreiek aber bildet einen Hebel gegen die grofse Schraube und die kleine Schraube *u*, welche ihn hebt und senkt, ist viel feiner, und verschafft der grofsen Schraube eine langsamere und sanftere Bewegung.

Wenn der B. K. zu Beobachtungen von Zenithdistanzen angewendet wird, wie das am häufigsten geschieht, so wird der Kreis in die senkrechte Lage gedreht; hierbei kommen die beiden Fernröhre zu beiden Seiten des Kreises n e b e n  e i n a n d e r. Das sonst untere Fernrohr ist mit einer wenigstens 8 Zoll langen Libelle versehen

und eine zweite kleinere befindet sich auf der Axe des Kreises in der Mitte zwischen *n* und *p*. Ueber der Libelle liegt ein hochkantiger metallener Steg, der von der Mitte aus auf beiden Seiten von 0 bis 30 eingetheilt ist, und diese Theilung befindet sich innerhalb des Raumes, den die beiden Enden der Luftblase begrenzen, und der je nach der geringeren oder höheren Temperatur der Luft der Verkürzung und der Verlängerung unterworfen ist. Es ist nothwendig, daſs die Endpunkte der Luftblase auf beiden Seiten gleichnamige Theilpunkte berühren, als die Theilpunkte 10 und 10, 11 und 11 u. s. w., erst dann steht das Instrument richtig im Niveau.

Das kleine Niveau auf der Kreisaxe dient dazu, der Säule des Instruments die senkrechte Lage zu geben, ohne das Bleiloth anwenden zu müssen, und um sehen zu können, ob das Instrument während der Beobachtungen die richtige Stellung behält, weshalb es mit dem Instrument durch Schraubenbewegung berichtigt werden kann. An den Enden der Umdrehungsaxe befinden sich zwei Tüllen zum Einsetzen von Lichten für Beobachtungen bei Nacht. Für die Anwendung des Bleiloths befinden sich an zweien senkrecht über einander möglichst weit von einander entfernten Punkten des Kreisringes Lehren. Die obere Lehre trägt den Faden des Bleiloths, welcher genau in eine Marke der unteren Lehre einspielen muſs. Bei Beobachtung von Zenithdistanzen irdischer Gegenstände und selbst der Sonne oder eines Sterns, um die Uhr zu reguliren, kann man sich recht gut mit jenem kleinen Niveau begnügen, um die Säule und den Kreis in die Verticalebene zu bringen, aber bei Breitenbeobachtungen ist es sicherer, sich des Bleiloths zu bedienen.

Das Erste, das geschehen muſs, wo man irgend eine Beobachtung beginnt, ist, zu sehen, ob die optische Axe der Fernröhre parallel der Ebene des Instruments ist: Man setze das Instrument auf seinen Fuſs der Art, daſs einer der Arme des Fuſses in der Richtung eines weit entfernten und im Horizont befindlichen Gegenstandes sei, und daſs die Umdrehungsaxe senkrecht auf dieser Richtung sich befinde; man richte die Ebene des Instruments auf diesen Gegenstand, indem dieselbe sehr genau horizontal gerichtet wird, richtet das Fernrohr auf den horizontalen Gegenstand, und zur Seite desselben stelle ein Prüfungsfernrohr, bringe den horizontalen Faden dieses letzten genau auf denselben Gegenstand, drehe dasselbe Prüfungsfernrohr um, und es hat die richtige Lage, wenn derselbe Horizontalfaden auf denselben Punkt trifft, widrigenfalls dieses Prüfungsfernrohr erst berichtigt werden muſs. Zeigt nun der horizontale Faden des zu prüfenden Fernrohrs am Instrument denselben Punkt, so ist die optische Axe desselben mit der genau horizontal gestellten Ebene des Kreises parallel, wo nicht, so muſs die Parallelität durch die Fadenkreuzschraube hergestellt werden. Zur Sicherheit soll man nach Delambre die Kreisscheibe von 15 zu 15 Grad verstellen, und jedesmal von Neuem prüfen.

Um die Zenithdistanzen der Sterne zu beobachten, muſs man einen der Arme des Fuſses möglichst nahe in die Richtung des Meridians bringen. Hierdurch geschieht, wenn man genöthigt ist, von der Fuſsschraube Gebrauch zu machen, um den Stern vollends unter den Faden zu bringen, die Bewegung, welche man dem Kreise giebt in der Kreisebene selbst, und verändert nicht die Verticalität.

In dieser Lage ist die Linie, welche die Axen der beiden anderen Schrauben verbindet, parallel dem ersten Vertical, und deren Bewegung geschieht in der günstigsten Richtung, um die Verticalität der Kreisebene herzustellen. Delambre bezeichnet die erste der drei Schrauben mit dem Namen der M e r i d i a n s c h r a u b e oder der m i t t l e r e n S c h r a u b e, die beiden anderen mit S e i t e n s c h r a u b e n. Nachdem das Instrument auf einer festen Unterlage festgestellt, und die Kreisebene durch Bleiloth, Libellen und Stellschrauben bei jeder Azimuthalbewegung in senkrechte Lage gebracht worden ist, wird der verticale Kreis durch die Umdrehung der Säule und darauf folgende feinere Stellungen in das Vertical des zu beobachtenden Gestirns gebracht, der an dem Objectiv des oberen Fernrohrs befindliche Nonius wird auf den Nullpunkt des Limbus gestellt, und der Kreis mit dem unverrückt bleibenden Fernrohr so gedreht, daſs das Fadenkreuz das Gestirn schneidet; das Gestirn steht also auf dem Nullpunkt des Limbus. Hierauf dreht man die Scheibe genau um 180° horizontal herum, und das Fernrohr weist nun auf einen Punkt des Himmels, der entgegengesetzt soweit vom Zenith entfernt ist, als das beobachtete Gestirn. Nun wird das Fernrohr o h n e d e n K r e i s in die Richtung des Gestirns gedreht, und die Alhidade des Fernrohrs giebt nun den doppelt so groſsen Winkel auf dem Limbus an, um welchen das Gestirn vom Zenith absteht. Es ist also mit diesen beiden Beobach-

tungen eine Doppelrepetition des gesuchten Winkels geschehen, und während dieser Arbeit durch einen Beobachter hat ein zweiter dafür gesorgt, dafs das Instrument die ursprüngliche verticale Stellung beibehalten hat, und die Libellen durch die angegebenen Stellschrauben erforderlichenfalls corrigirt.

Ist die Zenithdistanz 20°, so giebt der Limbus 40° an. Wird nun der Kreis wieder 180° horizontal umgedreht, so zeigt das Instrument mit 40° auf dem Limbus wieder auf den entgegengesetzt liegenden gleich weit vom Zenith entfernten Punkt, und wird jetzt wieder das Fernrohr bei festbleibendem Kreise mit dem Fadenkreuz auf dasselbe Gestirn gerichtet, so schneidet der bei 0 befindliche Nonius mit 80° ab, und man hat die 4fache Repetition erreicht.

Gesetzt, man könnte mit dem Nonius Winkel auf höchstens 5 Sec. Genauigkeit ablesen, und nach vollendeter 4facher Repetition zeigte der Nonius auf dem Limbus den $\angle$ 80° 10′ 5″, so wäre der Zenithabstand = 20° 2′ 31¼″, und hierin besteht der Vortheil der Repetition oder Multiplication, welche beliebig vervielfacht werden kann, dafs das Maximum der Genauigkeit noch zu dividiren ist.

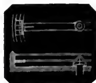
**Boussole**, ein Winkelmefs-Instrument mit Hülfe der frei spielenden Magnetnadel, indem diese immer einerlei Richtung behält, und wenn sie daraus durch äufsere Einwirkung entfernt wird, dieselbe wieder einnimmt (s. Abweichung der Magnetnadel). Die B. besteht aus einem in 360 Grade (auch halbe und Viertelgrade) eingetheilten Kreisring mit Diopteru zum

Fig. 233.



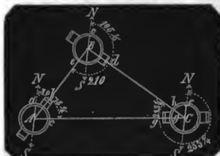
Visiren; in dessen Mittelpunkt ist senkrecht ein Stift eingesetzt, auf dessen Spitze ein magnetisirtes leichtes dünnes längliches Eisenplättchen von 5 bis 6 Zoll Länge frei spielen kann, und das also mit seinem Nordpol immer nach einer bestimmten Richtung zeigt, wenn die Vermessung damit nur auf wenige Meilen im Umkreise ausgedehnt wird. Der Ring mit der Nadel befindet sich in einem doseuförmigen Gehäuse, ist mit einer Glasplatte überdeckt; für den Transport sind die Diopteru um Charniere drehbar und flach umzulegen, und die Nadel ist durch eine einfache Schiebevorrichtung zu arretiren. Die Nadel spielt horizontal mit einem äufserst geringen Spielraum innerhalb des Ringes und zeigt mit einer Spitze, besser mit einem eingerissenen Strich die Theilung an.

Fig. 234.



Man stelle sich nur den einfachen Fall vor, dafs das $\triangle$ ***ABC*** vermessen werden soll, und dafs man eine dazu geeignete Seite ***AB*** mit der Kette wirklich vermessen hat, so stellt der Feldmesser die B. nach einander über die Punkte ***A***, ***B***, ***C*** und die Magnetnadel wird in allen drei Punkten die von den Pfeilen angegebene gleiche Richtung ***SN*** zeigen. Die Visirebene der Diopteru steht am zweckmäfsigsten und wohl jetzt bei allen B. senkrecht auf einem Durchmesser des eingetheilten Kreisringes, und dieser ist dort mit 0° und 180° bezeichnet, so dafs die Objectivdiopter auf 0° steht, wenn nicht beide Dioptern zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichtet sind. Gesetzt, der Feldmesser habe ein Instrument mit einfachen Dioptern, und er dreht nun den Ring so, dafs die Dioptern mit dem Nullpunkt nach ***AB*** gerichtet werden, so bleibt die Nadel in ***SN***, und giebt den Bogen ***ab*** (mit z. B. 30°) an; notirt er nun, und dreht Null auf ***AC***, so zeigt die Nadel mit ***N*** den Bogen ***ac*** (mit z. B. 75¼°), und der $\angle$ ***ABC*** ist = 45¼° gefunden. Hierauf das Instrument über ***B*** gesetzt, nach ***C*** visirt, zeigt ***SN*** in ***c*** den Bogen ***cd*** (z. B. 105½°); hierauf nach ***A*** visirt, zeigt ***SN*** in ***c*** den Bogen ***cde*** = 210°, nämlich 180° + $\angle$ ***aAB*** = 180° + 30°, und wenn die Nadel den $\angle$ nicht genau 210° angiebt, so ist wo ein Fehler gemacht. Zugleich ist $\angle$ ***ABC*** = 210° − 105½° = 104½° gefunden. Das Instrument über ***C*** gebracht, nach ***A*** visirt, zeigt ***N*** in ***f*** den

Fig. 235.



Bogen $fSg = 255\frac{1}{4}°$, nämlich $180° + \angle aAC = 180° + 75\frac{1}{4}°$, sonst ist ein Fehler wo gemacht, und nach *B* visirt, zeigt *N* in *f* den Bogen $fSgh = 285\frac{1}{2}°$, nämlich $180° + \angle cBC = 180° + 105\frac{1}{2}°$; zugleich ist $\angle BCA = 30\frac{1}{4}°$ gefunden.

Sind die Dioptern am Instrument zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichtet, so visirt man *B* nach *A* aus 0 über 180° und erhält eine Controlle für *BA* mit Bogen $ab = 30°$, eben so in *C* nach *B* und *A* aus 0 über 180°. Auch kann bei einfachen Dioptern der Kreisring mit 2 Zahlenreihen versehen werden, so dafs die Zahlen 0, 90°, 180°, 270° der einen Reihe mit den Zahlen 180°, 270°, 0°, 90° der andern Reihe zu denselben Theilstrichen gehören. Jeder Feldmesser hat sich mit seiner B. zu routiniren.

Fast alle Lehrbücher berühmter Autoritäten, von Tobias Mayer bis zu Schulz Montanus, sind auf die B. böse, in einigen Ländern ist sie den Feldmessern verboten (in Preufsen nicht), und es ist nicht zu längnen, dafs sie viele Unvollkommenheiten in sich vereinigt: In der Nähe der Nadel darf kein Eisen sein, also auch der eingetheilte Ring und das Gehäuse müssen aus eisenfreiem Messing bestehen, welches nicht leicht zu haben ist, die Nadel mufs möglichst empfindlich und leicht beweglich sein, und so ist sie denn auch in der Ruhe, wie man es nennt und wo man die Theilung abliest, nicht ganz ohne Bewegung. Aus diesem Grunde kann ein Nonius nicht viel helfen, und es bleiben die Winkel auf höchstens $\frac{1}{4}$ Grad Schärfe bestimmbar.

Erwägt man indefs, dafs aufser der so leichten und schnellen Controlle für richtige Messung auf dem Felde die B. ihrer Einfachheit wegen jeder angehende Feldmesser in einer halben Stunde handhaben und gebrauchen lernt, dafs bei weitläufigen Feldmarken mit vielen winkligen Grenzen jede einzelne Linie mit einem Buchstaben bezeichnet mit deren Abweichung von der Magnetnadel in das Manual einzutragen ist, dafs man die ganze Vermessung tabellarisch notiren kann, dafs man, wenn auf die Charte eine beliebige lange Linie als magnetischer Meridian einmal festgestellt worden, eine ganze Menge zusammengehöriger Linien mit Hülfe des Boussolentransporteurs als Rose auftragen, und diese einzeln mit grofsen Dreiecken verschieben, und auf die richtige Länge gegenseitig abschneiden kann, so mufs man einsehen, dafs die Vermessung mit der B. die bequemste und einfachste aller Vermessungsarten ist, und sie gewährt auch hinreichende Zuverlässigkeit, wenn der Feldmesser nicht verabsäumt, überall Diagonalenwinkel zu messen, und grofse Dreiecke mit deren gegenseitiger Controllirung festzulegen, auch mehrere lange Linien mit der Kette wirklich zu vermessen.

Polygone, deren Diagonalen nicht visirt werden können, wie bei innerhalb liegender Waldung, wo also nur die Seiten mit der Kette, und deren Abweichung von der Nadel gemessen werden können, geben beim Auftragen selten eine genau schliefsende Figur, und die B. ist unzuverlässig. Zur Auffindung und Festlegung von Chausseelinien zwischen festen Endpunkten ist die B. das brauchbarste und die Arbeit förderndste Instrument. Aenderungen in der Richtung des magnetischen Meridians kann der Feldmesser an seiner eigenen Boussole zu jeder Zeit wahrnehmen, und eine seit Jahren inhibirte Vermessung mit Berichtigung der Nordlinie auf der Charte ohne Fehler zu begeben, fortsetzen.

**Boyle'sches Gesetz** ist das in dem Art. Aerodynamische Gesetze No. 5 angegebene Mariottesche Gesetz. Robert Boyle, ein Engländer, soll das Gesetz schon vor Mariotte aufgefunden haben, und es wird daher auch von den Engländern nur Boyle'sches Gesetz genannt.

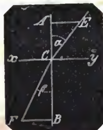
**Brechende Fläche** ist die Fläche, welche zwei durchsichtige Mittel verschiedener Dichtigkeit von einander trennt, in welcher also ein durchgehender Lichtstrahl gebrochen wird; wie z. B. Fig. 8 die Oberfläche des Wassers, in welcher der aus der Luft in *a* treffende Lichtstrahl *Sa* nach der Richtung *as* gebrochen wird;

Fig. 9 die Fläche *ca* des Glasprisma, in welcher der durch die Luft hindurchgegangene Strahl *sa* nach der Richtung *ab* gebrochen wird, und ebenso die Fläche *cb* des Prisma, in welcher der durch Glas gegangene Lichtstrahl *ab*, weil er nun durch Luft seinen Weg fortsetzt, in die Richtung *bs'* gebrochen wird. Besteht Fig. 28 das Prisma *ABC* aus Flintglas, das *ACD* aus Crownglas, so ist *AB* die b. F. zwischen Luft und Flintglas, *AC* zwischen Flint- und Crownglas und *CD* die zwischen Crownglas und Luft. Jedes Prisma hat 2 b. F.

**Brechende Kante eines Prisma**, die Kante, in welchen die beiden brechenden Flächen eines Prisma sich schneiden, s. B. in Fig. 27 *C, C'*.

**Brechende Kraft eines Mediums** ist ein Begriff, dessen Aufstellung und Feststellung auf einer Hypothese in Betreff der Brechbarkeit des Lichtstrahls beruht, und zwar auf derjenigen von vielen anderen Hypothesen, welche Newton darüber gegeben hat, nämlich die Brechung des Lichtstrahls, wenn dieser aus einem Mittel in ein anderes von anderer Dichtigkeit übergeht, rühre daher, dafs die Anziehungskraft des Mittels nach senkrechter Richtung in Verhältnifs der Dichtigkeit wachse und abnehme. Ist also *xy* die brechende Fläche zwischen zwei Mitteln, das Mittel unterhalb *xy* dichter als das oberhalb, so wird der Strahl in der senkrechten Richtung *AC*, je näher er *xy* kommt, immer mehr angezogen und seine Geschwindigkeit wird gröfser; desgleichen ein in schiefer Richtung *EC* einfallender Strahl. Da aber die Anziehung nur in normaler auf *xy* befindlicher Richtung geschieht, so kann nur die normale Seitengeschwindigkeit (*AC*) wachsen, und die parallel *xy* statthabende Seitengeschwindigkeit (*AE*) mufs dieselbe bleiben. Dies ist aber nicht anders möglich, als dafs *EC* nach dem Einfallsloth *CB* hin gebrochen wird, weil nur dann bei einer Linie $BF +$ und $= AE$, $CB > AC$ wird.

Fig. 236.




Kommt der Lichtstrahl aus einem dichteren Mittel in ein dünneres, so nimmt die Anziehung bei *xy* ab, die mit *xy* parallelen Seitengeschwindigkeiten werden davon nicht berührt, sondern wieder nur die verticalen, *BC* mufs über *xy* hinaus kleiner werden, und das ist bei schief einfallendem Strahl nicht anders möglich, als wenn dieser von dem Einfallsloth *CA* abwärts nach *CE* gebrochen wird, weil mit $AE = BF$, $CE < BC$ wird.

Bezeichnet man den gröfseren Winkel zwischen Strahl und Einfallsloth mit $\alpha$, den kleineren mit $\beta$, die kleinere Geschw. $EC = v$; die gröfsere $CF = v_1$ mit welcher der Strahl in dem dünneren und dem dichteren Mittel sich bewegt, so sind die anziehenden Kräfte $P$ und $P'$ nur von den lothrechten Seitengeschwindigkeiten $AC = v \cos \alpha$ und $CB = v_1 \cos \beta$ in Verhältnifs, und da anziehende Kräfte wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten sich verhalten

$$P : P^1 = v^2 \cos^2\alpha : v_1^2 \cos^2\beta \qquad (1)$$

und wenn

$$P = xv^2 \cos^2\alpha \qquad (2)$$

so ist

$$F^1 = xv_1^2 \cos^2\beta \qquad (3)$$

Die Wirkung der Anziehung $P^1$ des dichteren Mittels ist offenbar durch die der Anziehung $P$ unterstützt worden, und man begreift unter absoluter Anziehung des dichteren Mittels die Differenz $P^1 - P$. Um diese oder vielmehr deren sichtbare Wirkung zu finden, hat man noch $AE = FB$ d. h.

$$v \sin \alpha = v_1 \sin \beta$$

also $$xv^2 \sin^2\alpha = xv_1^2 \sin^2\beta \qquad (4)$$

Addirt man Gl. 4 und 3, so erhält man

$$xv^2 \sin^2\alpha + P^1 = xv_1^2$$

hierzu 2: $$xv^2 \cos^2\alpha \qquad = P$$

giebt addirt: $$xv^2 + P^1 = xv_1^2 + P$$

oder

$$P^1 - P = x(v_1^2 - v^2)$$

(aus 4)

$$= x\left(v_1^2 - v_1^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)$$

woraus

$$P^1 - P = xv_1^2\left[\left(1 - \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2\right]$$

Die sichtbare Wirkung der b. K. ist aber, wenn man die zwar constanten, aber unbekannten Gröfsen $x$, $v^2$ aus der Formel beseitigt:

$$\frac{P^1 - P}{xv_1^2} = 1 - \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2$$

Trifft der Strahl aus einem dichteren Mittel ein dünneres, so erhält man

$$\frac{P - P^1}{xv_1^2} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 - 1$$

oder vielmehr

$$\frac{P - P^1}{xv^2} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 - 1$$

nnd nnter der Gröfse $\frac{P^1 - P}{xv^2}$ oder $\frac{P - P^1}{xv^2}$ versteht man nnn die brechende Kraft eines Medinms.

In dem Art. Ablenknng des Lichtstrahls, No. 1, ist angeführt, dafs zwischen zwei sich gleichbleibenden Mitteln das Verhältnifs $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ für alle Einfallswinkel constant ist, nnd Brechnngsexponent genannt wird, woher für jedes Medinm die brechende Kraft $\pm\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 \mp 1$ dnrch Beobachtnng gefunden werden kann, wobei für die oberen Vorzeichen $\beta > \alpha$, für die nnteren $\beta < \alpha$ ist.

Newton findet diese absolute b. K. nnmittelbar, nnd es wird, nachdem Obiges vorausgeschickt ist, die Herleitung verständlich sein.

In dem Art. Ablenknng des Lichtstrahls, No. 1, ist gezeigt, was nnter Grenswinkel verstanden wird. Es sei $\beta_1$ der Grenzwinkel zwischen swei Mitteln, so ist beim einfallenden Strahl $\alpha_1 = 90^\circ$, nnd dieser hat mithin die lothrechte Seitengeschwindigkeit $= 0$; $\sin\alpha_1 = 1$, $P$ ist

Fig. 237.




$= 0$ nnd $P^1 - P = P^1$. Es ist nun die lothrechte Seitengeschwindigkeit

$$P^1 = xv^2 \cos^2\beta_1 = xv^2(1 - \sin^2\beta_1)$$

und

$$\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta_1}{1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

der obige Brechnngscoefficient; mithin die obige

$$\frac{P^1 - P}{xv^2} \text{ hier } \frac{P^1}{xv^2} = 1 - \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$$

Die absolnte b. K. ist mit der Dichtigkeit $d$ des Mittels proportional; bezeichnet man jene mit $K$, so nennt man die auf die Dichtigkeit 1 desselben Mittels rednoirte b. K. $= \frac{K}{d}$ dessen specifische brechende Kraft.

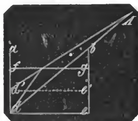
**Brechender Winkel** des Prisma ist der Winkel, den die beiden brechenden Flächen des Prisma als Neigungswinkel mit einander bilden.

**Brechung der Bewegung** ist gleichbedeutend mit Aenderung der Richtung eines sich bewegenden Körpers.

**Brechung der Lichtstrahlen.** Hierunter versteht man die Erscheinung, dafs der in gerader Linie fortgehende Lichtstrahl, wenn er anf einen Körper von gröfserer oder geringerer Dichtigkeit trifft, von hier ab seine Richtnng ändert, und durch diesen anderen Körper in einer anders gerichteten geraden Linie fortgeht, so dafs beide Richtungen desselben Strahls eine gebrochene Linie bilden. Man erkennt dies augenfällig an vielen Erscheinnngen, die uns sich darbieten. Anf einem Kahne befindlich, erscheint das Ruder $Sa$ (Fig. 8, pag. 6) nicht wie auf dem Lande innerhalb des Wassers in gerader Linie fortgehend, sondern nach $as$ geknickt.

Giefst man in ein leeres Gefäfs $abde$ Wasser, z. B. bis zu $fg$, so scheint es flacher zn sein, der Boden $de$ desselben scheint nun in $d'e'$ sich zn befinden; denn der von dem Pnnkt $d$ in's Auge $A$ treffende Lichtstrahl nimmt nicht geradlinig dnrch $b$, sondern in der gebrochenen Linie $dh\,A$ seinen Weg, nnd da man gewohnt ist, Gegenstände nur in gerader Richtnng zn sehen, so versetzt man den Pnnkt $d$

Fig. 238.




in die Verlängerung von $Ah$ nach $d'$ nnd der Gefäfsboden scheint nun in $d'e'$ sich zu befinden.

2. Die Gesetze der Lichtbrechung sind znm Theil schon in den Art.: Ablenkung des Lichtstrahls, achromatisch u. astronomische Refraction aufgeführt worden. Sie sind folgende:

A. Trifft ein Lichtstrahl senkrecht auf die ebene Fläche eines dichteren Körpers (eines durchsichtigen Mittels, eines Mittels) oder auf die krumme

Oberfläche in der Richtung des Krümmungshalbmessers, so wird er nicht gebrochen. Diese Richtung heifst zugleich das Einfallsloth, die Fläche, welche der Lichtstrahl trifft, die brechende Fläche und der Punkt, in welchem sie getroffen wird, der Einfallspunkt.

B. Trifft der Lichtstrahl die Fläche eines Mittels in jeder anderen Richtung, so wird er gebrochen. Der einfallende Strahl liegt mit dem gebrochenen Strahl und dem Einfallsloth in einer Ebene, der Brechungsebene; diese steht auf der brechenden Fläche, wenn sie eben ist, normal, und wenn sie krumm ist, wie z. B. bei Linsengläsern, normal auf der durch den Einfallspunkt zu denkenden berührenden Ebene.

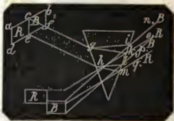
C. Bleiben die beiden verschieden dichten Mittel, durch welche der Lichtstrahl passirt, dieselben, so haben die Sinus der Einfallswinkel mit den Sinus der zugehörigen Brechungswinkel einerlei geometrisches Verhältnifs zu einander. Z. B. zwischen Luft und Wasser ist dies Verhältnifs = 1,336 (s. Ablenkung des Lichtstrahls, No. 1, brechende Kraft).

D. Mit der Brechung des Lichtstrahls geschieht zugleich dessen Zerspaltung in farbige Strahlen, welche alle durch dieselbe brechende Fläche zwischen zwei gleichbleibenden Mitteln unter verschiedenen Winkeln gebrochen werden, und es ist wahrscheinlich, dafs diese verschiedenen Brechungsvermögen auch der einzige Grund der Zerspaltung des Lichtstrahls sind, indem jeder der einzelnen Strahlen bei Berührung der brechenden Fläche seiner Natur folgt. Demnach würde der Lichtstrahl nicht chemisch, sondern mechanisch zerlegt, und man hätte sich den Lichtstrahl nicht als eine chemische, sondern als eine mechanische Vereinigung sehr vieler feinerer Farbenstrahlen zu denken; etwa wie der feine zu verwebende Seidenfaden aus 20 und mehreren von den Seidenraupen gesponnenen viel feineren Fäden dadurch künstlich zusammengesetzt wird, dafs von 20 und mehreren Cocons die Fäden alle durch ein sehr kleines Loch geleitet, straff durchgezogen werden, und durch ihre äufsere Klebrigkeit an einander haftend, zu einem einzigen homogen erscheinenden Faden sich vereinigen.

Es sei Fig. 26, pag. 23 *sa* ein auf *Ch* fallender Lichtstrahl, *ab'* und *af* seien die äufseren Grenzen dessen Zerspaltung, wovon *ab'* roth, *af* violett ist. Zwischen *b'af* entstehen noch eine unzählige Anzahl anders gefärbter Strahlen, deren Grundfarben, sofern die Kunst aus diesen die übrigen durch Mischung hervorbringen kann) Roth, Gelb und Blau sind, und zwar der Reihenfolge nach Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett, indem Roth und Gelb zu Orange, Gelb und Blau zu Grün sich mischen. Auffallend bleibt die äufserste Farbe Violett, da dies eine Mischung von Roth und Blau ist. Die in *h'C'* austretenden Farbestrahlen *b'd* und *ff'* und also auch die zwischenliegenden Strahlen sind einander ∦, daher ist die Zerspaltung des ursprünglichen Strahls nur sehr unvollkommen wahrzunehmen, weil beide brechende Flächen *Ch* und *h'C'* einander ∦ sind. Wird der Strahl dagegen durch ein Prisma geleitet, wie Fig. 25, so divergiren die gebrochenen Farbenstrahlen, und man kann sie in einiger Entfernung von dem Prisma durch eine vorgestellte weifse Tafel abgesondert auffangen. Dafs aber die Farbenstrahlen wirklich einzelne Theile des Lichtstrahls sind, ist daraus zu erkennen, dafs der Kegel *lgm*, der aus sämmtlichen Farbenstrahlen wieder zusammengesetzt wird, ein reines, weifses, ursprüngliches Licht darbietet.

Aber auch das reflectirte Licht bricht je nach seiner Farbe verschieden: Eine Tafel, links roth, rechts blau gefärbt, vor ein Prisma gestellt, bietet folgende Erscheinung:

Fig. 239.




Die Oberkante *ab* wirft Strahlen in der Ebene *cg*, die Unterkante *df* in der Ebene *eh* auf die brechende Fläche. *cb* und *ef* als blau werden stärker gebrochen nach Ebenen *gi*, *hl*, und treten in *in* und *lp* aus; *ac* und *de* als roth werden schwächer gebrochen nach Ebenen *gk*, *hm* und treten in *ko* und *mq* aus. Ein Auge in *nq* verfolgt nun die Strahlen geradlinig, und sieht die Tafel in 2 senkrechten Ab

sätzen, die linke rothe Hälfte höher, die rechte blaue Hälfte niedriger.

**Brechung der Lichtstrahlen, doppelte,** ist die Eigenschaft aller Krystalle, mit Ausnahme der des regulären Systems (s. Axensystem der Krystalle) jeden schief auffallenden Lichtstrahl in 2 Strahlen zu zerspalten. Die Krystalle des regulären Systems haben nur einfache Lichtbrechung, und der Brechungsexponent ist in allen Lagen des einfallenden Strahls gegen die brechende Fläche constant. Die Krystalle der folgenden beiden Systeme, des 2 und 1axigen und des 3 und 1axigen Systems haben doppelte Brechung der Art, daſs der eine Strahl einen immer constanten Brechungsexponenten hat, während bei dem anderen in jeder anderen Lage ein anderer, also ein veränderlicher Brechungsexponent stattfindet. Aus diesem Grunde wird der erste gebrochene Lichtstrahl gewöhnlicher, ordinärer, ordentlicher Strahl, der zweite gebrochene Lichtstrahl ungewöhnlicher, extraordinärer, auſserordentlicher Strahl genannt. Hat der einfallende Strahl eine solche Lage, daſs der ordentliche Strahl den möglich gröſsten Winkel mit der Hauptaxe des Krystalls bildet, so ist der Winkel zwischen diesem und dem auſserordentlichen Strahl ebenfalls am gröſsten; je näher der ordentliche Strahl an die Richtung ‡ der Hauptaxe fällt, desto kleiner wird der Winkel zwischen beiden gebrochenen Strahlen, und in der Richtung ‡ mit der Krystallhauptaxe treten beide gebrochene Strahlen in einem zusammen. Aus diesem Grunde nennt man jede der krystallographischen Hauptaxe parallele Linie die optische Axe, und da die zu den folgenden 3 Krystallisationssystemen gehörenden Krystalle 2 solcher Axen haben, die vorstehend genannten Krystalle einaxige Krystalle (d. h. optisch einaxige). Werden in diesen Krystallen die gewöhnlichen Strahlen stärker gebrochen als die angehörigen ungewöhnlichen, so heiſsen sie negative Krystalle, werden die gewöhnlichen Strahlen schwächer gebrochen, als die ungewöhnlichen, so heiſsen sie positive Krystalle.

Die folgenden 3 Axensysteme, das 1 und 1axige, das 2 und 1gliedrige und das 1 und 1gliedrige System haben ebenfalls doppelte Brechung, allein keinen gewöhnlichen Strahl unter den gebrochenen; beide Strahlen haben veränderliche Brechungsexponenten und 2 optische Axen, sie sind 2axig, d. h. in den Richtungen ‡ dieser beiden Axen giebt es statt 2 nur einen gebrochenen Strahl; die Winkel, welche die beiden Axen bilden, und die Winkel, welche der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth bilden muſs, damit der gebrochene Strahl in eine der Axen falle, sind in den verschiedenen Krystallen verschieden.

**Brechungscoefficient** (Dynamik) ist die Gröſse der Kraft, welche den Bruch, d. h. die Trennung der zusammenhangenden Theile eines festen Körpers bei gegebenen parallelepipedischen Dimensionen hervorbringt. Die Dimensionen werden in der Längen-Einheit, die Kraft wird in der Gewichts-Einheit ausgedrückt. Verschiedene Stoffe haben verschiedene Grade von Festigkeit, und somit verschiedene B., welche nur durch Versuche ermittelt werden können, und auch für die im praktischen Leben gebräuchlichsten Materialien ermittelt worden sind, und diese sind (allerdings nur näherungsweise) folgende:

1. Die Kraft gegen die absolute Festigkeit; d. h. für's Zerreiſsen des Körpers durch Zugkraft nach dessen Länge, wenn der Querschnitt 1 preuſs. □Zoll beträgt, in preuſs. Pfunden.

| | | |
|---|---|---|
| Ahorn . . . . . . . . . | 17000 | Pfd. |
| Akazie . . . . . . . . . | 14000 | „ |
| Apfelbaum . . . | 10000—15000 | „ |
| Basalt . . . . . . . . . | 1100 | „ |
| Birke . . . . . . . . . | 15000 | „ |
| Birnbaum . . . . | 10000—11000 | „ |
| Blei, gegossen . . | 900— 1900 | „ |
| Blei, gewalzt . . . . . | 2000 | „ |
| Bleidraht (Eytelwein) . . . . | 3900 | „ |
| Bronze, gegossen . . . . . | 34000 | „ |
| Buchsbaum (Eytelw.) . . . . | 15800 | „ |
| engl. (Barlow) . . . . . | 20000 | „ |
| Ebenholz . . . . . . . . | 13500 | „ |
| Eichenholz: | | |
| Sommereich. Kern (Eyt.) | 26000 | „ |
| zwisch. Kern u. Spl. (ders.) | 21940 | „ |
| Splint (ders.) . . . . . | 14760 | „ |
| Steineichen (ders.) . . . | 22100 | „ |
| engl. (Barlow) . | 10000—11000 | „ |
| Eisen, deutsches gegossenes (Eytelw.) . . . . . | 70400 | „ |
| engl. gegossenes (Rennie) | 95700 | „ |
| engl. (Mosely-Scheffler) | 19000 | „ |
| schlesisches geschmiedet (Eytelw.) . . . . . | 78000 | „ |
| schwedisches geschmied. (Eytelw.) . . . . . | 76600 | „ |
| gewöhnl. geschmiedet . | 71000 | „ |
| engl. dgl. (Tredgold) . . | 61700 | „ |
| „ dgl. (Mos.-Scheffler) | 66000 | „ |
| Eisendraht (Eytelw.) . . . . | 60400 | „ |
| engl. (Mos.-Scheffler) . | 90000 | „ |
| französischer . . . . . | 94000 | „ |
| engl. in Seilen . . . . | 44000 | „ |
| Elfenbein . . . . . . . . | 17000 | „ |

| | |
|---|---|
| Erle (Eytelw.) | 24700 Pfd. |
| englische | 15000 „ |
| Esche (Eytelw.) | 21500 „ |
| englische (Barlow) | 17500 „ |
| Fichte (Rothtanne), (Eytelw.) | 11000 „ |
| englische | 12000 „ |
| Fischbein | 8000 „ |
| Flieder | 12000 „ |
| Glas | 2800 — 3000 „ |
| Gold, gegossen | 21000 „ |
| Golddraht | 67000 „ |
| Granadillenholz | 17000 „ |
| Guajakholz | 12000 — 14400 „ |
| Hagedorn | 11000 „ |
| Hainbuche | 20000 „ |
| Hanfseile, neue | 8000 — 9000 „ |
| alte | 6000 „ |
| neue englische | 5600 „ |
| Hasel | 18000 „ |
| Holunder | 10500 „ |
| Horn von Ochsen | 9000 „ |
| Kalkstein von Portland | 900 „ |
| zum lithographiren | 450 „ |
| oolithischer | 200 „ |
| Kampferbaum | 16350 „ |
| Kastanienbaum | 12000 „ |
| Ketten, eiserne, mit ovalen Gliedern | 35000 „ |
| mit geraden verbolzten Gliedern | 47000 „ |
| Kiefernholz, stärkstes | 21400 „ |
| schwächstes | 12500 „ |
| englisches | 12000 „ |
| Kirschbaum, wild | 14000 „ |
| Klavierdraht | 125400 — 136400 „ |
| Knochen von Ochsen | 5000 „ |
| Kupfer, gegossen englisches | 20000 „ |
| geg. japanisches | 20900 „ |
| geg. spanisches | 21800 „ |
| geg. ungarisches | 32600 „ |
| geg. schwedisches | 38900 „ |
| geschmiedet englisches | 35000 „ |
| geschm. schwedisches | 38900 „ |
| geschm. französisches | 34000 „ |
| Kupferdraht | 40000 — 70000 „ |
| Lerche | 10000 „ |
| Linde | 13900 „ |
| englische | 18000 „ |
| Mahagoni (Barlow) | 8775 „ |
| spanisches | 14000 „ |
| Marmor, weifser, (Tredgold) | 1863 „ |
| Mauerziegel (ders.) | 283 „ |
| Messing | 18000 „ |
| Messingdraht | 48500 — 70000 „ |
| Mispelbaum | 12000 „ |
| Mörtel | 50 „ |
| hydraulischer | 100 „ |
| Nufsbaumholz | 14300 „ |
| Olivenbaum | 12600 „ |
| Pappel | 6000 „ |
| Pflaumenbaum | 12000 „ |
| Platane | 12000 „ |
| Rohr, spanisches | 6000 Pfd. |
| Rothbuche (Eytelw.) | 22360 „ |
| (Barlow) | 11467 „ |
| Sackerdanholz | 22780 „ |
| Sandelbaum | 10130 „ |
| Sandstein, stärkster | 750 „ |
| Schiefer, italienischer | 11800 „ |
| von Westmoreland | 8100 „ |
| schottischer | 9875 „ |
| Silber, feines gegossenes | 42000 „ |
| Silberdraht | 49700 „ |
| Spiefsglanz, gegossen | 1093 „ |
| Stahl zu Scheermessern | 158200 „ |
| zu gewöhnl Messern | 142400 „ |
| mittelmäfsig biegsamer | 130800 „ |
| bester biegsamer | 125500 „ |
| bester gehärtet | 118100 „ |
| englischer | 110000 — 133700 „ |
| Teak, indische Eiche (Barlow) | 15100 „ |
| Ulme | 14800 „ |
| Wallnufsbaum | 8000 „ |
| Weide | 15000 „ |
| Weifsbuche | 20400 „ |
| Weifsdorn | 18300 „ |
| Weifstanne | 12300 — 15400 „ |
| Wismuth, gegossen | 3200 „ |
| Zeder | 12000 „ |
| Zink, gewalzt | 7300 „ |
| gegossen | 8800 „ |
| Zinn, engl. gegossen | 4400 „ |
| Zuckerkistenholz | 18800 „ |

2. Die Kraft gegen die relative Festigkeit; d. h. für's Zerbrechen des Körpers, dessen Querschnitt 1" breit, 1" hoch ist, durch Einwirkung normal auf die Länge in 1" Entfernung von der Drehaxe, in preufs. Pfunden.

| | |
|---|---|
| Ahorn | 9800 Pfd. |
| Akazie | 11000 „ |
| Birke | 9500 „ |
| Eiche | 11000 „ |
| Eisen, Gufseisen | 40000 „ |
| Schmiedeeisen | 66000 „ |
| Erle | 10000 „ |
| Esche | 11000 „ |
| Kiefer | 10000 „ |
| Lerche, grün | 5200 „ |
| Lerche, trocken | 7100 „ |
| Mahagoni, spanisch | 7800 „ |
| Mauerziegel | 300 „ |
| Pappel | 6000 „ |
| Portlandkalk | 1000 „ |
| Rothbuche | 11000 „ |
| Rothtanne | 10000 „ |
| Sandstein | 700 „ |
| Ulme | 7600 „ |
| Wallnufsbaum | 8900 „ |
| Weide | 6700 „ |
| Weifstanne | 10500 „ |
| Zeder | 7000 „ |

3. Die Kraft gegen die rückwirkende

Festigkeit; d. h. für's Zerquetschen des Körpers, dessen Querschnitt 1 □Zoll beträgt, in preufs. Pfunden:

| | | |
|---|---|---|
| Apfelbaum | 6700 | Pfd. |
| Basalt | 29000 | „ |
| Birke, grün | 4700 | „ |
| trocken | 6600 | „ |
| Birnbaum | 7000 | „ |
| Buchsbaum, trocken | 10500 | „ |
| Eiche, grün | 4600 | „ |
| trocken | 9800 | „ |
| Eisen, Gufseisen | 140000 | „ |
| Schmiedeeisen | 90000 | „ |
| Erle | 7100 | „ |
| Esche | 9300 | „ |
| Flieder | 8700 | „ |
| Granit | 5000—10000 | „ |
| Hainbuche | 7500 | „ |
| Kalkstein | 300— 9000 | „ |
| Kiefer | 6300 | „ |
| Lerche, grün | 3300 | „ |
| trocken | 5700 | „ |
| Mahagoni | 8400 | „ |
| Marmor | 4000—11000 | „ |
| Mauerziegel | 500— 2000 | „ |
| Mörtel | 500 | „ |
| hydraulischer | 700 | „ |
| Pappel, grün | 3200 | „ |
| trocken | 5300 | „ |
| Pflaumbaum, grün | 3800 | „ |
| trocken | 9600 | „ |
| Portlandkalk | 6000 | „ |
| Rothbuche, grün | 8000 | „ |
| trocken | 9600 | „ |
| Rothtanne | 5500 | „ |
| Sandstein, stärkster | 10000 | „ |
| Ulme | 10400 | „ |
| Wallnufsbaum | 6800 | „ |
| Zeder | 5200 | „ |

**Brechungsebene**, s. u. Brechung der Lichtstrahlen.

**Brechungsexponent** für einen durchsichtigen Stoff ist, wie in dem Art.: Brechung der Lichtstrahlen schon angeführt, der constante Quotient des Sinus des Einfallswinkels, dividirt durch den Sinus des gebrochenen Winkels. Die Bestimmung desselben für jeden einzelnen Stoff, wenn der Lichtstrahl aus der Luft denselben trifft und durch ihn hindurchgeht, geschieht durch directe Messung mit einem Winkel-Instrument, indem man aus dem zu prüfenden Stoff ein Prisma formt, das Licht einer hellen Lampe mit einem dunklen Cylinder umgiebt, und in diesen ein feines Loch bohrt, durch welches nur ein Strahl auf einen bestimmten Punkt des Prisma fällt. Die Messung des Winkels des einfallenden und des gebrochenen Strahls wird um so genauer, je gröfser man den Einfallswinkel nimmt; der Quotient der Sinus wird berechnet. Für Flüssigkeiten bestimmt man den B. ebenfalls durch ein Prisma, nämlich durch ein hohles Glasprisma, mit ebenen, durchweg parallelen inneren und äufseren Seitenwänden, in welches die Flüssigkeit gegossen wird; desgleichen für Gase, bei welchen noch deren Dichtigkeit zu berücksichtigen ist.

Das Schleifen von genauen Prismen ist bei vielen Körpern fast unausführbar. Man hat aber Flüssigkeiten, in die solche feste Körper getaucht, fast ganz unsichtbar, also durchsichtig werden, indem die Flüssigkeit mit dem festen Körper einerlei Brechbarkeit hat, wie Crownglas in kanadischem Balsam, eine Mischung von Cassiaöl und Baumöl für Edelsteine und dergl. mehr. Hierdurch kann der B. des festen Körpers untersucht werden, ohne dafs er zum Prisma bearbeitet wird. Dieser Gegenstand gehört allein in die Physik.

Aber auch undurchsichtige Körper haben Lichtbrechungsvermögen, allerdings ist ein auf einen solchen fallender Strahl bei seinem Fortgang im Innern nicht wahrzunehmen und zu verfolgen, er wird durch den Körper verschluckt; man kann aber dennoch den B. eines dunklen Körpers indirect finden, wenn man durch einen stärker brechenden durchsichtigen Stoff einen Lichtstrahl unter einem bestimmten Winkel auf ihn fallen läfst.

Im Art.: Ablenkung des Lichtstrahls ist gezeigt, dafs wenn bei dem Exponent $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ also $n \sin\beta = \sin\alpha$, $n \sin\beta$ also auch $\sin\alpha > 1$ also $\alpha > 90°$ wird, unter dem $\angle\beta$ der Lichtstrahl nicht mehr in das weniger brechende Medium austritt, sondern zurücktritt und reflectirt. Bei dem Lichtstrahl aus Wasser in Luft findet dies statt, wenn $\beta$ gröfser als $48° 27\frac{1}{2}'$ wird, weil $n = 1{,}336$ ist, und weil $1{,}336 \times \sin 48° 27\frac{1}{2}' = 1$ ist, wonach $\alpha = 90°$, also der Lichtstrahl längs des Wassers fortgeht und bei $\beta > 48° 27\frac{1}{2}'$ ins Wasser zurückkehrt und zum Spiegelbild wird.

Es sei *CAB* ein Glasprisma, dessen B. also bekannt (Tafelglas $n = 1{,}527$), *ABDE* ein untergelegter ebener dunkler Körper *K*, dessen Lichtbrechungsvermögen ermittelt werden soll. Ist nun *FG* ein einfallender Lichtstrahl, so würde dieser nach *GH* so gebrochen werden, dafs $n \cdot \sin L'GH = \sin LGF$, und wenn der B. zwischen Glas und $K = \frac{1}{n'}$, also zwischen dem weniger brechenden *K* und dem stärker brechenden Glas $n'$, so würde

der in *H* auffallende Lichtstrahl *GH* nach *HI* so gebrochen werden, dafs $n' \sin GHL' = \sin IHL''$. Hiermit wird also der Lichtstrahl *GH* von dem dunklen Körper *K*

Fig. 240.

verschluckt, und man kann dessen weitere Richtung *HI* nicht verfolgen. Bringt man dagegen den Lichtpunkt *F* immer näher an *L*, so wird $\angle FGL$ kleiner, auch $\angle HGL'$ kleiner, folglich $\angle GHL'$ gröfser und $\angle IHL''$ gröfser und dieser endlich $= 90^\circ$. In diesem Augenblick wird der Lichtstrahl *HI* nach der Richtung *HA* sichtbar.

Nun hat man

$$n' \sin GHL' = 1$$

oder da

$$\angle GHL' = 180^\circ - L' - \angle HGL' = \alpha - \angle HGL'$$

daher

$$n' \sin(\alpha - HGL') = 1$$

Ferner ist

$$n \sin HGL' = \sin FGL$$

woraus, wenn $\angle FGL$ gemessen wird, $\angle HGL'$ und $n'$ bekannt sind.

So wie nun *n* zwischen Luft und Glas, so ist *n'* zwischen Glas und *K* constant, und es ist der B. zwischen Luft und *K* zu bestimmen. Bezeichnet man den $\angle$, der in *K* bei dem Einfallswinkel *HGL'* aus Glas der gebrochene ist, mit *x*, so hat man

$$n' \sin HGL' = \sin x$$

und

$$n \sin HGL' = \sin FGL$$

folglich ist $\frac{n}{n'} \sin x = \sin FGL$

und $\frac{n}{n'}$ der gesuchte B. zwischen Luft und *K*.

**Brechungsfläche**, s. v. w. brechende Fläche.

**Brechungsgesetze**, s. u. Brechung des Lichtstrahls.

**Brechungspunkt**, der Punkt einer brechenden Fläche, in welchem ein Lichtstrahl auffällt.

**Brechungssinus** ist der Sinus des Brechungswinkels; den Grund der Benennung s. u. Ablenkung des Lichtstrahls oder Brechungsexponent.

**Brechungsverhältnifs** ist das constante geometrische Verhältnifs zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels für 2 bestimmte Mittel von verschiedener Dichtigkeit. Z. B. zwischen Luft und Alkohol ist es = 1,374 d. h. wenn ein Lichtstrahl aus der Luft auf einen Alkoholspiegel unter irgend einem Einfallswinkel *e* trifft, und man bezeichnet den Brechungswinkel mit *b*, so ist $\frac{\sin e}{1{,}374} = \sin b$ oder $\frac{\sin e}{\sin b} = 1{,}374$

**Brechungsvermögen** wird auch die specifische brechende Kraft genannt, s. brechende Kraft am Schlufs.

**Brechungswinkel** ist der Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth bildet (s. Ablenkung des Lichtstrahls). In Fig. 8 ist $\angle sae$ der B., in Fig. 9 $\angle eab$ und auch $\angle E'bs'$ ist ein B., weil der durch Glas auf *cb* einfallende Strahl *ab*, da er von *b* aus in die Luft tritt, nach *bs'* gebrochen wird.

Kommt der Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres, so geschieht die Brechung nach dem Einfallsloth hin, der B. ist kleiner als der Einfallswinkel; aus einem dichteren Mittel in ein dünneres geschieht die Brechung des Strahls von dem Einfallsloth aus abwärts, der B. ist gröfser als der Einfallswinkel.

**Breite, astronomische**, s. zuerst astronomische Breite. Bedeutet *S* die Sonne, die Ellipse *DP'E* die Ekliptik, deren Ebene von allen Seiten bis in's Unendliche ausgedehnt zu denken ist, *E* den augenblicklichen Stand der Erde in derselben, *P* einen Planeten aufserhalb der Ekliptik, *PP'* den senkrechten Bogen auf derselben, der also verlängert das aus

Fig. 241.

*S* auf die Ekliptik errichtet zu denkende Loth *Sp* trifft, so ist *PP'* die astron. B. von *P*. Dieser Bogen von der Sonne *S* aus gesehen, hat den $\angle PSP$ zum Maafs, von der Erde *E* aus gesehen das Maafs $\angle PEP'$; beide Winkel sind von einander verschieden und $\angle PSP'$ ist die heliocentrische, $\angle PEP'$ die geocentrische Breite des Planeten *P*.

Die gerade Linie *PS*, die wahre Entfernung des Planeten von der Sonne heifst Radius vector des Planeten, die gerade Linie *PE* ist die wahre Entfernung des Planeten von der Erde. In dem in der Ekliptik liegenden geradlinigen $\triangle P'ES$ ist *P'* der auf die Ekliptik reducirte Ort des Planeten, der für astronomische Berechnungen statt des wirklichen augenblicklichen Orts *P* gesetzt wird, *P'S* und *P'E* heifsen die curtirten (verkürzten) Abstände des Planeten von der Sonne und von der Erde. Der $\angle P'SE$ (Scheitelpunkt die Sonne) heifst die Commutation, der $\angle P'ES$ (Scheitelpunkt die Erde) heifst die Elongation, und $\angle EP'S$ (Scheitelpunkt der reducirte Ort des Planeten) die jährliche Parallaxe des Planeten. Ist *P* ein Fixstern, der Bogen *PP'* also von *S* wie von *E* unendlich fern, so fallen die $\angle PEP'$ und *PSP'* in einen Winkel, und die heliocentrische mit der geocentrischen B. in eine B. zusammen.

**Breite, geocentrische,** s. u. Breite, astronomische.

**Breite, geographische.** Diese wird von dem Aequator aus bis zu den Polen gemessen, und zwar als Bogen eines Meridians, den Halbmesser der Erde als Einheit genommen oder in einem Winkel, dessen Scheitelpunkt der Erdmittelpunkt ist, dessen fester Schenkel als Erdhalbmesser in der Aequatorebene liegt, und dessen zweiter Schenkel an dem jedesmaligen Ort der Erdoberfläche führt. In dem Durchschnitt der Erde sei *c* der Mittelpunkt, *p* der Nordpol, *p'* der Südpol, *qq'* der Aequator, *o*, *o'* Oerter der Erdoberfläche, so ist der Halbkreis *poqp'* der Meridian von *o*, *pq'o'p'* der von *o'*. Bogen *oq* oder $\angle ocq$ die g. B. von *o*, Bogen *o'q'* oder $\angle o'cq'$ die g. B. von *o'*; die erstere g. B. ist nördlich, die zweite südlich. Ein Ort in der Aequatorebene *qq'* hat keine g. B. oder dieselbe = Null; der Pol *p* hat 90° nördliche, der Pol *p'* hat 90° südliche g. B.

Fig. 242.

2. Denkt man sich die Linien *p'p*, *q'q* und *co* bis *P*, *Q*, *Z* in das unendliche ferne Himmelsgewölbe verlängert, desgleichen eine in *o* die Erdoberfläche tangirende Ebene *HH'*, so ist *P* der nördliche Weltpol, *Q* ein äufserster Punkt des Weltaequators, Z das Zenith und *HH'* der Horizont des Ortes *o*.

Es erscheint dem Beobachter in *o* der Himmelspol *P* in einer Höhe, welche der Bogen *PH'*, und der Aequatorpunkt *Q* in der Meridian-Ebene in einer Höhe, welche der Bogen *QH* ausdrückt; daher nennt man Bogen *PH'* oder $\angle PBH'$ die Polhöhe des Orts *o* und Bogen *QH* oder $\angle QAH$ die Aequatorhöhe des Orts *o*.

Nun ist $\angle PBH' = \angle oBc = \angle ocq$ d. h. die Polhöhe eines Orts ist = dessen g. B. Ferner ist $\angle QAH = \angle oqc$ und $\angle oqc + ocq = 90°$, d. h. die Polhöhe oder die g. B. eines Orts ergänzt dessen Aequatorhöhe zu 90°. Der Abstand des Pols vom Zenith, Bogen *PZ* oder $\angle PcZ$, die Polardistanz oder die Zenithdistanz des Pols ist = der Aequatorhöhe des Orts und ergänzt die g. B. oder die Polhöhe desselben Orts zu 90°.

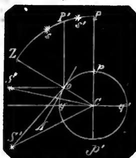
In dem Art.: astronomischer Horizont ist schon erklärt, dafs statt des (scheinbaren) Horizonts *HH'* durch den Ort *o* auch durch den Mittelpunkt *c* der Erde der wahre Horizont $\# HH'$ genommen werden kann, und dafs für unendlich ferne Gegenstände die Bogen *PH'* und *Ph'* ($\angle PBH' = \angle Pch'$) die Bogen *QH* und *Qh* ($\angle QAH = \angle Qch$) u. s. w. gleich grofs sind.

3. Für jeden Ort der Erde die g. B. direct durch Messung vom Aequator aus zu bestimmen ist unausführbar; die Uebereinstimmung jeder g. B. mit der zugehörigen Polhöhe giebt das Mittel zur astronomischen Bestimmung derselben, und es wäre dies ein Leichtes, wenn in dem Pol *P* ein Fixstern stände; denn wegen der unendlichen Ferne *P* von der Erde würde die Visirlinie von *o* nach $P \#$ mit *cP* in *oP'* fallen, und $\angle PoH'$ wäre die

g. B. von $o$, wobei zu bemerken, dafs direct nur die Zenithdistanz ($\angle PoZ$) von $P$ gemessen werden kann, so dafs durch $\angle PoH' = 90° - \angle P'oZ$ die g. B. von $o$ erhalten wird.

Allein der Nordpol wird durch keinen Stern bezeichnet; der dem Pol nächste Stern, der Polarstern im Schwanz des kleinen Bären steht gegenwärtig 1½ Grad vom Nordpol entfernt und beschreibt mithin alle 24 Stunden einen Kreis von 3° im Durchmesser, wobei er zweimal in einem jedesmaligen Zeitabstande von 12 Stunden durch den Meridian eines Ortes geht (zweimal culminirt). Bedeuten $s$, $s'$ die beiden Culminationspunkte des Polarsterns, so sind die Linien $oP'$, $os$, $os'$

Fig. 243.



wieder ≑ mit denjenigen, welche aus $p$ nach denselben Punkten $P$, $s$, $s'$ genommen werden, und diese Punkte $s$, $s'$ können zur Bestimmung der g. B. eines Orts $o$ benutzt werden; denn es ist

$$\tfrac{1}{2}(\angle soZ + \angle s'oZ) = \angle P'oZ$$

und die g. B. von $o$ ist $= 90° - \angle P'oZ$.

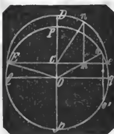
Von allen Circumpolarsternen eines Orts ist der Polarstern am geeignetsten dazu, weil er der höchste ist, und daher die von jedem beobachteten Winkel abzuziehende astronomische Refraction (s. d.) am geringsten ausfällt.

4. Für Orte, die vom Pol entfernt liegen, mufs man sich zur Bestimmung der g. B. anderer Fixsterne bedienen, die keine Circumpolarsterne sind, und deren gröfste Höhe im Augenblick der Culmination gemessen wird. Die Arbeit wird dadurch erleichtert, dafs man aus den Sternverzeichnissen die Culminationszeiten jedes ausgezeichneten Fixsterns für Orte, wo Sternwarten sind, genau kennt, und dafs daraus auch die für andere Orte ziemlich genau zu berechnen sind, so dafs man zu rechter Zeit an die Arbeit gehen kann. Ferner kennt man aus den Sternverzeichnissen die Abweichung jedes Fixsterns. Es sei $S$ ein bekannter Fixstern in dem Augenblick, wo er für $o$ culminirt, so mifst man $\angle ZoS = \angle ZcS$ die Zenithdistanz von $S$ für $o$ seine nördliche Abweichung ($\angle Scq$) ist in den Verzeichnissen gegeben, mithin ist die g. B. von $o = \angle ZoS + \angle Scq$. Ist $S'$ der beobachtete Fixstern, seine südliche Abweichung $\angle qcS'$, seine Zenithdistanz $= \angle ZoS' = \angle ZcS'$, so ist die g. B. von $o = \angle ZoS' - \angle qcS'$. In beiden Fällen mufs die astronomische Refraction (s. d.) mit Minus in Rechnung gebracht werden.

5. Ist $S$, $S'$ die Sonne, $S$ ihr Stand im Sommer, $S'$ im Winter, so kennt man für jeden einzelnen Tag deren nördliche oder südliche Abweichung. Man visirt nach dem oberen und nach dem unteren Rande, der Unterschied zwischen beiden oder der scheinbare Sonnendurchmesser beträgt zu Mittage 31′ 58″, das Mittel zwischen beiden giebt die Höhe oder den Zenithabstand deren Mittelpunkt, je nachdem man $\angle AoS$ oder $\angle ZoS$ gemessen hat; je nach der Höhe der Sonne über dem Horizont mufs die Refraction subtrahirt werden. Hier aber ist $\angle ZoS$ nicht $= \angle ZcS$, d. h. $\angle oSo$ ist nicht = Null, weil die Sonne $S$ nicht ∞ fern, sondern etwa 21 Millionen Meilen also in einem mefsbaren Abstande von der Erde entfernt und $\angle oSc$, die Höhenparallaxe der Sonne beträgt 8,6″, welche von $\angle ZoS$ abgezogen werden müssen, um $\angle ZcS$ zu erhalten; hierzu die bekannte nördliche Abweichung $Scq$ addirt giebt die g. B. von $o$. Wird ein Mittagsstand $S'$ der Sonne im Winter gewählt, so ist $\angle ZoS' - [\angle oS'c = 8{,}6″] -$ Abweichung $qcS' =$ g. B. von $o$.

6. Man findet die g. B. eines Orts durch Zeichnung, wenn man die Dauer des längsten Tages daselbst weifs. Man beschreibe um den Punkt $o$, welcher die Erde und den Ort darauf vorstellen soll, einen beliebigen Kreis als Meridian an der Himmelskugel, theile diesen in Quadranten; $Pp$ sei die Axe, $Qq$ der Aequator. Zeichne $\angle EOQ =$ der Schiefe der Ekliptik, ziehe den Wendekreis $Ee$ ≑ $Qq$ und beschreibe über $Ee$ den Halbkreis. Ist nun die Zeit des längsten Tages in $O = h$ (z. B. 16) Stunden, so nimm Bogen $EDn = \frac{h}{24}\left(\frac{16}{24} = \frac{2}{3}\right) \times EDe$ oder $\angle ECn = \frac{h}{24} \cdot 180°$ fälle das Loth $nm$ auf $Ee$, ziehe $Oo$ durch $m$, so ist $\angle DOo$ die g. B. von $O$.

Fig. 244.




Denn da *PEpqP* der Meridian von *O*, *Ee* der Durchschnitt des Sonnen-Parallelkreises, so ist *E* der Stand der Sonne im Mittage, *e* der zu Mitternacht, *m* der Durchschnittspunkt des Standes der Sonne beim Anfange, indem *EDn* als halber Tagebogen construirt ist, folglich ist *m* ein Punkt im Horizont von *O*, *Oo* der Halbmesser des Horizonts, und da *OP* die Weltaxe, so ist $\angle POo$, die Polhöhe = der g. B. von *O*. Ist der längste Tag 12 Stunden (das Minimum) so fällt *n* in D, *m* in *C*, *Oo* in *OP*, die Polhöhe ist = Null, und *O* liegt im Aequator *Qq*. Ist der längste Tag = 24 Stunden, so fällt *n* in *e*, *m* in *e*, *Oo* in *Oe*, die Polhöhe ist = *POe*, die Polardistanz = *eQq* = der Schiefe der Ekliptik, mithin liegt *o* im Polarkreise.

Wenn man nach vollendeter Construction den Kreis *PQpq* als Erdkugel betrachtet, und sieht von dem zuletzt erhaltenen Punkt *o* die Linie $oo' \mp Pp$, so hat man in *oo'* den Parallelkreis von *o* auf der Erde, wenn *Pp* als Aequator, *qQ* als Erdaxe angenommen wird.

7. Aus der vorstehenden Construction läfst sich eine Formel für Bestimmung der g. B. ableiten.

Setzt man die zu findende g. B. für einen Ort *o* ($\angle POo$) = *B*; die Schiefe der Ekliptik ($\angle EOQ$) = *e*; den Halbmesser $OQ = 1$, so ist $CE = \cos e$, $CO = \sin e$ und $Cm = \sin e \, tg \, B$. Ist nun die Dauer des längsten Tages in $o = (12 + h)$ Stunden gegeben, so ist $\angle DCn = \frac{h}{12} \cdot 90° = 7\frac{1}{2} h°$

$Cm = Cn \cdot \sin 7\frac{1}{2} h° = \cos e \cdot \sin 7\frac{1}{2} h°$, und man hat

$$\sin e \cdot tg \, B = \cos e \cdot \sin 7\tfrac{1}{2} h°$$

woraus

$$tg \, B = \sin \cdot (7\tfrac{1}{2} h°) \cdot \cot e$$

Der längste Tag in Berlin ist (s. Ascensionaldifferenz, No. 1, pag. 130) = 16 Stunden 36 Minuten 22,4 Secunden, mithin

$h$ = 4 Stunden 36 Min. 22,4 Sec., und

$7\frac{1}{2} h°$ = 34 Grad 32 Min. 48 Sec.

$e = 33° \; 30'$

Nun ist

$$\log \sin 34° \; 32' \; 48'' = 9{,}753\,6423$$
$$\log \cot 23° \; 30' = 10{,}361\,6981$$
$$\log tg \, B = \text{Summa } 10{,}115\,3404$$

und

$$B = 52° \; 31' \; 13''$$

**Breite, geometrische,** ist eine der beiden Dimensionen einer Fläche, gewöhnlich die kleinere, während die gröfsere Dimension bekanntlich Länge genannt wird.

**Breite, heliocentrische,** s. u. Breite astronomische.

**Breiten-Elemente** sind die Elemente, durch welche die Bahnen der zu unsrem Sonnensystem gehörenden Gestirne in Beziehung auf die Ebene unsrer Erdbahn, der Ekliptik, der Lage nach bestimmt werden. Sie bestehen in 2 Bestimmungsstücken: in dem Neigungswinkel, den die Bahnebene des Gestirns mit der Erdbahnebene bildet und in der Lage der Knotenlinie gegen bestimmte Punkte der Erdbahn. Für dieses letzte Element wählt man den Frühlingspunkt und bestimmt den östlichen Abstand des aufsteigenden Knotens von demselben, d. h. die Länge des aufsteigenden Knotens (s. aufsteigender Knoten).

**Breitengrade** sind entweder geographisch oder astronomisch. Die Grade, 90 an der Zahl, in welche ein Meridianquadrant vom Erd-Aequator, dem Nullpunkt, bis zum Pol eingetheilt wird, sind die geographischen Breitengrade, diejenigen 90 Grade, in welche ein Quadrant von der Ekliptik bis zu deren Pol eingetheilt wird, sind die astronomischen (s. Breite, astronomische und geographische).

**Breitenkreis** ist entweder geographisch oder astronomisch. Der B. eines Orts der Erdoberfläche ist der Quadrant, welcher vom Pol durch den Ort nach dem Aequator geführt wird, und der Bogen zwischen dem Ort und dem Aequator ist die (geographische) Breite des Orts. Der B. eines Gestirns ist der Quadrant zwischen der Ekliptik und deren Pol, welcher durch den Stern geführt wird, und dessen Bogen zwischen dem Stern und der Ekliptik die (astronomische) Breite des Sterns.

**Breitenparallele** heifsen in der Schiffersprache die (geographischen) Breitenkreise.

**Breitenprofil** ist eine durch die Breitendimension eines körperlichen Raums zu denkende Ebene; man sagt gewöhnlicher Querprofil oder Querschnitt.

**Bremse** (Mechanik). Ein Rad mit glattem Kranz bewegt sich mit möglichst grofser Winkelgeschwindigkeit nach der Pfeilrichtung um eine Walle, die mit einer Maschine in Verbindung steht, deren Bewegungen zu Zeiten ganz oder zum Theil vorübergehend gehemmt werden sollen. Zu diesem Zweck ist um den Radkranz ein geschmiedeter Reifen gelegt, und dieser mit beiden Enden an einen Hebel befestigt, und zwar das vordere Ende mit dem Drehpunkt *C*, das hintere Ende an dem in geringem Abstand von *C* beweglichen Punkt *F*, so dafs durch einen Druck auf den Endpunkt des langen Hebelarms *CB* der Punkt *F* über *C* bewegt wird, womit der Reifen sich fest um den Kranz legt, und durch Reibung die Bewegung des Rades hemmt (das Rad bremst). Wäre der Reifenbogen *AD* allein wirksam, so würde bei einem constanten mechanischen Moment der Radperipherie, am Reifen in *D* eine um so geringere Tangentialkraft im Verhältnifs zu der in *A* erforderlich sein, als die Reibung der Fläche *AD* gegen den Radkranz, der Kraft in *D* zu Hülfe kommt, in *E* eine um so geringere in Verhältnifs zu der in *D*, als die Reibung des Bogens *DE* der Kraft in *E* zu Hülfe kommt; somit ist die in *FC* erforderliche Tangentialkraft am geringsten, und man ersieht, dafs bei einerlei Druck auf jedes Reifenelement die Wirkung der Bremse mit der Länge des Bogens wächst.

Setzt man den Halbmesser der äufseren Peripherie des Radkranzes, also zugleich der inneren des anliegenden Reifens $= r$, bezeichnet irgend eine Bogen-Einheit

Fig. 245.

von *A* aus nach *D*, *E* mit $\alpha$, also Bogen *AD* mit $r\alpha$, setzt (Fig. 246) die beiden sehr kleinen $\angle DCG = GCE = \Delta\alpha$, also die zwischen *D*, *E* (Fig. 245) liegenden Bogen $DG = GE = r\,\Delta\alpha$, bezeichnet die gröfsere Tangentialspannung des Reifens nach *GD* mit $S^{n-1}$, die kleinere nach

Fig. 246.

*GE* mit $S^n$, so hat die Mittelkraft *R* zwischen beiden eine Richtung von der Mittellinie *GC* nach *D* hin, so dafs $\angle CGR$ = dem Reibungswinkel $\varphi$ (s. Balancier, 2.)

Zeichnet man von irgend einem Punkt *H* in *GR* das # *DGEH*, so ist

$$S^{n-1} : S^n = GD : GE = GD : HD$$
$$= \sin GHD : \sin HGD$$

Nun ist

$$\angle GHD = \angle EGH = \angle EGC + \varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi$$

und

$$\angle HGD = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi$$

folglich

$$S^{n-1} : S^n$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right)$$

oder

$$S^{n-1} : S^n = \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right) : \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right)$$

hieraus

$$S^{n-1} - S^n : S^n$$
$$= \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right) : \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right)$$

die Klammern aufgelöst und reducirt

$$\frac{S^{n-1} - S^n}{S^n} = \frac{2 \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sin\varphi}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2} \cos\varphi - \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sin\varphi}$$
$$= \frac{2\, tg\frac{\Delta\alpha}{2}\, tg\,\varphi}{1 - tg\frac{\Delta\alpha}{2}\, tg\,\varphi}$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\Delta\alpha$ rücken die Punkte *D* und *E* immer näher an *G*, die Geraden *GE* und *GD* können als die Bogenstücke *GE* und *GD*

betrachtet werden, $tg\,\Delta\alpha$ fällt mit dem Bogen $\Delta\alpha$ zusammen, und um so mehr kann im Zähler $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}$ gesetzt werden. Desgleichen wird $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2} \cdot tg\,\varphi$ immer kleiner, und wenn $\Delta\alpha$ im Verschwinden begriffen ist, verschwindet im Nenner der Werth von $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2}\,tg\,\varphi$ gegen die Einheit. Demnach hat man für ein sehr kleines $\Delta\alpha$:

$$\frac{S^{n-1} - S^n}{S^n} = \Delta\alpha \cdot tg\,\varphi$$

beim Verschwinden von $\Delta\alpha$ ist die Differenz $S^{n-1} - S^n$ ebenfalls im Verschwinden begriffen, also das Differenzial von $S^n$; da aber mit dem Wachsthum von $\alpha$ die Spannungen $S^{n-1}$, $S^n$.... immer kleiner werden, so hat man

$$\frac{\partial S^n}{S^n} = -\,tg\,\varphi\,\partial\alpha$$

woher

$$\int \frac{\partial S^n}{S^n} = -\,tg\,\varphi \int \partial\alpha$$

also

$$logn\ S^n = -\,\alpha \cdot tg\,\varphi + C$$

Für $\alpha = 0$ wird $S^n$ zur gröſsten Spannung $S$ in dem Punkt $A$ (Fig. 245), mithin hat man

$$logn\ S = C$$

und

$$logn\ S^n = -\,\alpha\,tg\,\varphi + logn\ S$$

oder

$$logn\,\frac{S}{S^n} = \alpha\,tg\,\varphi$$

oder

$$\frac{S}{S^n} = e^{\alpha\,tg\,\varphi}$$

woraus

$$S = S^n\ e^{\alpha\,tg\,\varphi}$$

Bezeichnet man mit $b$ den ganzen Bogen für den Halbmesser = 1, mit welchem der Reifen den Bremskranz umschlieſst, und die in $F$ erforliche Kraft mit $s$, so hat man

$$S = s \cdot e^{b\,tg\,\alpha}$$

wo $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems = 2,7182818 .. ist.

Die Gröſse $S$ der Spannung des Reifens ist also ganz unabhängig von dem Halbmesser des Bremsrades, sie wächst nur mit dem zu dem anliegenden Reifentheil gehörenden Centriwinkel.

Beispiel. Der Reifen umschlieſse $\frac{3}{4}$ der Peripherie, so ist $b = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = 4{,}7124$; der Coefficient für gleitende Reibung zwischen Schmiedeeisen und Guſseisen ist $\mu = tg\,\varphi = 0{,}19$, mithin $b \cdot tg\,\varphi = 0{,}895356$

$e$, die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist 2,7182818 ...

$$log\ br\ e = 0{,}434294482$$

daher

$$log\ e^{0{,}895356} = 0{,}895356 \times 0{,}43429\ldots$$
$$= 0{,}3888480$$

und $$S = 2{,}4482 \cdot s$$

d. h. die in der Peripherie des Bremsrades wirkende Kraft $S$ kann das 2,4482fache der in $A$ zur Hemmung der Bewegung erforderlichen Thätigkeit $s$ betragen. Ist nun der Hebelarm $CB$ = 2 Fuſs, der Hebelarm $CF$ = 3 Zoll, so ist in $B$ nur eine Anstrengung $P$ von $\frac{3\ \text{Zoll}}{2\ \text{Fuſs}}\,s = \frac{1}{8}\,s$ nöthig, und es kann sein $S = 19{,}5856 \cdot P$. Mit einem Druck $P$ von 20 Pfund kann also eine Last $S$ = 391,7 Pfund gehemmt werden.

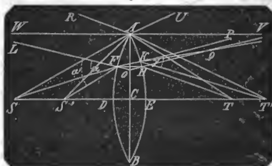
**Brennglas**, eine Glaslinse, mit welcher die Sonnenstrahlen aufgefangen und auf einen Punkt, den focus, concentrirt werden. In diesem Punkt ist nun eine Hitze, welche mit dem Grade, in welchem die Strahlen verdichtet worden sind, in Verhältniſs steht. Das B. ist in der Regel eine biconvexe Linse, weil diese die verhältniſsmäſsig gröſste Hitze hervorbringt. Aber auch planconvexe und concavconvexe Linsen äuſsern die Wirkung eines B.

Um das eben Gesagte nachzuweisen, hat man in dem Art.: Ablenkung des Lichtstrahls, No. 2. B, den Nachweis, daſs wenn Fig. 10, pag. 7, der von einem auf ein Prisma fallenden Strahl $sa$ herrührende gebrochene Strahl $ab$ ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, der austretende Strahl $bd$ gegen $cb$ dieselbe Lage hat wie $sa$ gegen $ca$, und daſs der brechende $\angle\,c$ = ist dem doppelten gebrochenen $\angle\,(2\lambda)$.

Ferner ist zu erwägen, daſs jedes durch Parallelen mit der Axe abgeschnittene Stück einer Linse $AB$ (Fig. 247) wie $AFH$, $FHDE$, wenn $A$ und $FH$, $FH$ und $DE$ sehr nahe an einander liegen, als ein Prisma betrachtet werden kann, und daſs dessen brechender Winkel, wenn man die brechenden Flächen bis zur Durchschnittskante verlängert denkt, immer kleiner wird, je näher das Prismatheilchen der Linsenaxe liegt, in welcher der Winkel = Null ist.

2. Es sei die Linse $AB$ ein Brennglas, so ist dessen Stärke $DE$ gegen den Durchmesser $AB$ sehr klein, also auch der gröſste aller brechenden Prismenwinkel ($c$) der Winkel $A$ oder $B$ sehr klein. Es sei $SF$ ein Lichtstrahl, der in $FH \neq DE$ gebrochen wird, so ist der austretende Strahl $HT$ so gelegen, daſs $TC = SC$.

Fig. 247.




Ist $LO$ dnrch $F$ das Einfallsloth, der Einfallswinkel $SFL = \alpha$, ao ist $\angle OFH$ sein Brechungawinkel $\beta$, $c = 2\beta$, also $\beta = \frac{c}{2}$ nnd da $c$ sehr klein ist, so ist $\beta$, nnd anch $\alpha$ etwa $= n\beta = 1{,}5\,\beta$ sehr klein, folglich $SC = TC$ sehr grofs.

Genau ist $\sin \alpha = n \sin \beta$, allein bei so kleinen Winkeln kann man, ohne einen bemerkbaren Fehler zn begehen

$$\alpha = n\beta$$

nnd da

$$c = 2\beta$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} nc$$

setzen, nnd nnter $\alpha$ kann ebenso der $\angle SAR$ in $A$ verstanden werden.

Ist $S'$ ein zweiter leuchtender Punkt, sein Einfallswinkel $LFS' = \alpha'$, sein Brechungswinkel $KFO = \beta'$; sind $KP$, $HQ$ Einfallslothe, die bei ihrer Nähe nnd der Kleinheit der ihnen zugehörigen Prismenwinkel mit einander $\parallel$ anznnehmen sind, so trifft der gebrochene Strahl $FK$, bis $Q$ in $OQ$ verlängert gedacht, die Fläche $KH$ nnter dem Einfallswinkel

$$PKQ = KQH = \angle FHO - \angle KFH$$
$$= \beta - (\beta' - \beta) = 2\beta - \beta'$$

Es aei $\angle KPT'$ der Winkel, unter welchem der Strahl $FK$ nach $KT'$ anstritt $= \gamma$, so hat man, statt der Sinns die Bogen genommen,

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' = \gamma : 2\beta - \beta'$$

Hieraus erhält man durch Umformnng

$$1)\quad \alpha : \alpha' - \alpha = \beta : \beta' = \beta$$
$$2)\quad \alpha : \alpha - \gamma = \beta : \beta' = \beta$$

woraus

$$\alpha' - \alpha = \alpha - \gamma$$

Da man wie oben den Pnnkt $F$ nach dem Pnnkt $A$ verlegen kann, so heifst die Gleichnng:

$$\angle RAS' - \angle RAS = \angle UAT - \angle UAT'$$

oder

$$\angle SAS' = \angle TAT'$$

Da nnn der Punkt $S$ ans $\alpha = \frac{1}{2} nc$ bekannt ist, so hat man, um für einen gegebenen Pnnkt $S'$ den zugehörigen Brennpnnkt $T'$ zn finden, nnr nöthig, den $\angle TAT' = \angle S'AS$ zu nehmen, worans die Linie $AT'$ sich ergiebt.

Für $\alpha' = 2\alpha$ fällt $AT'$ ln $AU$ nnd es ist $\angle UAT' = 0$. Ist nnn bei einem Brennglase $c$ sehr klein, so können die Einfallslothe $RA$ und $UA$ ln $A$ nahe $\parallel$ der Axe $DE$, also in $WV$ genommen werden; dann ist ebenso nahe $\angle ASC = \alpha$, und wenn $\angle S'AS = \alpha' - \alpha = \alpha$ genommen wird, so gehen die Strahlen, die ans $S'$ anf das Glas fallen, hinter dem Glase nach $AV$ und $\parallel AV$, d. h. $\parallel$ der Axe fort; oder gegenseitig: mit der Axe $ST$ auf die Fläche $AEB$ fallende Strahlen werden in den Pnnkt $S'$ vereinigt nnd $S'$ ist annähernd der **Brennpunkt** des Glases.

3. Es kommt nun daranf an, die Entfernung des Brennpnnkts vom Mittel des Brennglases, d. h. die Brennweite $w$ zn finden.

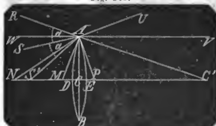
Sind Fig. 248 $AM$, $AP$ Tangenten an den letzten Bogen-Elementen bei $A$, so ist $\angle MAC = \angle PAC = \frac{1}{2} c$. Ist wieder $WV \parallel$ der Axe $DE$, nnd sind $RA$, $UA$ Einfallslothe in $A$, so sind diese normal anf $AM$ und $AP$, nnd $\angle RAW = \angle UAV = \frac{1}{2} c$. Ist ferner $\angle RAS = \angle SAS' =$ dem No. 2 näher bestimmten $\alpha$, so wird der Strabl $S'A$ nach $AU$ gebrochen. Allein der Strabl soll nach $AV$, parallel der Axe gebrochen werden, nnd der Brennpunkt ist folglich ein noch vor $S'$, etwa in $N$ liegender Pnnkt, von welchem ans Strahlen wie $NA$ nach $AV \parallel DE$ fortgehen, nnd man kann näherungsweise annehmen, dafs $\angle NAS' = \angle UAV = \frac{1}{2} c$ ist.

Ist $AC'$ der Halbmesser $r$ der Kngeloberfläche $ADB$ wie der zweiten $AEB$, so kann man den ans $N$ mit dem Halbmesser $NC$ von $C$ bis ln $WV$ beschriebenen Bogen dem aus $C'$ mit $C'D$ von $D$ bis in $WV$ beschriebenen Bogen näherungsweise gleich setzen.

Nun ist

$$\angle ANC = \angle WAN$$
$$= \angle RAS' - (\angle RAW + \angle NAS')$$
$$= 2\alpha - 2 \cdot \frac{c}{2} = 2\left(\alpha - \frac{c}{2}\right)$$

Fig. 248.




Ferner

$$\triangle AC'C \infty \triangle MAC$$

folglich

$$\angle AC'C = \angle MAC = \frac{c}{2}$$

daher hat man näherungsweise

$$NC \cdot 2\left(\alpha - \frac{c}{2}\right) = r \cdot \frac{c}{2}$$

Es ist aber (nach No. 2)

$$\alpha = n \cdot \frac{c}{2}$$

daher hat man

$$NC \cdot 2\,(n-1) = r$$

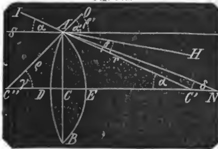
woraus

$$NC = w = \frac{r}{2(n-1)}$$

4. Dafs beide Kugeloberflächen des B. verschiedene Halbmesser $C'A = r$ und $C''A = \varrho$ haben, möchte in der Praxis nicht so leicht vorkommen; da indefs die Formel für $w$ durch beide Halbmesser $r$ und $\varrho$ bestimmt wird, so findet man, $r = \infty$ gesetzt, $w$ für ein planconvexes Glas und $r = -r$ gesetzt, $w$ für ein concav convexes Glas, weshalb die Untersuchung für den Fall zweier verschiedener Kugelflächen hier geschehen soll.

Verlängere die Halbmesser $C''A$ bis $O$ und $C'A$ bis $J$, so hat der Sonnenstrahl $SA$

Fig. 249.




den Einfallswinkel $JAS = AC'C'' = \alpha$, der Strahl werde unter dem $\angle HAC' = \beta$ innerhalb des Glases gebrochen, so tritt er in dieser Richtung nur bis zur Oberfläche $AEB$. Gesetzt, er träte in der Richtung $AN$ in die Luft, so ist, da $AO$ normal in $A$ auf $AEB$, $AO$ das Einfallsloth, und der Austrittswinkel $OAN = \alpha'$ hat den im Glase gebrochenen $\angle HAO = \beta'$ folglich ist zuerst

$$\alpha = n\beta;\; \alpha' = n\beta' \qquad (1)$$

Für ähnliche Betrachtungen wie in No. 3 hat man näherungsweise Bogen $AE$ = Bogen $AD$ = dem Bogen der von dem Brennpunkt $N$ aus mit dem Halbmesser $NC$ von $C$ bis in $SA$ beschrieben wird, oder wenn man $\angle AC''C$ mit $\gamma$, $\angle ANC$ mit $\delta$ bezeichnet,

$$\varrho\gamma = r\alpha = w\delta \qquad (2)$$

Aus 1 ist

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' \qquad (3)$$

ferner ist

$$\beta + \beta' = \alpha + \gamma \qquad (4)$$

und

$$\delta = \alpha' - \gamma \qquad (5)$$

Aus 3 hat man

$$\alpha : \alpha + \alpha' = \beta : \beta + \beta'$$

also mit Hülfe von 4:

$$\alpha : \alpha + \alpha' = \beta : \alpha + \gamma$$

hieraus

$$\alpha - \beta : \beta = \alpha' + \gamma : \alpha + \gamma$$

woraus

$$\alpha' - \gamma = \frac{\alpha - \beta}{\beta}\,(\alpha + \gamma) \qquad (6)$$

Aus 2 ist

$$\varrho : r = \alpha : \gamma$$

oder

$$\varrho : r + \varrho = \alpha : \alpha + \gamma$$

woraus

$$\alpha + \gamma = \frac{r + \varrho}{\varrho}\,\alpha$$

Folglich aus 2, 5 und 6

$$w\delta = w\,\frac{\alpha - \beta}{\beta}\,\alpha \cdot \frac{r + \varrho}{\varrho} = r\alpha$$

also

$$w = \frac{r\varrho}{r + \varrho} \cdot \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

Setzt man für $\alpha$ seinen Werth $n\beta$, so entsteht

$$w = \frac{1}{n-1}\,\frac{r\varrho}{r + \varrho} \qquad \text{I}$$

für $r = \varrho$ erhält man die Formel (No. 3)

$$w = \frac{r}{2(n-1)} \qquad \text{II}$$

5 Um $LN$ für ein planconvexes Glas zu finden, wird in Gl. I. $\varrho = \infty$

gesetzt. Es ist nun

$$\frac{1}{W}=(n-1)\frac{r+\varrho}{r\varrho}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

für $\varrho=\infty$ entsteht

$$\frac{1}{W}=(n-1)\frac{1}{r}$$

und

$$W=\frac{1}{n-1}\cdot r \qquad \text{III}$$

Die Brennweite eines planconvexes Glases ist also doppelt so grofs als bei dem biconvexen Glase.

Für ein concav-convexes Glas ist $\varrho$ negativ und gröfser als $r$, weil die Concavität nur flacher sein kann, daher

$$\frac{1}{W}=(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$=(n-1)\frac{\varrho-r}{r\varrho}$$

und

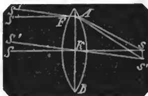
$$W=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{r\varrho}{\varrho-r} \qquad \text{IV}$$

Je näher $\varrho$ an $r$ kommt, desto gröfser wird $W$, für $\varrho=r$ wird $W\infty$ und für $\varrho<r$ wird die Linse ein Zerstreunngsglas.

6. Welch einen Einflufs die geringere und gröfsere Brennweite auf die Wirkung des Brennglases hat, wird aus Folgendem klar:

Die Sonne ist kein leuchtender Punkt wie ein Fixstern, sondern sie erscheint in einer Scheibe, deren Durchmesser von der Erde aus betrachtet unter einem Winkel von 32 Minuten gesehen wird. Jeder von der Sonne beschienene Punkt wird also nicht von nur einem Strahl, sondern von einem Strahlenkegel, einer Vereinigung sehr vieler Strahlen erleuchtet und erwärmt.

Fig. 250.




Ist $SK$ der von dem Sonnenmittel, $S'K$ der von dem oberen Rande der Sonne auf die Axe des B. fallende Strahl, so gehen beide Strahlen in gerader Linie fort (s. astronomisches Fernrohr) die Strahlen $SF$ und $S'F$ brechen sich durch $F$, so dafs $SF$ nach $s$ in den Brennpunkt, $S'F$ senkrecht darunter in $s'$, wo er den Strahl $S's'$ schneidet, gebrochen wird, und $ss'$ ist der Raum in dem alle von dem oberen Sonnenhalbmesser auf $AK$ fallenden Strahlen sich vereinigen; und wenn man aus $s$ als Mittelpunkt in der Ebene $ss'$ einen Kreis beschrieben denkt, so ist dieser Kreis der Ort, in dem alle von der Sonne auf das Brennglas $AB$ fallenden Strahlen sich vereinigen. Sämmtliche Sonnenstrahlen sind vor $AB$ im natürlichen Zustande, in $ss'$ sind sie verdichtet, und zwar in dem umgekehrten Verhältnifs der in $AB$ und $ss'$ bestehenden Lichtflächen.

Nennt man $R$ den Halbmesser des B., $r$ den des Bildes in $s$, so sind die Sonnenstrahlen bei $s$ um das $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ fache verdichtet, und um das $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ fache geschieht auch die Erwärmung.

Hieraus folgt, dafs die Verdichtung der Sonnenstrahlen, und mit dieser die erzeugte Hitze, also die Wirkung des B. um so gröfser ist, je gröfser der Halbmesser $R$ des B., und je kleiner der Halbmesser $r$ des Brennraums ist.

Es ist aber

$\angle S'KS=\angle s'Ks=16$ Minuten, $Ks=W$

folglich

$$r=W\,tg\,16'$$

und die Verdichtung

$$=\left(\frac{R}{W\,tg\,16'}\right)^2$$

Der Halbmesser des Brennraums wächst also mit der Brennweite und diese mit dem Halbmesser der Kugeloberfläche. Ein B. ist also wieder um so wirksamer, je geringer die Brennweite, also je convexer es ist.

Bei einerlei Convexität hat das planconvexe Glas die doppelte Brennweite, dessen Wirkung ist also nur ¼ des biconvexen Glases. Bei dem concav-convexen Glase ist die Brennweite noch gröfser, sie kann $\infty$ werden, wo dann die Verdichtung = Null wird, sie kann negativ werden, wo Zerstreuung, also Erkältung hervorgeht; erst wenn der Halbmesser der concaven Fläche $=\infty$, wenn also die Concavität in die Ebene übergeht, wird die Brennkraft ¼ des biconvexen Glases.

$tg\,16'$ ist $=0{,}0046542$

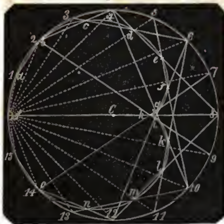
also

$$\frac{1}{tg^2\,16'}=46165$$

folglich ist die Verdichtung der Sonnenstrahlen und deren Wärme durch ein Brennglas = das 46165 $\left(\frac{R}{w}\right)^2$ fache.

**Brennlinie.** Wie ein Brennpunkt (s. Brennglas) derjenige Punkt genannt wird, in welchem viele Wärmestrahlen vereinigt werden, und dadurch in dem Punkt eine zündende Hitze erzeugen, so versteht man unter B. eine Linie, welche mehrere sehr nahe an einander befindliche Brennpunkte mit einander verbindet, wobei man sich jedoch unter jedem einzelnen dieser Brennpunkte den Durchschnittspunkt von nur 2 Strahlen zu denken hat. Sind in (Art. Antikaustische Linie) Fig. 68 die Linien *a'A*, *b'B* ... parallele, von der Sonne auf die Curve *ABCD* ... fallende Strahlen, und reflectirt *b'B* nach *Ba*, *c'C* nach *Cb* u. s. w. so geschieht dies dadurch, dafs die Normale auf die Curve in *B* mit *aB* und *b'B*, die Normale in *C* mit *bC* und *c'C*.. gleiche Winkel bildet. *abcd*.. ist, unter Voraussetzung, dafs *a*, *b*, *c*, *d* sehr nahe an einander liegen, die B. *a* ist der Vereinigungspunkt der beiden reflectirten Strahlen *Aa* und *Ba*, *b* von *Ba* und *Cb* u. s. w. Diese B. ist also nicht wie der Brennpunkt beim Brennglase durch Brechung, sondern durch Zurückwerfung von Lichtstrahlen entstanden; Brennlinien durch gebrochene Strahlen, die diakaustischen Linien, finden nirgends Anwendung, sie werden nur theoretisch betrachtet, und sollen deshalb hier fortbleiben; die B. durch Zurückwerfen, die katakaustischen Linien haben der Spiegelung wegen viel Interessantes, besonders wenn nur ein leuchtender Punkt angenommen wird, wie in dem folgenden Beispiel:

Fig. 251.



Es sei Fig. 251 eine hohle spiegelnde Kreislinie, *A* sei ein leuchtender Punkt, so wirft dieser nach jedem Punkt des Spiegels einen Strahl, welcher unter dem Winkel, mit welchem er den aus *C* zu denkenden Halbmesser trifft, wieder zurückgeworfen wird, und es entsteht für die B. eine Curve von der Form *bcdefg hiklmno*, die aus zwei congruenten Hälften besteht. Denn theilt man von *A* aus die Kreislinie in eine grofse Anzahl gleicher Theile, hier ist es in 16 Theile geschehen, zieht nach den Theilpunkten die geraden Linien $A_1$, $A_2$ ... $A_{15}$ als einfallende Strahlen, so reflectirt $A_1$ nach 2, $A_2$ nach 4, $A_3$ nach 6, $A_4$ nach 8 ... $A_8$ nach *A*, $A_9$ nach 2, $A_{10}$ nach 4, $A_{11}$ nach 6 ... $A_{15}$ nach 14. *b* ist der erste Punkt als Durchschnitt der reflectirten Strahlen 1,2 und 2,4; *c* der zweite Punkt zwischen 2,4 und 3,6; *d* der dritte zwischen 3,6 und 4,8; *e* der vierte zwischen 4,8 und 5,10; *f* der fünfte zwischen 5,10 und 6,12; *g* der sechste zwischen 6,12 und 7,14; *h* der siebente zwischen 7,14 und 8,*A*; derselbe Punkt *h* der 8te zwischen 8,*A* und 9,2 u. s. w.

Je gröfser man die Anzahl der Theile nimmt desto näher rücken die Anfangspunkte *b*, *o* dem leuchtenden Punkt *A*, und in der Wirklichkeit beginnen sie sehr nahe demselben. Eben so ersieht man, dafs der mittlere Punkt *h* der B. dem Mittelpunkt *C* um so näher kommt, je näher man den Punkt 7 an 8 legt, und in der Wirklichkeit fallen *h* und *C* zusammen.

Man kann eine Unzahl von B. construiren, je nachdem man die Form der spiegelnden Linie und den Ort des leuchtenden Punktes wählt.

**Brennpunkt.** In dem Art.: Brennglas, ist gezeigt, dafs die Sonnenstrahlen mittelst eines Glases von geeignet construirten Oberflächen aufgefangen und nach einem einzigen Punkt geworfen, also verdichtet werden; die in den Lichtstrahlen befindlichen Wärmestrahlen werden also ebenfalls verdichtet, und erzeugen in diesem Punkt eine Hitze, welche zündet und schmelzt woher dieser Vereinigungspunkt der Strahlen, Brennpunkt, focus, genannt wird. Diesen Namen führt jeder Vereinigungs- oder Sammelpunkt von Lichtstrahlen, wenn diese hier auch nicht zünden, wenn z. B. reflectirtes Licht gesammelt wird, so

in Fig. 91, pag. 143 in dem astronomischen Fernrohr heifst c' der gemeinschaftliche Brennpunkt der beiden Linsen *AB* und *DE*; in dem vor. Art. besteht ein B. aus der Vereinigung nur zweier reflectirter Strahlen.

Aus dem Art.: achromatisch ersieht man, dafs jeder Lichtstrahl durch Brechung zugleich in einzelne Farbenstrahlen zerspalten wird, von welchen jeder einzelne eine andere Richtung durch das Mittel nimmt; hieraus geht hervor, dafs die Aufsammlung von Lichtstrahlen in so vielen Punkten geschieht, als Strahlenfarben entstehen, oder dafs jede Strahlenfarbe ihren eigenen B. hat.

Die Zurückwerfung eines Lichtstrahls geschieht ohne dessen Zerspaltung, und zwar geschieht sie unter demselben Winkel mit dem Einfallsloth, den der einfallende Strahl mit demselben gebildet hat. *AB* sei eine Spiegelebene, die normal fallenden Lichtstrahlen *CF*, *DG*, *EH* werden nach denselben Entsendungspunkten *C*, *D*, *E* zurückgeworfen, der Lichtstrahl *CG* dagegen nach *GE*, wenn $\angle CGD = \angle EGD$ ist. Sieht man von *E* nach *G*, so empfängt man das Bild von dem Gegenstand *C* und zwar in der Entfernung *EG* + *CG*. Da man nun jeden Lichtstrahl nur geradlinig zu sehen gewohnt ist, so versetzt man das Bild von *D* in der Länge $EG + CG$ geradlinig nach *C'*; da nun $\angle C'GA = \angle CGA$, $C'G = CG$, so ist *CFC'* eine gerade Linie, $C'F = CF$, und man versetzt den Gegenstand *C* normal und in gleicher Entfernung *CF* hinter die Spiegelebene.

Fig. 252.

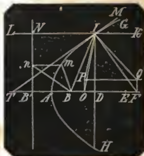



Man sieht, dafs Planspiegel nicht geeignet sind, Brennpunkte zu erzeugen. Stellt man in den Mittelpunkt *C* (Fig. 251) einer spiegelnden hohlen Kugelfläche ein Licht, so wirft es nach allen Punkten derselben Strahlen, jeder Strahl fällt senkrecht auf, und wird nach derselben Linie zurückgeworfen. Der Punkt *C* ist also zugleich der B. des Spiegels.

Aufser der Kreislinie oder vielmehr dem Kreisbogen und deren Umdrehungsfläche giebt es noch mehrere krumme Linien, die mit ihren Umdrehungsflächen Brennpunkte zulassen, und so ist denn auch der B. ein Begriff für die Geometrie geworden.

**Brennpunkt der Parabel.** In dem Art.: Apollonische Parabel ist die Entstehung der Parabel beschrieben; eben so der Begriff Parameter erklärt. Es sei *GAH* die Parabel, *A* deren Scheitel, *AF* deren Axe, von welcher die Curve in 2 congruente Theile *AG*, *AH* getheilt wird, *AE* sei der Parameter $= p$, so ist das Gesetz für das Verhältnifs der rechtwinkligen Ordinaten zu deren Abscissen durch die Gleichung gegeben

Fig. 253.




$$y^2 = px$$

Es ist z. B.

$$DJ^2 = AE \cdot AD$$

Nimmt man $AD = \frac{1}{4} AE = \frac{1}{4} p$, so ist *B* der Brennpunkt der Parabel; es wird nämlich, wenn die Linie *GJAH* der Durchschnitt eines Hohlspiegels wäre, jeder ǂ mit der Axe *AF* die Curve berührende Lichtstrahl nach dem Punkt *B* geworfen, so wie *KJ* nach *JB*, und es wird der parabolische Spiegel, von der Sonne getroffen, in *B* eine bedeutende Hitze erzeugen. Ebenso wird eine Flamme in *B* befindlich nach jedem Punkt der parabolischen Spiegelfläche einen Strahl werfen, und jeder dieser Strahlen wird, wie *BJ* nach *JK*, ǂ der Axe zurückgeworfen, so dafs die kleine Flamme *B* zu einer Lichtscheibe von dem Durchmesser *GH* wird.

2. Nach dem Vorigen ist dieser einzige B. nur dadurch möglich, dafs jeder einfallende Strahl, wie *KJ*, mit dem zurückgeworfenen Strahl, dem Brennstrahl, wie *JB*, einen Winkel bildet, der von der Normale des Einfallspunkts, wie *JF* halbirt wird.

Zieht man an *J* die auf *JF* normale gerade Linie *MT*, so ist diese die Tangente der Parabel in *J* (s. berührende Linien) und verlängert man den Strahl *KJ* nach *L*, so mufs, weil $\angle TJF = R = \angle MJF$, also $\angle TJB = \angle MJK$, und da ferner $\angle MJK$ und *LJT* als Scheitelwinkel gleich sind, auch $\angle LJT = \angle BJT$

sein, d. h. die Halbirungslinie des $\angle BJL$ ist die Tangente in J, und jede Tangente und die dazu gehörende Normale ist für jeden Parabelpunkt äufserst leicht zu construiren, wenn der B. gegeben ist.

3. Eben so leicht ist es, die Parabel (also die Lehre für einen parabolischen Hohlspiegel) zu construiren, wenn der Abstand $AB$ des B. vom Scheitel, die Brennweite gegeben ist: Man nehme auf der Axe rückwärts $AB' = AB$, ziehe $B'N$ (die Directrice) normal der Axe $B'F$, so hat man $NJ = JB$. Zieht man also auf $B'N$ mehrere Normalen wie in $n$, so erhält man den zugehörigen Punkt $m$ der Parabel, wenn man $\angle nBm = \angle mnB$ macht.

4. Dafs $NJ = JB$, $nm = mB$ u. s. w. erhellt aus Folgendem:

Es ist

$AB = \frac{1}{4}p$, für $J$ ist $AD = x$; $DJ^2 = px$

folglich

$$BJ^2 = BD^2 + DJ^2 = (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + px$$
$$= x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 - \tfrac{1}{2}px + px = x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{2}px$$
$$= (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$

und

$$BJ = x + \tfrac{1}{4}p$$

Für den Punkt $m$ wird

$$Bm^2 = (\tfrac{1}{4}p - x)^2 + px = x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{2}px$$
$$= (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$

also jeder Brennstrahl ist = der zu dem Parabelpunkt gehörenden Abscisse + dem Abstand des Brennpunkts vom Scheitel.

Nimmt man nun $AB' = AB = \frac{1}{4}p$, so ist jede $\mp$ der Axe genommene Linie wie

$$NJ = AD + AB' = x + \tfrac{1}{4}p$$

mithin wie

$$NJ = BJ$$

Jeder Brennstrahl = dem Abstand des Parabelpunkts von der Directrice.

Da $\angle NJT = \angle BJT$

und

$$\angle BTJ = \angle NJT$$

so ist

$$\angle BTJ = \angle BJT$$

hieraus

$$BJ = TB = TA + AB$$

also

$$x + \tfrac{1}{4}p = TA + \tfrac{1}{4}p$$

woraus

$$TA = x$$

und die Subtangente

$$TD = 2AD$$

= der doppelten Abscisse, woraus bei gegebenen Parabelbogen die Construction von Tangenten sehr leicht ist.

5. Der B. ist übrigens der einzige Punkt der Axe, von dem aus alle geraden Linien nach der Curve in Beziehung auf $x$ rational werden. (Aufser der Axe existirt gar kein Punkt, von dem aus dies der Fall ist.)

Denn setzt man für einen beliebigen Parabelpunkt J, $AD = x$, $DJ = y$, setzt vom Scheitel aus in der Axe einen beliebigen Abstand $AO < x$ oder $AF > x = s$ und senkrecht über $O$ und $F$ die Punkte $P$ und $Q$ in dem Abstand $W$ von der Axe, so hat man

$$PJ^2 \text{ oder } QJ^2 = (y - w)^2 + (\pm x \mp s)^2$$
$$= y^2 - 2wy + w^2 + x^2 + s^2 - 2xs$$

Soll nun $PJ$ oder $QJ$ rational zu $x$ werden, so ist dies ebenso von $PJ^2$ oder $QJ^2$ erforderlich. Nun ist $y^2 = px$, also $y = \sqrt{px}$, $y$ also irrational in Beziehung auf $x$, daher darf in dem Ausdruck für $PJ^2$ oder $QJ^2$ das Glied $2wy$ nicht vorkommen, d. h. es mufs $w = o$ sein, der Punkt kann nur in der Axe liegen, $PJ$ und $QJ$ werden zu $OJ$ und $FJ$, und es ist

$$OJ^2 \text{ oder } FJ^2 = px + x^2 + s^2 - 2xs$$
$$= x^2 + s^2 + (p - 2s)x$$

Soll nun der letzte Ausdruck ein wirkliches Quadrat werden, so mufs $p - 2s = \pm 2s$ sein, wo nur das obere Zeichen + gelten kann, weil für $-2s$, $p = o$ entsteht, was unmöglich ist.

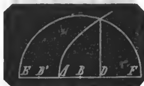
Für $p - 2s = +2s$ ist aber $p = 4s$ oder $s = \frac{1}{4}p$, d. h. der Abstand des B. vom Scheitel.

6. Eine sehr einfache und sehr genau auszuführende Construction einer Parabel, also auch einer Lehre für einen parabolischen Hohlspiegel von dem B. aus erhält man aus folgender Betrachtung:

Es sei $AB$ die gegebene Brennweite, $A$ der Scheitel, $B$ der Brennpunkt. Um nun den Parabelpunkt $J$ über dem beliebigen Punkt $D$ zu finden, hat man

$$AD = x, \; AB = \tfrac{1}{4}p$$

Fig. 254.




Nimmt man auf der über den Scheitel verlängerten Axe $AB' = \frac{1}{4}p$, so ist

$$B'D = x + \tfrac{1}{4}p$$
$$BD = x - \tfrac{1}{4}p$$

daher $B'D + BD = 2x$

und $B'D - BD = \frac{1}{2}p$

folglich

$$(B'D + BD)(B'D - BD) = \tfrac{1}{2}p \cdot 2x = px = y^2$$

Nimmt man daher die beiden eingeklammerten Linien als Theile eines Durchmessers, also des Durchmessers $2\,B'D$, $D$ als den Theilpunkt zwischen beiden, beschreibt über $2B'D$ den Halbkreis, so schneidet er in $J$ die Länge $JD$ ab; es ist $DJ^2 = px$ und $J$ ein Parabelpunkt. Es ist also $B'D$ der Halbmesser des Kreises, $B'$ der Mittelpunkt und $EJF$ der Halbkreis; dann da nun $BE = B'D$, so ist $DF = B'D - BD$.

So kann man von $A$ aus beliebig viele Theilpunkte wie $D$ verzeichnen, Normalen errichten, mit dem jedesmaligen $B'D$ von dem constanten Punkt $B'$ aus den Halbmesser nehmen, und mit diesem von dem constanten Punkt $B$ aus die dem jedesmaligen $D$ zugehörige Normale durch einen Bogen schneiden, wo man jedesmal einen Parabelpunkt erhält.

7. Aus der Eigenschaft der Parabel, dafs die Subtangente jedes Punkts = der doppelten Abscisse ist, ergiebt sich noch eine andere, wohl eben so einfache Construction der Parabel bei gegebenem $B$. Ist nämlich $TD$ die Axe, $B$ der Brennpunkt, $TJ$ an $J$ die Tangente, so ist die Subtangente $TD = 2AD$, also $TA = AD$, $TB = x + \frac{1}{4}p = BJ$, $\angle JTB = \angle TJB$, folglich halbirt ein Loth $BL$ auf $TJ$ die $TJ$ und $TL = JL$. Errichtet man aber in $A$ ein Loth $AM$ auf der Axe $TD$, so ist $AM \parallel DJ$, und es mufs durch den Punkt $L$ gehen, weil $TA : AD = TL : LJ$ und $TA = AD$ ist.

Die Construction der Parabel ist demnach folgende: Errichte im Scheitel $A$ ein Loth $AM$, ziehe aus dem Brennpunkt $B$ eine beliebig gerade Linie ($BL$), errichte

Fig. 255.

auf dieser ein Loth, welches die Axe (in $T$) schneidet, so ist diese ($LT$) die halbe Tangente eines Parabelpunkts, die rückwärts ihr gleiche ($LT$) bestimmt also diesen Parabelpunkt.

Die Construction No. 6 ist deshalb praktischer, weil man die Parabelpunkte in beliebigen Abständen von einander erhält.

**Brennpunkt der Ellipse.** 1) Die Ellipse $AEae$ entsteht, wenn man in 2 Punkten $B$, b die Enden eines biegsamen Fadens von der Länge $Aa$ befestigt, und diesen durch zwischengehaltenen Stift unter fortdauernder Anspannung in einerlei Ebene herumführt. Befindet sich der Stift in $A$ oder $a$, so überdecken sich die beiden Theile des Fadens, in allen übrigen Punkten wie $J$ bilden sie ein Dreieck, dessen Summe der Seiten gleich grofs bleibt, in $E$ und $e$ sind die Dreiecke gleichschenklig. Die Linie $Aa$ ist die grofse Axe, $Ee$ die kleine Axe, die Linien $BE$, $bE$ oder $BJ$, $bJ$ u. s. w. heifsen Radii vectoren, und da diese in jedem Punkt mit der zu diesem Punkt gehörenden Normalen gleiche Winkel bilden, wie sogleich

Fig. 256.

nachgewiesen werden wird, so heifsen $B$, $b$ die Brennpunkte der Ellipse. Jede Normale wie $FJ$ kann nämlich als Einfallsloth betrachtet werden, und daher wird jeder aus dem leuchtenden Punkt $B$ oder $b$ auf jeden Punkt der elliptischen Linie geworfene Lichtstrahl nach dem Punkt $b$ oder $B$ reflectirt. Beide Axen $Aa$ und $Ee$ halbiren sich im Mittelpunkt $C$ der Ellipse, und theilen diese in vier congruente Quadranten, der Abstand jedes der beiden Brennpunkte von dem Mittelpunkt heifst die Excentricität der Ellipse.

2. Verlängert man einen Radius vector z. B. $BJ$, beschreibt aus $J$ mit dem 2ten Radius vector $Jb$, als Halbmesser den Halbkreis $ONLG$, zieht die Sehne $Gb$, halbirt diese in $H$, und zieht durch $H$ und $J$ die Linie $KL$, so ist diese die Tangente in $J$. Denn zieht man von einem beliebigen Punkt $M$ der Linie $KL$ nach $B$, $b$ und $G$ gerade Linien, so ist

$$MB + MG > BG$$
$$MG = Mb$$

foglich $MB + Mb > BG$

Nun ist

$$JG = Jb$$

daher $BG = JB + Jb = Aa$

mithin $MB + Mb > Aa$

Es liegt also der Punkt $M$ und jeder andre Punkt der Linie $KL$ mit Ausnahme des Punkts $J$ außerhalb der Ellipse und folglich ist $KL$ Tangente in $J$.

Zieht man nun die Normale $JF$, so ist

$$\angle MJF = \angle LJF = R$$

und da

$$\angle MJB = LJG$$

als Scheitelwinkel, so ist auch

$$\angle FJB = \angle FJb$$

und $BJ$ und $bJ$ sind mit einander reflectirende Brennstrahlen.

3. Bezeichnet man für einen beliebigen Punkt $J$ der Ellipse die vom Mittelpunkt $C$ genommene Abscisse $CD$ mit $u$, die Ordinate $DJ$ mit $y$, die Excentricität $CB = Cb$ mit e, die halbe große Axe $AC = aC$ mit $a$, die halbe kleine Axe $CE = Ce$ mit $b$, so ist

$$BO \times BG = Bb \times BN$$

oder

$$(BG - OG) \times BG = Bb \times (Bb + 2bD)$$

d. i.

$$(2a - 2Jb) \times 2a = 2e \times [2e + (2u - 2e)]$$

woraus der Brennstrahl

$$Jb = a - \frac{eu}{a}$$

hieraus der Brennstrahl

$$JB = a + \frac{eu}{a}$$

5. Ferner hat man

$$bJ^2 = bD^2 + DJ^2$$

oder

$$\left(a - \frac{e \cdot u}{a}\right)^2 = (u - e)^2 + y^2$$

woraus

$$y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

Nun ist

$$BE^2 = AC^2 = BC^2 + EC^2$$

d. i.

$$a^2 = e^2 + b^2$$

woraus

$$a^2 - e^2 = b^2$$

daher auch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

und die Ordinate

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - u^2}$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einem Scheitelpunkt $A$, bezeichnet die Abscisse mit $x$, so ist

$$x = a \pm u$$

also

$$u = \pm a \mp x$$

diesen Werth in den Ausdruck für $y^2$ gesetzt, giebt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$
$$= \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Man nennt $\frac{2b^2}{a}$ den Parameter der Ellipse, und bezeichnet diesen mit $p$, dann hat man

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$$

Da $\frac{2b^2}{a} = p$, so ist $b^2 = p\frac{a}{2}$

also auch $(2b)^2 = 2a \cdot p$

d. h. die kleine Axe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Parameter und der großen Axe.

6. Da $\angle BJF = \angle bJF$

so ist

$$BJ : bJ = BF : bF$$

also

$$BJ + bJ : bJ = BF + bF : bF$$

oder

$$2a : a - \frac{eu}{a} = 2e : DF - (u - e)$$

woraus

$$DF = \left(a - \frac{eu}{a}\right)\frac{e}{a} + u - e$$

also die Subnormale:

$$DF = u\frac{a^2 - e^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}u$$

7. Ferner ist

$$\triangle FJD \sim \triangle JPD$$

daher

$$DF : DJ = DJ : PD$$

oder

$$DF \cdot DP = DJ^2$$

d. h. Subnormale × Subtangente = dem Quadrat der Ordinate; und die Subtangente

$$DP = \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}u} = \frac{a^2 - u^2}{u}$$

8. Es ist

$$FJ^2 = DJ^2 + DF^2 = y^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}u\right)^2$$

mithin

$$FJ^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - u^2 + \frac{b^2}{a^2}u^2\right]$$

woraus die Normale

$$FJ = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)u^2}$$

9. Es ist endlich

$$JP^2 = DJ^2 + DP^2 = y^2 + \left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2) + \left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2$$

woher die Tangente

$$JP = \frac{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^4 - a^2u^2 + b^2u^2)}}{a \cdot u}$$

10. Die Brennpunkte sind übrigens die einsigen Punkte in der Ebene der Ellipse, von denen aus die geraden Verbindnngslinien mit Pnnkten der Cnrve rationale Fnnctionen von $u$ liefern. Wie bei der Parabel erweist es sich, dafs Pnnkte aufserhalb der Axe von dieser Eigenschaft gar nicht existiren.

Nimmt man dan beliebigen Punkt $J$ in der Ellipse, setst $DJ = y$, $CD = u$, und einen beliebigen Punkt $F$ in der Axe im Abstand $CF = s$ vom Mittelpunkt, so hat man

$$FJ^2 = FD^2 + DJ^2 = (u - s)^2 + y^2$$

$$= u^2 + s^2 - 2us + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

$$= b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}u^2 - 2us + s^2$$

Soll nnn $FJ$ rational zu $u$ werden, so mufs der letzte Ausdruck ein vollständiges Qnadrat sein, also von der Form

$$(\pm Au \mp B)^2 = A^2u^2 - 2ABu + B^2$$

Hieraus ergiebt sich

$$A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$B = \sqrt{b^2 + s^2}$$

nnd

$$AB = s$$

hierans

$$s = AB = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \sqrt{b^2 + s^2}$$

oder

$$s^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot (b^2 + s^2)$$

woraus

$$s = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{BE^2 - CE^2} = \pm Cb$$

d. h. der Punkt $F$ für rationale Functionen $FJ$ von $u$ liegt entweder in $b$ oder $B$, nnd nur beide Brennpnnkte haben die verlangte Eigenschaft.

Für die Ellipsen, als Bahnen der Weltkörper um die Sonne und um Planeten heifst derjenige B., in welchem die anziehende Sonne oder der den Mond anziehende Planet sich befindet, der Kraftpunkt, Centralpunkt, der Mittelpnnkt der Kräfte; der andere B. wird der zweite oder der obere B. genannt. Die Snmme deren Entfernungen von irgend einem Punkt des Umfangs ist = der grofsen Axe.

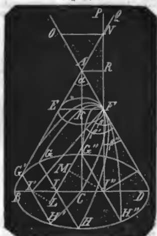
**Brennpunkt der Hyperbel.** Die Hyperbel ist eine Kegelschnittslinie, welche entsteht, wenn man Fig. 71, pag. 83 (Art.: Apollonische Parabel) den Durchschnittspunkt $F$ als Scheitel beibehält, einen Punkt in $BD$ für die Richtnng der Axe aber rechts von $J$ nach $D$ hin verlegt, während ein zweiter Axenpunkt von $J$ nach $B$ hin eine Ellipse giebt, nämlich eine geschlossene Curve, indem der letztbezeichnete Durchschnitt verlängert die Seite $AB$ nnterhalb $BD$ in einem zweiten Scheitel trifft. Ein von $GH$ nach $D$ hin verlegter Schnitt, die Hyperbel, trifft nnterhalb $BD$ keine Seite des Kegels, sie geht bis ins Unendliche fort; deren Ebene aber über $F$ hinaus verlängert, schneidet den über $A$ mit den Seiten $BA$ nnd $DA$ verlängerten Kegel, nnd bildet dort eine zweite Hyperbel, welche der ersten ≅ ist.

Die Hyperbel hat nun keinen eigentlichen B., keinen Punkt wie die Parabel, in den alle ∦ mit der Axe anf die hohle Linie fallenden Strahlen durch Reflexion vereinigt werden, oder wie die Ellipse, welche zwei B. hat, von denen jeder die Strahlen in sich vereinigt, welche von dem anderen ansgehend, in jedem Pnnkt der Curve reflectirt werden.

Jeder von irgend einem Punkt der hyperbolischen Linie in den sogenannten B. reflectirende Strahl rührt von einem einfallenden Strahl her, der eine andere Lage gegen die Axe hat, nnd zwar eine nm so gröfsere Neigung mit derselben, je weiter der Hyperbelpnnkt von dem Scheitel sich befindet. Stellt man also eine Leuchte in den B., so wird die Hyperbel deren Strahlen dnrch Reflexion zerstreuen, nnd der B. ist optisch betrachtet ein Zerstreunngspunkt; dagegen haben sämmtliche einfallende Strahlen, die in den B. reflectiren, eine Lage, dafs sie verlängert in einen Pnnkt ansammenlaufen, der hinter dem Scheitel in deren verlängerter Axe liegt, und der in der entgegengesetzt entstehenden Hyperbel die gleiche Lage mit dem B. der ersten Hyperbel hat. Diese beiden Punkte heifsen nnn die Brennpunkte der Hyperbel. (S. das Nähere in dem folgenden Artikel.)

**Brennpunkte der Kegelschnitte.** Die für die Optik so sehr nnterschiedenen Eigenschaften der 3 Kegelschnittslinien, nnd wenn man den Kreis als 4ten Kegelschnitt hinzn nimmt, dessen B. im Mittelpunkt liegt, so wie deren, in dem Art: „Bahn der Weltkörper" schon gedachten Bedeutnng in der Himmelsmechanik giebt Veranlassung, den Grund deren Abweichungen, der in dem eigenthümlichen Verhältnifs zwischen den Ordinaten nnd Abscissen liegt, hier aufzusuchen.

Fig. 257.



Es sei *ABD* ein Kegel, der von der Spitze *A* aus nach beiden Seiten in's Unendliche verlängert gedacht werden kann. *ABD* sei ein Stück desselben als gerader Kegel abgeschnitten, d. h. $AB = AD$, und zugleich *BGDH* eine Kreisebene. Das geradlinige $\triangle ABD$ sei ein Axendreieck des Kegels, also *AC* die Axe des Kegels, *BD* der Durchmesser des Grundkreises.

Nimmt man einen beliebigen Scheitelpunkt *F*, so ist ein senkrecht auf $\triangle ABD$ geführter Schnitt

nach $EF \ddagger BD$ ein Kreis,

„ $FJ \ddagger AB$ eine Parabel,

„ $FJ'$ wo $J'B < EF$ eine Ellipse,

„ $FJ''$ wo $J''B > EF$ eine Hyperbel.

Bezeichnet man $\angle BAD$ mit $\alpha$, $\angle DFJ$ mit $\beta$, $\angle DFJ'$ mit $\beta'$, $\angle DFJ''$ mit $\beta''$, die Linie *EF* mit *k*, so lassen sich die Coordinatengleichungen für die gedachten Curven finden, wie folgt:

A. Die Parabel. Zieht man *GH* durch *J* normal auf *BD*, und führt durch die beiden Linien *FJ* und *GH* eine Ebene, so schneidet diese den Kegelmantel in der parabolischen Linie *GFH*. Setzt man den festen Scheitel *F* als Anfangspunkt der Coordinaten, *FJ* als Abscisse $= x$, so sind die rechtwinkligen Ordinaten *JG*, *JH* einander gleich, weil *BD* der Durchmesser des Kreises *BGDH* ist, und man hat

$$JG^2 = BJ \cdot DJ$$

$$BJ \text{ ist } = EF = k$$

Fällt man von *J* auf *FD* ein Loth, so ist dieses $= FJ \cdot \sin JFD = x \sin \beta = x \sin \alpha$, und auch $= DJ \cdot \sin FDJ = DJ \cos \frac{\alpha}{2}$ daher

$$x \sin \beta = DJ \cos \frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$DJ = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$$

also

$$GJ^2 = y^2 = 2k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x$$

Die für die hier angenommene Parabel constante Gröfse $2k \sin \frac{\alpha}{2}$ heifst der Parameter, und man hat allgemein

$$y^2 = p \cdot x$$

Das Quadrat der Ordinate ist also = dem Rectangel aus dem Parameter und der Abscisse, und aus diesem Grunde ist die Curve Parabel (Vergleichungs-, Gleichsetzungslinie) genannt worden.

B. Die Ellipse. $G'H'$ durch $J'$ normal *BD* giebt die elliptische Linie

$$G'FH';\ FJ' = x;\ J'G' = J'H' = y$$

daher

$$y^2 = BJ' \cdot DJ'$$

Es ist

$$BJ' = BJ - JJ' = k - JJ'$$

Fällt man ein Loth $J'L$ auf die verlängerte *FJ*, so ist

$$J'L = FJ' \sin J'FJ = JJ' \cdot \sin J'JL$$

$$\angle J'FJ = \angle J'FD - \angle JFD = \beta' - \alpha$$

$$\angle J'JL = \angle FJD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

daher

$$J'L = x \sin(\beta' - \alpha) = JJ' \cos \frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$JJ' = \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} x$$

Denkt man sich ferner ein Loth von $J'$ auf *DF*, so ist dieses

$$= FJ' \cdot \sin J'FD = DJ' \sin J'DF$$

$$= x \sin \beta' = DJ' \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

woraus

$$DJ' = \frac{\sin \beta'}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot x$$

daher

$$y^2 = \left(k - \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} x\right) \cdot \frac{\sin \beta'}{\cos \frac{\alpha}{2}} x$$

$$= k \frac{\sin \beta'}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot x - \frac{\sin (\beta' - \alpha) \sin \beta'}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} x^2 \quad (1)$$

Setzt man wieder den Coefficient von $x$, hier

$$k \frac{\sin \beta'}{\cos \frac{\alpha}{2}} = p$$

als Parameter, so hat man

$$y^2 = px - \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} px^2 \quad (2)$$

Das Quadrat der Ordinate ist also kleiner als das Rectangel aus dem Parameter und der Abscisse, daher der Name Ellipse (Verminderungslinie, Mangellinie).

Für

$$x = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin (\beta' - \alpha)} k$$

wird $y = 0$, und dies $x$ ist die grofse Axe der Ellipse.

Für

$$x = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin (\beta' - \alpha)} k - x'$$

entsteht aus 2

$$y_1^2 = px \left[1 - \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin (\beta' - \alpha)} k - x' \right)\right]$$

$$= px \left[1 - 1 + \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} x' \right] = px \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} x'$$

$$= p \left[ \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin (\beta' - \alpha)} k - x' \right] \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} x'$$

$$= px' - p \frac{\sin (\beta' - \alpha)}{k \cos \frac{\alpha}{2}} (x')^2$$

mithin ist $x' = x$ und die Ordinaten von beiden Scheiteln aus, bei gleichen Abscissen gleich grofs, und die Ellipse besteht von beiden Scheiteln aus bis zur mittleren Ordinate bei der Abscisse

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin (\beta' - \alpha)} k$$

aus 2 congruenten Hälften.

C. Die Hyperbel. $G''H''$ durch $J''$ normal $BD$, giebt die hyperbolische Linie $G''FH''$; $FJ'' = x$; $J''G'' = J''H'' = y$ daher

$$y^2 = BJ'' \cdot DJ''$$

Es ist

$$BJ'' = BJ + JJ'' = k + JJ''$$

Fällt man ein Loth $J''M$ von $J''$ auf $FJ$, so ist

$$J''M = FJ'' \cdot \sin J''FJ = J''J \sin J''JF$$

$$\angle J''FJ = \angle DFJ - \angle DFJ'' = \alpha - \beta''$$

$$\angle J''JF = \angle FDB = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

daher

$$J''M = x \sin (\alpha - \beta'') = JJ'' \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$JJ'' = \frac{\sin (\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} x$$

Denkt man sich ferner ein Loth von $J''$ auf $DF$, so ist dieses

$$= FJ'' \cdot \sin \beta'' = DJ'' \cdot \sin J''DF$$

$$= x \sin \beta'' = DJ'' \cos \frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$DJ'' = \frac{\sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot x$$

daher

$$y^2 = \left(k + \frac{\sin (\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} x\right) \cdot \frac{\sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} x$$

$$= k \frac{\sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} x + \frac{\sin (\alpha - \beta'') \sin \beta''}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} x^2 \quad (1)$$

Setzt man wieder den Coefficient von $x$, hier

$$k \frac{\sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} = p$$

als Parameter, so hat man

$$y^2 = px + \frac{\sin (\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} \frac{p}{k} x^2 \quad (2)$$

Das Quadrat der Ordinate ist also gröfser, als das Rectangel zwischen dem Pa-

rameter und der Abscisse; daher der Name Hyperbel (Vermehrungslinie, Ueberschufslinie).

Verlängert man die Axe $FJ''$ der Hyperbel rückwärts, so schneidet sie den Mantel des entgegengesetzten Kegels in $N$, zieht man $NO \mp EF$, bezeichnet $NO$ mit $k_1$; $\angle PNQ$ mit $\beta_1$, so hat man

$$\angle ANF = \angle PNQ = \beta_1 = \alpha - \beta''$$

$$\angle OAN = \alpha$$

$$AF : AN = EF : NO = k : k_1$$

daher

$$k_1 = \frac{AN}{AF} \cdot k \qquad (3)$$

Nun ist

$$AF \cdot \sin AFN = AN \cdot \sin ANF$$

oder

$$AF \sin \beta'' = AN \cdot \sin(\alpha - \beta'')$$

daher

$$\frac{AN}{AF} = \frac{\sin \beta''}{\sin(\alpha - \beta'')} \qquad (4)$$

und

$$k_1 = \frac{\sin \beta''}{\sin(\alpha - \beta'')} k \qquad (5)$$

Ganz analog mit der Gl. für $y^2$ der ersten Hyperbel mufs bei der Abscisse $x$, wenn die Ordinate mit $y_1$ bezeichnet wird, die Gl. für $y_1^2$ sein.

$$y_1^2 = k_1 \frac{\sin \beta_1}{\cos \frac{\alpha}{2}} x + \frac{\sin(\alpha - \beta_1) \sin \beta_1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} x^2$$

für $k_1$ und $\beta_1$ die eben gefundenen Werths gesetzt, giebt

$$y_1^2 = \frac{\sin \beta''}{\sin(\alpha - \beta'')} k \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} x + \frac{\sin(\alpha - \alpha + \beta'') \sin(\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} x^2$$

reducirt giebt

$$y_1^2 = \frac{\sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} x + \frac{\sin(\alpha - \beta'') \sin \beta''}{\cos \frac{\alpha}{2}} x^2$$

woraus hervorgeht, dafs für einerlei $x$, $y_1 = y$ und dafs beide Hyperbeln $\cong$ sind.

3. Wie bei der Ellipse die gerade Linie zwischen den Scheiteln die grofse Axe genannt wird, so nennt man auch bei der Hyperbel die Linie $FN$ zwischen beiden Scheiteln die grofse Axe, besser die Hauptaxe. Man erhält dieselbe, wenn man von $F$ auf $NE$ ein Loth gefällt denkt, aus der Gleichung

$$EF \cdot \sin AEF = FN \sin ENF$$

oder

$$k \cos \frac{\alpha}{2} = FN \sin(\alpha - \beta'')$$

woraus

$$FN = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin(\alpha - \beta'')} k \qquad (6)$$

und wenn man dieselbe, wie bei der Ellipse, mit $2a$ bezeichnet, so ist

$$k = 2 \frac{\sin(\alpha - \beta'')}{\cos \frac{\alpha}{2}} a$$

diesen Werth in Gl. 2, No. 2 $C$ gesetzt, giebt

$$y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$$

Bezeichnet man ferner, wie bei der Ellipse, mit $2b$ eine kleine Axe, besser Nebenaxe, wenn

$$2a : 2b = 2b : p$$

so dafs

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

so hat man

$$y^2 = \frac{b^2}{\frac{a}{2}} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

4. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Hauptaxe, bezeichnet hier wie bei der Ellipse die Abscissen mit $u$, so ist

$$u = a + x$$

also

$$x = u - a$$

daher

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} [2a(u - a) + (u - a)^2]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

Für gleiche und entgegesetzte Werthe von $u$ gehören also gleiche Ordinaten, und beide Hyperbeln sind $\cong$

5. Nachdem nun die Kegelschnittslinien construirt und mit einander verglichen

worden, ist deren Brennpunkte zu gedenken. Die B. der Parabel und der Ellipse sind in besonderen Artikeln schon speciell behandelt, und es soll dies nun noch für die Hyperbel geschehen.

Nimmt man von der Mitte $M$ der Hauptaxe $Aa$ aus zu beiden Seiten $u = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erhält man die Brennpunkte $B$, $b$; für diese Punkte sind die Ordinaten $y$ durch

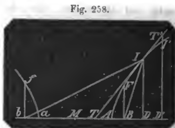
$$y_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 + b^2 - a^2)$$

gegeben, und

$$y_1 = \frac{b^2}{a} = \tfrac{1}{2}p$$

wie bei der Parabel und der Ellipse.

Fig. 258.




Die Brennstrahlen nach irgend einem Punkt $J$ der ersten Hyperbel bilden mit deren Tangente $JT$ die gleichen Winkel $bJT$ und $BJT$. Denn bezeichnet man die Abscisse $MD$ mit $u$, $JD$ mit $y$, so ist

$$bJ^2 = bD^2 + DJ^2 = (u + \sqrt{a^2 + b^2})^2 + \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

woraus durch Reduction

$$bJ = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} + a \tag{1}$$

$$BJ^2 = BD^2 + DJ^2 = (u - \sqrt{a^2 + b^2})^2 + \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

woraus

$$BJ = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} - a \tag{2}$$

folglich

$$bJ + BJ = \frac{2u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

und

$$bJ - BJ = 2a \tag{4}$$

Ist nun $JT$ so gezogen, dafs $\angle\, bJT = \angle\, BJT$, so hat man

$$bJ : BJ = bT : BT$$

also auch

$$bJ + BJ : bJ - BJ = bT + BT : bT - BT$$

oder mit Hülfe von Gl. 1 und 2:

$$\frac{2u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} : 2a = 2\sqrt{a^2 + b^2} : bT - BT$$

woraus

$$bT - BT = \frac{2a^2}{u}$$

hierzu

$$bT + BT = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

giebt

$$bT = \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{u} \tag{5}$$

und

$$BT = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{u} \tag{6}$$

Nun kommt es noch darauf an, zu erweisen, dafs $JT$ die Tangente von $J$ ist. Denkt man sich von $M$ aus eine zweite Abscisse $u_1$ kleiner oder gröfser als $u$, bezeichnet den Endpunkt mit $D'$, errichtet das Loth $D'T'$ bis in die verlängerte $TJ$, so hat man nur zu zeigen, dafs $D'T'$ immer gröfser ist, als die zu $D'$ gehörige Ordinate der Hyperbel. Man hat aber

$$TD : TD' = DJ : D'T'$$

oder

$$TB + BD : TB + BD' = y : D'T'$$

Nun ist nach Gl. 4

$$TB = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{u}$$

$$BD = MD - MB = u - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BD' = MD' - MB = u_1 - \sqrt{a^2 + b^2}$$

demnach hat man die Proportion

$$u - \frac{a^2}{u} : u_1 - \frac{a^2}{u} = \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2} : D'T'$$

woraus

$$D'T' = \frac{uu_1 - a^2}{u^2 - a^2} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}$$

Die Ordinate in

$$D' = y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{u_1{}^2 - a^2}$$

daher

$$D'T' : y_1 = uu_1 - a^2 : \sqrt{(u^2 - a^2)(u_1{}^2 - a^2)}$$

oder

$$(D'T')^2 : y_1{}^2 = (uu_1 - a^2)^2 : (u^2 - a^2)(u_1{}^2 - a^2)$$
$$= u^2u_1{}^2 + a^4 - 2a^2uu_1 : u^2u_1{}^2 + a^4 - a^2(u^2 + u_1{}^2)$$

Die beiden Hinterglieder stimmen nur in dem dritten Gliede nicht überein, und es kommt also nur darauf an, wie

$-2a^2uu_1$ zu $-a^2(u^2+u_1^2)$ oder wie $2uu_1$ zu $u^2+u_1^2$ sich verhält.

Es ist aber

$$u^2+u_1^2 > 2uu_1$$

denn ist $u > u_1$
so ist $u - u_1$ positiv,
und ist $u < u_1$
so ist $u_1 - u$ positiv,
also

$$(u-u_1)^2 = (u_1-u)^2 = u^2+u_1^2-2uu_1$$

positiv,
oder $u^2+u_1^2-2uu_1 > 0$
woher

$$u^2+u_1^2 > 2uu_1$$

folglich

$$-2a^2uu_1 > -a^2(u^2+u_1^2)$$

nud folglich liegt jeder Punkt der geraden Linie $TT'$ aufserhalb der Hyperbel, und $TT'$ ist die Tangente in $J$.

Wie bei der Parabel nnd der Ellipse findet man anch bei der Hyperbel, dafs die Brennpunkte die einzigen Punkte sind, deren gerade Verbindungsliuien mit den Puukten der Curve rationale Functionen der Abscisse sind.

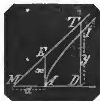
6. Aus No. 5 haben sich folgende Gesetze ergeben:

A. Die Differenz zweier zusammengehörender Brennstrahlen wie $BJ - bJ$ ist constant und = der Hauptaxe = $2a$.

B. Da nach Gl. 1 und 2 der Strahl von dem aufserhalb belegenen B. immer gröfser ist als der vom inneren B. herrührende, so ist anch immer $bT > BT$ oder $aT > AT$, nud je weiter der Hyperbelpnnkt vom Scheitel liegt (je gröfser $u$ wird), desto näher rückt $T$ an $M$. $M$ ist die Grenze und der Durchschnittspunkt für die Tangente eines $\infty$ weit gelegenen Hyperbelpunkts, d. h. der Asymptote. Diese giebt also, da der aus $B$ gezeichnete Strahl mit ihr $\neq$ läuft, die Grenze der Richtungen an, in welchen die aus $B$ einfallenden Strahlen durch Zurückwerfung zerstreut werden.

Es sei $MT$ die Asymptote, so ist die Lage derselben bestimmt, wenn man das im Scheitel bis in $MT$ errichtete Loth $AE$ kennt. Man nehme eine beliebige

Fig. 259.




Abscisse $MD = u$, errichte das Loth $DT$, setze $DJ = y$, $DT = s$, $AE = x$, so hat man

$$a : x = u : s$$

woraus

$$s = \frac{u}{a}x$$

nnd

$$s^2 = \frac{u^2}{a^2}x^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2-a^2) = \frac{u^2}{a^2}b^2 - b^2$$

folglich

$$s^2 - y^2 = \frac{u^2}{a^2}(x^2-b^2) + b^2$$

nnd

$$\frac{(s^2-y^2-b^2)a^2}{u^2} = x^2 - b^2$$

für $u = \infty$ ist $s^2 - y^2 = 0$ uud es wird zugleich

$$\frac{-b^2a^2}{u^2} = 0 = x^2 - b^2$$

worans $x = b$ = der halben Nebenaxe.

Die Grenze des Zerstreuungswinkels $\varphi$ der Lichtstrahlen bestimmt sich also durch

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}$$

**Brennraum**, ist der im Art.: Brennglas gedachte Kreis von dem Halbmesser $ss'$ Fig. 250, pag. 414; $\angle s'Ks$ ist 16 Minuten = dem scheinbaren Halbmesser der Sonne, $ss' = Ks \cdot tg\,16' = 0{,}0046542\,Ks = \frac{1}{215}Ks$, d. h. der Halbmesser des B. ist $\frac{1}{215}$ der Brenuweite.

**Brennspiegel** sind Spiegel, welche durch Reflexion der Sonnenstrahlen zünden; am vorzüglichsten eignet sich hierzu der parabolische Spiegel, bei welchem die Hitze im Breunpunkt entsteht (s. d.).

Man bildet den Spiegel, wenn man eine Parabel (als Chablone) um ihre Axe dreht.

Anch ebene Spiegel hat man so mit einander vereinigt, dafs sie einen gemeinschaftlichen Brennpunkt gebildet haben; da aber ein ebener Spiegel nur immer einen Strahl auf einen Breunpunkt werfen kann, und somit die Strahlen der Sonnenscheibe nur einfach auf den beabsichtigten Brennranm wirft, so ist ein aus ebenen Spiegeln bestehender Brennspiegelapparat nnr von Wirkung, wenn möglichst viel Spiegelflächen mit einander vereinigt werden.

Sind $SA \ldots SM$ parallele Sonnenstrahlen, und ist $AB$ als Brennweite bestimmt, so würde ein Spiegel $M$ eine solche Lage haben müssen, dafs das Einfallsloth $CM$ mit $SM$ und $BM$ gleiche Winkel bildet, nnd dies gilt von allen zwischen $A$ und $M$ noch aufzustellenden Spiegeln zu Ver-

stärkung der Hitze in *B*. Ein Vortheil eines solchen freilich complicirten Apparats besteht darin, dafs man die Brennweite *AB* beliebig grofs bestimmen kann.

Fig. 260.

Sollte die Erzählung wahr sein, dafs Archimedes des römischen Feldherrn Marcellus Schiffe während der Belagerung von Syrakus durch Brennspiegel angezündet hat, so ist bei der grofsen Entfernung des Feindes, also bei einer sehr grofs erforderlichen Brennweite nur ein aus mehreren ebenen Spiegeln zusammengesetzter Brennspiegel denkbar, den er dazu gebaut hat.

Aus dem Art.: Brennpunkt ist übrigens klar, dafs, um solchen Apparat zu construiren, die ebenen Spiegel um einen mittleren Spiegel herum facettenartig symmetrisch gruppirt werden, dafs die Mitten sämmtlicher Spiegel in einer hohlen Parabelfläche liegen, und dafs die Spiegelflächen selbst berührende Ebenen an derselben bilden müssen. Der mittlere Spiegel bildet den Scheitel der parabolischen hohlen Umdrehungsfläche, und der Parameter derselben mufs = der 4fachen Brennweite sein.

Bei dem heutigen hohen Stande der Technik würde ein metallener Brennspiegel von 5 Fufs Durchmesser, aus einer hohlen Parabelfläche bestehend, für eine Brennweite von 50 Fufs wohl auszuführen sein.

Man hat die Ordinate

$$y = 2{,}5 \text{ Fufs}$$

den Parameter

$$p = 4 \cdot 50 = 200 \text{ Fufs}$$

folglich die zu $y$ gehörende gröfste Abscisse, die Tiefe des Spiegels

$$x = \frac{y^2}{p} = \frac{6{,}25}{200} \text{ Fufs} = 0{,}375 \text{ Zoll.}$$

**Brennstrahl** ist die gerade Verbindungslinie zwischen dem Brennpunkt und einem Punkt der krummen Linie oder der krummen Fläche, zu welcher der Brennpunkt (s. d.) gehört. In der Optik ist es jeder durch ein Brennglas nach dem Brennpunkt gebrochene und durch einen Brennspiegel nach dem Brennpunkt zurückgeworfene Lichtstrahl.

**Brennweite** ist der Abstand des Brennpunkts von dem Mittel des Brennglases oder von dem Scheitel des Brennspiegels.

**Briggische Logarithmen** sind die Exponenten von Potenzen, deren Wurzel die Zahl 10 ist. Der b. Logarithmus von 1000 ist 3, weil $10^3 = 1000$ ist; ebenso ist der b. L. von $2 = 0{,}30103$ weil $10^{0{,}30103}$ d. i. 10 zur 0,30103ten Potenz erhoben $= 2$ ist. Denkt man sich eine tabellarisch geordnete Zusammenstellung aller b. L. der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis zu einer sehr hohen Zahl, wie sie wirklich bis 108000 existiren, und welche Heinrich Briggs zu berechnen begonnen hat, so gewährt dieselbe beim praktischen Rechnen einen überaus grofsen Nutzen durch Abkürzung der Arbeit:

A. Hat man zwei Zahlen $a$ und $b$ mit einander zu multipliciren, so addirt man deren L. $\alpha$, $\beta$, und hat in der dieser Summe $\alpha + \beta$ als L. entsprechenden Zahl das verlangte Product.

Denn es ist

$$a = 10^\alpha;\ b = 10^\beta$$

Nun ist

$$ab = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 10^{\alpha + \beta}$$

folglich $ab$ die Zahl, deren L. $= \alpha + \beta$ ist.

B. Hat man eine Zahl $a$ durch die Zahl $b$ zu dividiren, so subtrahirt man deren L. $\beta$ von $\alpha$, und hat man in der dieser Differenz $\alpha - \beta$ als L. entsprechenden Zahl den verlangten Quotient.

Denn

$$\frac{a}{b} = \frac{10^\alpha}{10^\beta} = 10^{\alpha - \beta}$$

folglich $\frac{a}{b}$ die Zahl, deren L. $= \alpha - \beta$ ist.

C. Hat man eine Zahl $a$ zur $n$ten Potenz zu erheben, so multiplicirt man den L. $\alpha$ von $a$ mit $n$, und hat in der diesem Product $n \cdot \alpha$ als L. entsprechenden Zahl die verlangte Potenz.

Denn

$$a^n = (10^\alpha)^n = 10^{\alpha n}$$

D. Hat man aus einer Zahl $a$ die $n$te Wurzel zu ziehen, so dividirt man den L. $\alpha$ von $a$ durch $n$, und hat in der diesem Quotient als L. entsprechenden Zahl die verlangte Wurzel.

Denn

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{n}}$$

E. Hat man zu berechnen, die wievielste Potenz eine Zahl $b$ von der Zahl $a$ ist, also $x$ zu finden, wenn $a^x = b$ ist, so ist $x = \frac{\beta}{\alpha}$ wenn $\beta$ der L. von $b$ und $\alpha$ der L. von $a$ ist.

Denn

$$a^x = (10^\alpha)^x = 10^{\alpha x}$$

und

$$b = 10^\beta$$

Daher ist

$$10^{\alpha x} = 10^\beta$$

und

$$10^x = 10^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

woher

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

F. Desgleichen findet man für $\sqrt[x]{a} = b$ $x = \frac{a}{\beta}$, weil aus $\sqrt[x]{a} = b$ schon $a = b^x$ hervorgeht.

Als Beispiel für alle 6 Fälle sei auszurechnen

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \times 29^3}{347^5}}$$

ein Exempel, welches ohne Hülfe der Logarithmen sehr viel Zeit und Mühe kosten würde. In den Logarithmentafeln findet man

$$\begin{aligned}
&log\ 3520 = 3{,}546\ 5427 \\
&4\ log\ 3520 = && 14{,}186\ 1708 \\
&log\ 29\ = 1{,}462\ 3980 \\
&3\ log\ 29\ = && 4{,}387\ 1940 \\
&log\ (3520^4 \times 29^3) = && 18{,}573\ 3648 \\
&log\ 437\ = 2{,}648\ 4814 \\
&5\ log\ 437^5 = && 13{,}242\ 4070 \\
&log\ \frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5} = && 5{,}330\ 9578 \\
&log\ \sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = && 0{,}761\ 5654
\end{aligned}$$

$num\ log\ 0{,}7615654 = 5{,}77518$

d. h.

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = 5{,}77518$$

Wäre noch aufgegeben, zu bestimmen, die wievielste Wurzel dieser Ausdruck von 30 ist, ist also $x$ zu bestimmen aus der Aufgabe

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = \sqrt[x]{30}$$

so hat man

$$log\ \sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = 0{,}761\ 5654$$

$$log\ 30 \quad = 1{,}477\ 1213$$

und es ist

$$x = \frac{1477\ 1213}{761\ 5654}$$

Zur Ausführung dieser Division kann man sich wiederum der L. bedienen, und man erhält

$$\begin{aligned}
log\ 1477\ 1213 &= 7{,}169\ 4162 \\
log\ 761\ \ 5654 &= 6{,}881\ 7072 \\
log\ x &= 0{,}287\ 7090
\end{aligned}$$

$$x = num\ log\ 0{,}287\ 7090 = 1{,}93957$$

2. Anweisung zum Gebrauch der Logarithmentafeln ist jeder derselben vorangestellt, jedoch will ich noch Einiges über den Gebrauch der Proportionaltheile hinzufügen, die P. P. (partes prop.) bezeichnet sind.

Es sind in den Tafeln nur die L. bis zu 5stelligen Zahlen, und zwar bis zur höchsten derselben: 99999 angegeben.

Zur Auffindung des *Log.* von 147 71213 der obigen Aufgabe hat man in den Tafeln

$$\begin{aligned}
&log\ 14771 &&= 4{,}169\ 4099 \\
\text{oder}\quad &log\ 14771000 &&= 7{,}169\ 4099 \\
\text{und}\quad &log\ 14772000 &&= 7{,}169\ 4393 \\
& &&\text{Differenz } 0{,}0000294
\end{aligned}$$

Nun verhalten sich nahe die Differenzen der *Log.* zweier von einander wenig unterschiedener Zahlen wie die Differenzen der Zahlen selbst; also in vorliegendem Falle:

$$log\ 14772000 - log\ 14771000 : log\ 14771213 - log\ 14771000$$
$$= 14772000 - 14771000 : 14771213 - 14771000$$

d. i.: $0{,}0000294 : log\ 14771213 - 7{,}1694099 = 1000 : 213$

und es ist nahe: $log\ 14771213 = \frac{213 \cdot 0{,}0000294}{1000} + 7{,}1694099$

$$= 7{,}1694099$$
$$+ 0{,}0000062622$$

und wenn man nur 7 Decimalstellen nehmen will . . . . . . . . . . . . $= 7{,}1694162$

In der Rubrik: P. P. ist nun die Differenz 0,0000294 angegeben

mit $\underline{294}$ und darunter

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 = | 29 | nämlich | $\frac{100}{1000} \cdot 294 = 29,4$ |
| 2 = | 59 | „ | $\frac{200}{1000} \cdot 294 = 58,8$ |
| 3 = | 88 | „ | $\frac{300}{1000} \cdot 294 = 88,2$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| 9 = | 265 | „ | $\frac{900}{1000} \cdot 294 = 264,6$ |

Um nun mit Hülfe dieser in der Tabelle befindlichen Proportionaltheile den L. zu finden, suche zuerst die Differenz der L. 1694099 – 1694393, wie sie in den Tafeln gefunden werden, = 294, um in den P. P. die richtige Columne mit der Ueberschrift 294 zu erhalten.

Nimm *log* 141771 (00) = 7,1694099
die nächste Zahl 2 der noch
fehlenden 213 giebt 59
die folgende Zahl 1 giebt 29
„ letzte „ 3 „ 88
Summa 7,169416178
wofür man 7,1694162 nimmt.

Die obige wirkliche Multiplication

$\frac{213}{100} \cdot 294$ giebt . . . . . . 62622
die Proportionaltheile geben . . 6178

Der Unterschied ist nicht unbedeutend, und es ist gut, wenn man das Ergebnifs aus den P. P. durch wirkliche Multiplication controlirt.

3. In der Aufgabe No. 1 war $x$ aus seinem $Log = 0,287\ 7090$ zu bestimmen. In den Tafeln findet man

*log* = (0,)2876898; *num* = 1,9395

*log* = (0,)2877122; *num* = 1,9396

Will man noch mehrere Decimalstellen, so hat man nach dem obigen Näherungsgesetz

$$2877122 - 2876898 : 2877090 - 2876898$$
$$= 1,9396 - 1,9395 : x - 1,9395$$

oder

$$224 : 192 = 0,0001 : x - 1,9395$$

woraus

$$x = \frac{192 \cdot 0,0001}{224} + 1,9395$$
$$= 0,000085714 + 1,9395 = 1,9395857(14)$$

Unter den P. P. steht wieder die Zahl

| | | 224 | | |
|---|---|---|---|---|
| und darunter | 1 | 22 | eigentlich | 22,4 |
| | 2 | 45 | „ | 44,8 |
| | 3 | 67 | „ | 67,2 |
| | 4 | 90 | „ | 89,6 |
| | 5 | 112 | „ | 112,0 |
| | 6 | 134 | „ | 134,4 |
| | 7 | 157 | „ | 156,8 |
| | 8 | 179 | „ | 179,2 |
| | 9 | 202 | „ | 201,6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gegeben ist | *log* = 0, 287 7090 | | |
| | *log* = (0,)287 6898 | giebt | 1,9395 |
| Differenz | 0, 000 0192 | | |
| In P. P. | 179 | „ | 0,00008 |
| Differenz | 130 | | |
| In P. P. | 112 | „ | 0,000005 |
| Differenz | 180 | | |
| In P. P. | 179 | „ | 0,0000008 |
| $x$ = | | | 1,9395858 |

Die letzte Decimale ist also von der durch wirkliche Division erhaltenen schon verschieden.

4. Stellt man die Zahlen, deren *log* die natürlich auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3 ... sind zusammen, also $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ u. s. w., so erhält man eine geometrische Reihe, in der die *log* die Stellenzahlen sind, nämlich

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 ... |

Das 3te Glied der Reihe ist das 4te, dividirt durch 10; das 2te Glied ist das 3te, dividirt durch 10; überhaupt das $n$te Glied ist $= \frac{1}{10}$ mal dem $(n+1)$ten Gliede, und die Stellenzahlen werden von rechts nach links immer um eine Einheit kleiner.

Setzt man daher die obige Reihe nach links weiter fort, so erhält man die Reihe der Zahlen

$$\tfrac{10}{10} = 1;\ \tfrac{10}{100} = 0,1;\ \tfrac{10}{1000} = 0,01$$

und deren Stellenzahlen 0, –1, –2, u. s. w. also:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *log* | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *num*: | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 | 10 | 100 | 1000 |

Will man nun Glieder einschalten, um auch die *log* der zwischen den dekadischen Zahlen liegenden Zahlen zu erhalten, so müssen diese in geometrischem Verhältnifs unter einander und mit den dekadi-

schen Gliedern der Reihe stehen. Z. B. ein Glied zwischen 1 und 10 würde $\sqrt[2]{10}$ sein, weil $1 : \sqrt{10} = \sqrt{10} : 10$, und dessen Stellenzahl oder *log* ist $= \frac{1}{2}$.

Gesetzt nun, man habe durch irgend ein arithmetisches Verfahren sämmtliche natürlich aufeinander folgende Zahlen eingeschaltet; also zwischen 1 und 10 die Zahlen 2, 3 .. bis 9, zwischen 10 und 100 die Zahlen 11 bis 99, zwischen 100 und 1000 die Zahlen 101 bis 999 u. s. w., so ist klar, dafs die Exponenten oder *log* der Zahlen von 1 bis 9 zwischen 0 und 1, die der Zahlen von 11 bis 99 zwischen 1 und 2, die der Zahlen zwischen 101 bis 999 zwischen 2 und 3 liegen. Drückt man die *log* durch Ganze und Decimalen aus, so ist demnach die Ganze der *log* für die Zahlen von 1 bis $9 = 0$, die Ganze der *log* für die Zahlen von 10 bis $99 = 1$, von 100 bis $999 = 2$; überhaupt eine Zahl von $n$ Ziffern hat einen *log*, dessen ganze Zahl $= n - 1$ ist.

Nach den schon berechneten Tafeln ist der *log* von 35745 $= 4{,}5532153$

Nun ist nach No 1, B:

$$\log \frac{35745}{10} = \log 3574{,}5 =$$
$$\log 35745 - \log 10 = 3{,}5532153$$
$$\log \frac{35745}{100} = \log 357{,}45 =$$
$$\log 35745 - \log 100 = 2{,}5532153$$

u. s. w.

Hat man demnach den *log* einer mit Decimalen versehenen Zahl zu bestimmen, so ist dieser = dem *log* der Zahl, das Komma fortgenommen, die dem *log* vorzuschreibende ganze Zahl richtet sich nach der Anzahl der Ziffern, welche die Ganzen der gegebenen Zahl haben.

Z. B. *log* 348,947 ist in den Decimalen $= \log 348\,947 = ?{,}5427595$.

Die Ganze der Zahl ist 348, diese besteht aus 3 Ziffern, und der *log* von 348,947 ist $= 2{,}5427595$.

Ist umgekehrt ein *log* gegeben $= 3{,}7690153$ so hat man in den Tafeln nur die Zahl 7690153 zu suchen, sie ist 58751. Da nun in dem *log* die ganze Zahl $= 3$ ist, so hat dessen Zahl eine 4ziffrige ganze Zahl, und die Zahl ist 5875,1.

Die ganze Zahl oder die Zahl vor dem Komma in einem *log* heifst die Kennziffer, Charakteristik, weil sie die Rangordnung der zugehörigen Zahl, den diese in der dekadischen Reihe einnimmt, kennen lehrt; die allen Zahlen derselben Stelle in den verschiedenen Rangordnungen gemeinschaftlichen Decimalen heifsen die Mantisse (Zugabe).

Alle Zahlen, die kleiner als 1 sind, haben negative *log*; man giebt aber die Mantisse positiv an, und setzt nur die Charakteristik negativ.

In dem obigen Beispiel ist

$$\log 35{,}745 = 1{,}553\ 2153$$
$$\log 3{,}5745 = 0{,}553\ 2153$$
$$\log 0{,}35745 = 0{,}553\ 2153 - 1$$
$$\log 0{,}035745 = 0{,}553\ 2153 - 2$$

u. s. w.

Ueberhaupt eine Zahl mit $n$ Nullen vor den Werth habenden Ziffern, die Null vor dem Komma mitgerechnet, giebt die Charakteristik $= -n$.

5. Interpolirt man nun in der Reihe zwischen 1 und 10 die Zahl $\sqrt[2]{10}$, so ist diese $= 3{,}16227766$, dessen $\log = 0{,}5$

Man hat also den *log* einer zwischen 1 und 10 liegenden ganzen Zahl nicht gefunden; allein man hat doch den *log* einer Zahl, nämlich der grofsen Zahl $316227766 = 8{,}5$.

Eine Zahl zwischen 10 und 100 eingeschaltet, ist $\sqrt[2]{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}6227766$; deren *log* ist 1,5. Eine Zahl zwischen 100 und 1000 wird $= \sqrt{100000} = 100\ \sqrt{10} = 316.227766$; deren *log* ist 2,5; und man ersieht, dafs die *log* dieser einzigen gleichliegenden Einschaltungszahlen nur in der Charakteristik verschieden sind, in der Mantisse aber dieselben bleiben.

Eine Zahl zwischen 1 und $\sqrt{10}$ eingeschaltet, giebt $\sqrt[4]{10} = 1{,}778279$; deren *log* 0,25.

Eine Zahl zwischen 10 und $10\sqrt{10}$ giebt $10\sqrt{10} = 17{,}78279$; deren $\log = 1{,}25$; und wieder sind die Decimalen in den *log* dieselben.

Fernere Einschaltungen zwischen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | und | $\sqrt[4]{10}$ | giebt | $\sqrt[8]{10} = 1{,}33352$; $\log = 0{,}125$ |
| 1 | „ | $\sqrt[8]{10}$ | „ | $\sqrt[16]{10} = 1{,}15478$; $\log = 0{,}0625$ |
| 1 | „ | $\sqrt[16]{10}$ | „ | $\sqrt[32]{10} = 1{,}07461$; $\log = 0{,}03125$ |
| 1 | „ | $\sqrt[32]{10}$ | „ | $\sqrt[64]{10} = 1{,}03663$; $\log = 0{,}015626$ |
| 1 | „ | $\sqrt[64]{10}$ | „ | $\sqrt[128]{10} = 1{,}01815$; $\log = 0{,}0078125$ |

Fährt man so fort, so kommt man endlich zu einer Zahl 1,00001; aufserdem hat man die Logarithmen einer Anzahl grofser Zahlen gefunden, die durch 2, 3, 5 u. s. w. theilbar sind, so dafs, wenn die *log* dieser ersten Prim-Zahlen bekannt wären, die *log* einer grofsen Anzahl anderer Primzahlen ergeben würden, indem man die Zahlen durch einander dividirt, und deren *log* von einander subtrahirt.

Man kann sich aber durch die Methode des Interpolirens den ersten Primzahlen beliebig nähern; z. B.:

Es ist $\sqrt[2]{10} = 3,162278$; $\log = 0,5$

„ „ $\sqrt[4]{10} = 1,778279$; $\log = 0,25$

das Glied zwischen beiden ist

$\sqrt[8]{10^3} = 2,37137$; $\log = 0,375$

das Glied zwischen $\sqrt[8]{10}$ und $\sqrt[8]{10^3}$ ist

$\sqrt[16]{10^5} = 2,053525$; $\log = 0,3125$

das Glied zwischen $\sqrt[4]{10}$ und $\sqrt[16]{10^5}$ ist

$\sqrt[32]{10^9} = 1,90656$; $\log = 0,28025$

das Glied zwischen $\sqrt[16]{10^5}$ und $\sqrt[32]{10^9}$ ist

$\sqrt[64]{10^{19}} = 1,97868$; $\log = 0,296375$

Zwischen $\sqrt[16]{10^5}$ und $\sqrt[64]{10^{19}}$

$\sqrt[128]{10^{39}} = 2,01575$; $\log = 0,3044375$

Zwischen $\sqrt[64]{10^{19}}$ und $\sqrt[128]{10^{39}}$ ist

$\sqrt[256]{10^{77}} = 1,99713$; $\log = 0,30040\ 625$

Zwischen $\sqrt[128]{10^{39}}$ und $\sqrt[256]{10^{77}}$ ist

$\sqrt[512]{10^{155}} = 2,00642$; $\log = 0,30242\ 1875$

Zwischen $\sqrt[256]{10^{77}}$ und $\sqrt[512]{10^{155}}$ ist

$\sqrt[1024]{10^{309}} = 2,00177$; $\log = 0,30141\ 40625$

Zwischen $\sqrt[256]{10^{77}}$ und $\sqrt[1024]{10^{309}}$ ist

$\sqrt[2048]{10^{617}} = 1,99945$;

$\log = 0,30091\ 01562\ 5$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[1024]{10^{309}}$ ist

$\sqrt[4096]{10^{1235}} = 2,00061$;

$\log = 0,30116\ 21093\ 75$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[4096]{10^{1235}}$ ist

$\sqrt[8192]{10^{2469}} = 2,00003$;

$\log = 0,30103\ 61328\ 125$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ ist

$\sqrt[16384]{10^{4937}} = 1,99974$;

$\log = 0,30097\ 31445\ 3125$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[16384]{10^{4937}}$ ist

$\sqrt[32768]{10^{9875}} = 1,99988$;

$\log = 0,30100\ 46386\ 71875$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[32768]{10^{9875}}$ ist

$\sqrt[65536]{10^{19751}} = 1,99995$;

$\log = 0,30102\ 03857\ 42187\ 5$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[65536]{10^{19751}}$ ist

$\sqrt[131072]{10^{39503}} = 1,9999913$:

$\log = 0,30102\ 82092\ 77343\ 4375$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[131072]{10^{39503}}$ ist

$\sqrt[262144]{10^{79007}} = 20000100$;

$\log = 0,30103\ 21710\ 44921$

Endlich erhält man $\log 2 = 0,3010299956..$ den man in den Tafeln für eine 7stellige Mantisse mit 0,3010300 aufführt.

Man nähert sich eben so der nächsten Primzahl 3, wenn man zwischen $\sqrt[2]{10} = 3,162278$ und $\sqrt[8]{10^3} = 2,37137$ wiederholentlich interpolirt; den folgenden Primzahlen 5 und 7, wenn man zwischen 10 und $\sqrt[2]{10}$ interpolirt; den Primzahlen 11 bis 97 durch Interpoliren zwischen 10 und 100.

Die vielen Zwischen-Arbeiten, um zu einer Primzahl zu kommen, sind nicht vergeblich, denn es werden dadurch die *log* höherer Primzahlen gefunden. Z. B.: Es ist oben durch Interpoliren ermittelt:

$\log 2053525 = 3125$

Dividirt man 2053525 durch 25, so erhält man 82141, eine 5stellige Primzahl. Hat man nun $\log 5 = 6989700$ gefunden, so ist

| | |
|---|---|
| $\log 25 = \log 5^2$ | $= 3979400$ |
| abgezogen von | 3125000 |
| giebt $\log 82141$ | $= 9145600$ |

Dieses Verfahren des Interpolirens beruht auf der Eingangs geschehenen Erklärung von Brigg. Log., und es ist auch eine grofse Anzahl von *log* durch Briggs nach demselben berechnet worden, wobei er sich noch der ad 2 gedachten Differenzenrechnung als Abkürzung bedient hat. Leichtere Methoden dafür werden in dem Art.: Logarithmus, angegeben werden. Vergl.: Basis eines Logarithmensystems.

**Brille.** Dieses so sehr gebräuchliche optische Instrument, um dem Auge beim Sehen zu Hülfe zu kommen, ist je nach Beschaffenheit des Augenfehlers zweierlei Art: fernsehend oder nahesehend. Die erstere B. entfernt das Bild eines nahen Gegenstandes dem nur fern sehenden Auge; die zweite B. rückt das Bild eines fernen Gegenstandes dem nur nahe sehenden Auge näher.

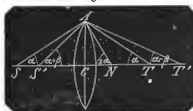
A. Brille für die Nähe, B. für Fernsehende, biconvexe B.

In dem Art. Brennglas, No. 2, ist erwiesen, dafs wenn Fig. 247 $\angle ASC = \angle ATC = \alpha$, und $T$ der Brennpunkt des erleuchtenden Punktes $S$ ist, der unter $\angle AS'C = \alpha + \beta$ einfallende Strahl den Brennpunkt $T'$ hat, welcher unter $\angle AT'C = \alpha - \beta$ gelegen ist, und dafs der Brennpunkt $N$ für $\mp$ der Axe einfallende Strahlen unter dem $\angle ANC = 2\alpha$ liegt. Man hat demnach wie dort näherungsweise $S'C \cdot$ Bog. $(\alpha + \beta) = T'C$.

Bog. $(\alpha - \beta) = NC \cdot$ Bog. $2\alpha$, oder wenn man die beliebige Länge $S'C = a$, die zugehörige $T'O = b$ und $NC = f$ setzt

$$a(\alpha + \beta) = b(\alpha - \beta) = 2f \cdot \alpha.$$

Fig. 261.




hieraus

$$\alpha' = \frac{b-a}{b+a}\,\alpha$$

also

$$b\left(\alpha - \frac{b-a}{b+a}\,\alpha\right) = 2f\alpha$$

woraus

$$f = \frac{ab}{a+b} \qquad (1)$$

oder wenn man umkehrt und $\frac{1}{f} = \frac{a+b}{ab}$ setzt, wie die Formel in der Regel ausgesprochen wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \qquad (2)$$

woraus man bei gegebener Brennweite $f$ und dem Abstand $a$ eines leuchtenden Punkts, den Abstand $b$ des zugehörigen Brennpunkts finden kann.

Ist $a > f$, so bleibt $b$ positiv, und zwar ist

$$b = \frac{af}{a-f} \qquad (3)$$

Es existirt also ein Brennpunkt $T'$ in der Axe $DE$ in der Entfernung $CT' = b$.

Ist $a = f$, so wird $\frac{1}{b} = 0$, also

$$b = \infty \qquad (4)$$

d. h. die Strahlen laufen mit der Axe $DE \mp$, denn erst in unendlicher Entfernung entsteht ein Durchschnittspunkt $T'$

Ist $a < f$, so wird $b$ negativ und zwar

$$b = -\frac{af}{f-a} \qquad (5)$$

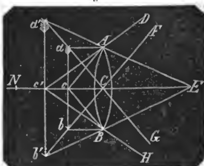
Ist nämlich der leuchtende Punkt $S'$ zwischen dem Brennpunkt $N$ und der Brille, so entstehen hinter derselben divergirende Strahlen, die rückwärts verlängert in einem Punkt von der Entfernung

$$b = \frac{af}{f-a}$$

in der Axe sich vereinigen.

2. Die vorstehenden Sätze sollen nun auf die biconvexe Linse als Brille angewendet werden. Es sei $AB$ ein Brillenglas für eine weitsichtige Person, der ein naher Gegenstand $ab$ in die Ferne gerückt werden mufs, damit sie ihn deutlich sehe, so ist dieser Gegenstand $ab$ zwischen das Glas und dessen Brennpunkt $N$ zu stellen. Die Strahlen durch $C$ gehen geradlinig durch, und das Auge hinter $AB$, welches sämmtliche durch $AB$ fallende Strahlen empfängt, sieht die Punkte $a$, $c$, $b$ nach den Richtungen $Ga$, $Ec$ und $Fb$. Der von $c$ auf $A$ fallende Strahl wird divergirend nach $AD$ gebrochen (wie der von $c$ auf $B$ nach $BH$), das Auge sieht also den Punkt $c$

Fig. 262.




zugleich in der Richtung $DA$, und versetzt $c$ in Gemeinschaft mit dem in der Richtung $Ec$ aus $c$ empfangenen Strahl nach $c'$ und $c'$ ist das Bild von $c$. Die Länge $c'C$ ist also das anletzt ermittelte $-b = -\frac{af}{f-a}$ (Formel 5), woraus $cC = a$ und $NC = f$ ist.

Eben so wird der Strahl $aA$ nach $AE$ gebrochen, und das Auge versetzt den Punkt $a$ gemeinschaftlich mit dem Strahl $Ga$ nach $a'$ und $a'$ ist das Bild von $a$, so wie $b'$ von $b$.

Die Strahlen von $a$ auf die Fläche zwischen $A$ und $C$ fallend, werden alle zwischen $AE$ und $CG$ gebrochen, und zwar so, dafs sie sämmtlich nach $a'$ gerichtet sind; die Strahlen von $c$ auf Punkte zwischen $A$, $C$ fallend in Strahlen zwischen $AD$ und $cE$ und alle so gelegen, dafs sie nach $c'$ gerichtet sind; desgleichen die Strahlen von $b$ auf die Fläche zwischen $B$ und $C$ brechen zwischen $BE$ und das Auge wirft sie nach $b'$. $a'b'$ ist das entferntere und gröfsere Bild des Gegenstandes $ab$, und dessen Vergröfserung geschieht in dem Verhältnifs von

$$cC : c'C = a : b.$$

3. Je nachdem $ab$ innerhalb der Brennweite $NC$ seine Stellung hat, fällt sein Bild $a'b'$ innerhalb oder aufserhalb der Brennweite.

Es sei

$$cC = a = \tfrac{1}{20} f$$

so ist

$$-b = -\frac{\tfrac{1}{20} f^2}{\tfrac{19}{20} f} = \tfrac{1}{19} f$$

das Bild liegt also in einem Abstande von dem Gegenstande $= (\tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{20}) f = \tfrac{1}{380} f$

und die Vergröfserung beträgt $\dfrac{f}{f-a} = \tfrac{20}{19}$,

das Bild ist also nur um $\tfrac{1}{19}$ gröfser. Dies Resultat stimmt mit der Erfahrung: wenn man nämlich ein Brillenglas dicht auf eine Schrift hält, so nimmt man eine Vergröfserung derselben kaum wahr.

Es sei

$$cC = a = \tfrac{19}{20} f,$$

so ist

$$b = \frac{\tfrac{19}{20} f^2}{f - \tfrac{19}{20} f} = 19 f$$

und die Vergröfserung beträgt das $\dfrac{b}{a} =$ 20fache, was auch die Erfahrung giebt; denn wenn man ein Brillenglas von der Schrift immer weiter entfernt, so erscheint sie immer gröfser aber auch immer undentlicher; endlich verschwindet sie ganz, und wenn man noch weiter entfernt, so erscheint sie wieder kleiner aber verkehrt; Eigenschaften, die noch zu erklären sind.

Für $a = \tfrac{1}{2} f$ entsteht $b = f$, das Bild erscheint in dem Brennpunkt und in dessen mit der Axe des Glases parallelen Ebene, die Vergröfserung beträgt das Doppelte; es ist also diese Stellung der zu lesenden Schrift angemessen, und wer eine Brille zum Lesen braucht, wählt solche, bei welcher er in angemessener Entfernung vom Auge die Schrift lesbar findet.

Die Brennweite $W$ ist nach dem Art.: Brennglas, No. 4, Formel II.

$$= \frac{r}{2(n-1)}$$

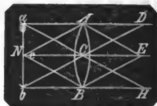
Setzt man den Brechungsexponent $n = \tfrac{3}{2}$, so hat man $W$ (hier $f$ bezeichnet) $= r$; wer also bei 10 Zoll Entfernung eine Schrift lesen will, nimmt eine B. No. 20, d. h. eine B., deren Gläser aus Kugeloberflächen von 20 Zoll Halbmesser bestehen, und die Schrift wird ihm durch die B. auf 20 Zoll Entfernung fortgerückt.

Erscheint dem unbewaffneten Auge ein Gegenstand erst in 30 Zoll Entfernung deutlich, so hat er die Schrift bei derselben B. 12 Zoll weit vom bewaffneten Auge zu entfernen, weil für $b = 30''$, $f = 20''$ aus obiger Formel $a = 12''$ entsteht, und das Bild erscheint ihm 10″ weit hinter dem Brennpunkt.

Bei $10'' = a =$ der Entfernung der Schrift und $b = 30''$ erhält man $f = 15''$ und das Bild erscheint in der doppelten Brennweite, wobei es noch scharf ist.

4. Stellt man den Gegenstand in den Brennpunkt $N$, so werden die von $a$ und $b$ auf $A$ und $B \mathbin{+\!\!\!\!\!\!\;\;}$ der Axe einfallenden Strahlen in dem Punkt $E$ gebrochen, der von $C$ so weit absteht, als $N$ von $C$, denn so wie $N$ der Brennpunkt der parallelen Strahlen $AD$, $BH$, so ist $E$ der Brennpunkt für die parallelen Strahlen $aA$, $bB$; die aus $c(N)$ auf $AB$ fallenden Strahlen gehen dagegen hinter dem Glase sämmtlich ‡ der Axe weiter fort. Anstatt also, dafs der Punkt $c$ durch divergirende Strahlen wie $DA$, Fig. 264, nach einem Punkt $c'$ der Axe als Bild geworfen wird, entsteht als Bild von $c$

Fig. 263.



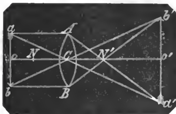

eine Kreisfläche von der Gröfse des Glases, und zwar in unendlicher Entfernung. Die von $a$ und $b$ durch $C$ fallenden Strahlen gehen nun wieder geradlinig nach $CH$ und $CD$ weiter fort. Daher ist $aH$ ‡ $AE$ und $bD$ ‡ $BE$. Also auch von den Punkten $a$ und $b$ entstehen Bilder wie $a'$, $b'$, Fig. 264, hier erst unendlich weit von $CN$ entfernt, weil $EA$ und $Ha$ erst in unendlicher Ferne sich schneiden, und

dies gilt von allen übrigen Punkten des Gegenstandes $ab$: Das Auge empfängt nur einen Lichteindruck ohne Bild. Führt man $ab$ um ein Geringes dem Glase näher, so entstehen zwar Durchschnittspunkte $a'$, $b'$, $c'$, wie Fig. 264, allein diese liegen so entfernt, und in dem Bilde $a'b'$ sind die Punkte von $ab$ so weit noch auseinander gerückt, dafs der Gegenstand nicht zu erkennen ist, wie man sich mit einem Brillenglase überzeugen kann.

5. Entfernt man $ab$ von $N$ aus weiter vom Glase, so entsteht der No. 1, Fig. 261 u. No. 3 gedachte Fall: $ab$ steht in $S'$ oder $S$, und $T'$, $T$ sind die zu ihnen gehörenden Brennpunkte.

Die Strahlen (Fig. 264) $aA$, $bB \parallel cC$ gehen gebrochen durch den Brennpunkt $N'$, die Strahlen $aC$, $bC$, $cC$ gehen ungebrochen fort, und es entsteht ein verkehrtes Bild $a'c'b'$ von $acb$, welches um so entfernter und gröfser ist, je näher

Fig. 264.

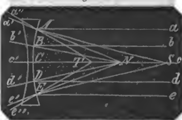



der Gegenstand $acb$ dem Brennpunkt $N$ sich befindet, und das um so näher und kleiner wird, je weiter man $ab$ von $N$ entfernt. Für $cC = 2NC$ entsteht das Bild $a'b'$ in der gleichen Entfernung $Cc' = 2CN'$ und ist mit dem Gegenstande gleich grofs. Um das verkehrte Bild von $ab$ betrachten zu können, mufs das Auge genau in $a'b'$ sich befinden.

B. Brille für die Ferne, B. für Nahsehende, biconcave B.

Setzt man No. 3 in $W = f = \frac{r}{2(n-1)}$ für biconvexe Gläser $-r$ für $r$, so hat man die Brennweite $W = -\frac{r}{2(n-1)}$ für biconcave Gläser; und $n = \frac{3}{2}$ genommen $f = -r$, d. h. parallel mit der Axe einfallende Strahlen divergiren der Art, dafs sie aus dem Brennpunkt $N$ zu kommen scheinen, der hier zum Zerstreuungspunkt wird. Von einem leuchtenden Punkt $S$ aus divergiren die Strahlen noch stärker, und diese vereinigen sich verlängert in einen Punkt $T$: die parallelen Strahlen $aA$, $bB$, $cC$, $dD$, $eE$ brechen sich nach den Richtungen $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$, $Dd'$, $Ee'$, und diese vereinigen sich, rückwärts verlängert in dem Brennpunkt $N$. Die von $S$ aus einfallenden Strahlen $SA$, .... $SE$ brechen sich nach $Aa'' \ldots Ee''$,

Fig. 265.




welche verlängert in $T$ sich vereinigen; $NC = f$, $TC < f$. Setzt man nämlich in F. 3, No. 1, $-f$ für $f$, weil der Brennpunkt concaver Gläser dem convexer Gläser entgegengesetzt liegt, so erhält man

$$b = \frac{a \cdot (-f)}{a+f} = -\frac{af}{a+f}$$

Es ist also $b$ jederzeit negativ, und liegt auf einerlei Seite mit $a$. Schreibt man

$$b = -\frac{f}{1 + \frac{f}{a}}$$

so ersieht man, dafs der Vereinigungspunkt $T$ von Strahlen, die aus einem leuchtenden Punkt $S$ herrühren, immer zwischen das Glas und den Brennpunkt fällt und schreibt man

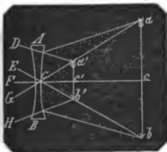
$$b = -\frac{f}{1 + \frac{f}{a}}$$

so ersieht man, dafs $b$ immer kleiner als $a$ wird: für $a(SC) = nf$ wird $b(TC) = \frac{n}{n+1} f$ und für $a = \frac{1}{n} f$ wird $b = \frac{1}{n+1} f$.

Wie das Bild eines fernen Gegenstandes $ab$ durch die B. nach $a'b'$ und zwar innerhalb der Brennweite gerückt wird, zeigt Fig. 266. Die Strahlen $aC$, $cC$, $bC$ gehen geradlinig nach $CG$, $CF$, $CE$ durch. Der Strahl $aA$ bricht divergent nach $AD$ und durch $DA$ verlängert in Gemeinschaft mit dem Strahl $Ga$ wird das Bild von $a$ nach $a'$ geworfen; eben so das Bild $b'$ durch die Strahlen $Eb$ und $HB$ und $a'b'$ ist das nahe aber kleinere Bild des fernen Gegenstandes $ab$. Ist $ab$ eine kleine Länge, und beträgt $Cc$ nur wenige Fufs,

so wird jeder kleine Theil von *ab* unter einem hinreichend grofsen Winkel gesehen, nnd das Bild *a'b'* wird genau erkannt, wie z. B. eine zu lesende Schrift; ist dagegen *ab* 100 Fnfs entfernt, so ist auch

Fig. 266.




der nnter dem $\angle aCb$ gesehens Gegenstand sehr grofs, und kleine Tleilchen desselben (z. B. Schrift) fallen unter einem zn kleinen Winkel auf das Glas, als dafs deren Bilder in *a'b'* genau zn erkennen wären, dafs also eine in *ab* befiudliche Schrift lesbar würde.

**Bruch** (Arithmetik) gebrochene Zahl, ist eino Zahl, deren Einheit (Bruch-Einheit) ein aliqnoter Theil der Einheit (1) von ganzen Zahlen ist, nnd die Brucheinheit selbst. Da die ganze Einheit unzählig viele aliquote Theile haben kann, so giebt es anch unzählig viele Brüche, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen. $\frac{5}{6}$ ist ein B., dessen Einheit $\frac{1}{6}$ ist; die Zahl 6, welche die Einheit nennt, heifst der Nenner, die Zahl 5, welche sie zählt, der Zähler. Der B. $\frac{5}{6}$ ist also der Inbegriff von 5 Theilen, deren die Eins 6 begreift, oder $\frac{5}{6}$ ist einer der 6 gleichen Theile, in welche die Zahl 5 getheilt ist. Nimmt man alle 6 Theile der Eins zusammen, d. i. 6 mal $\frac{1}{6} = \frac{6}{6}$, oder theilt man die Zahl 6 in 6 gleiche Theile, d. h. 6 dividirt durch 6, so erhält man die Eins wieder. Ueberhaupt ein B. mit gleichem Zähler nnd Nenner z. B. $\frac{6}{6} = 1$, also die absolute Einheit in Bruchform.

Brüche, die sich anf einerlei Einheiten beziehen (einerlei Nenner haben) heifsen gleichartig oder gleichnamig.

2. Ein B. < z. B. $\frac{2}{3}$ heifst eigentlicher oder ächter B. Ein B. > 1 z. B. $\frac{5}{4}$ heifst uneigentlicher oder unächter B.

Ein unächter B. als ganze Zahl mit hinzugeschriebenem ächten Bruch z. B. $3\frac{1}{8}$ heifst gemischter B., besser eine gemischte Zahl. In dieser Beziehnng heifsen B. ohne vorgeschriebene Ganze, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$ reine B.

Brüche, deren Zähler oder deren Nenner, oder deren Zähler und Nenner aus B bestehen, z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$ $\frac{\frac{4}{9}}{6}$ $\frac{7}{\frac{1}{11}}$ heifsen zusammengesetzte oder complexe, unreine B. oder Doppelbrüche. In dieser Beziehung heifsen B, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, z. B. $\frac{11}{13}$, $\frac{15}{8}$ einfache B.

3. Ein zusammengesetzter B. anderer Art ist der Kettenbruch; dieser hat den Zähler 1 und zum Nenner eine gemischte Zahl, deren ächter B. den Zähler 1 hat; z. B. $\frac{1}{2\frac{1}{8}}$ der zweite Nenner (hier 8) kann wieder aus einer gemischten Zahl bestehen, deren B. den Zähler 1 hat; z. B.

$$\frac{1}{2\frac{1}{6\frac{1}{4}}}$$

Der letzte Nenner (hier 4) kann nun ebenfalls statt einer ganzen Zahl eine gemischte Zahl sein, und so fort, deshalb schreibt man den ersten Kettenbruch

$$\frac{1}{2+\frac{1}{8}}$$

den zweiten

$$\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{4}}}$$

ein dritter würde geschrieben werden

$$\frac{1}{5+\frac{1}{7+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}}}$$

u. s. w., wodurch ein klarer Ueberblick gewonnen wird.

4. Brüche, deren Zähler = 1 und deren Nenner dekadische Zahlen sind, heifsen dekadische Brüche als

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$$

und in dieser Beziehnng nennt man die dekadischen Zahlen

1, 10, 100 ....

dekadische Ganze.

Jeder der eben geschriebenen B. ist 10mal so klein, als der ihm links nebenstehende; denn wenn man jedes Zehntel einer Zahl in 10 Theile theilt, so ist die Zahl in 100 Theile getheilt n. s. w. Setzt man die Zahlenfolge nach demselben Gesetz nach links weiter fort, so erhält man

$$\ldots .\ 1000\ 100\ 10\ 1\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{1000}\ \ldots .$$

So wie man nun bei einer nach dekadischem System geschriebenen Zahl die einzelnen ganzen Zahlen als Vielfache der zu derselben Zifferstelle gehörenden Einheit betrachtet, so kann dies auch mit den Brüchen geschehen.

Die Zahl 2453 ist $2 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$ wo 1000, 100, 10, 1 die Einheiten der Zifferstellen sind. Setzt man aber durch ein Komma (245,3) fest, dafs die 5 in der Einerstelle steht, so hat man die Zahl $245{,}3 = 200 + 40 + 5 + \frac{3}{10}$ oder $\frac{2453}{10}$; eben so ist die Zahl 1,245 $= 1 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 1\frac{245}{1000} = \frac{1245}{1000}$.

Die Zahl 0,48 heifst: keine Ganze $+ \frac{4}{10} + \frac{8}{100}$ (sprich: $\frac{4}{10}, \frac{8}{100}$ ohne plus) $= \frac{48}{100}$

In der Zahl 034 ist die Null an sich unnütz; sie bedeutet, dafs keine Tausende da sind; in der Zahl 6,540 ist die Null an sich unnütz; denn sie zeigt nur, dafs keine Tausendtel da sind; 00437, 12,00 ist = 437; 12. Dagegen 0,005 heifst: keine Ganze, keine Zehntel, keine Hundertel + 5 Tausendtel $= \frac{5}{1000}$

Solche in Form ganzer Zahlen mit einem Einerkomma geschriebenen Brüche heifsen **Decimalbrüche**, deren es wieder **ächte** und **unächte** giebt. Die Ziffern rechts dem Komma heifsen **Decimalstellen**.

5. Wird zu Zähler und Nenner eines B. einerlei Zahl addirt, oder von denselben einerlei Zahl subtrahirt, so wird der Werth des B. jedesmal geändert. Ist der B. ächt, so wird er bei Addition von einerlei Zahl gröfser, bei Subtraction kleiner. Bei unächten B. geschieht das Entgegengesetzte.

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b-a}{b(b+n)}$$

also für $b > a$ ist

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$$

Vergleicht man $\frac{a-n}{b-n}$ mit $\frac{a}{b}$ so findet man

$$\frac{a}{b} - \frac{a-n}{b-n} = n \cdot \frac{b-a}{b(b-n)}$$

also

$$\frac{a-n}{b-n} < \frac{a}{b}$$

wobei $n < b$ sein mufs. Für $b < a$ entsteht das Entgegengesetzte.

Man bringt einen B. auf die kleinsten Zahlen (s. Abbreviren der B., Aufheben der B.) durch Auffindung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen Zähler und Nenner, und dies geschieht nach und nach folgendermafsen:

Dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, z. B.

$$\frac{65}{104} = \frac{1}{1\frac{39}{65}} \text{ heifst } \frac{65}{104} = \frac{65}{1 \cdot 65 + 39}$$

Die 104 ist verschwunden, und man sieht, dafs der gröfste gemeinschaftliche Theiler zwischen 39 und 65 auch der zwischen 65 und 104 ist. Verfahre also ebenso mit $\frac{39}{65}$ so erhält man

$$\frac{1}{1\frac{26}{39}} \text{ d. h. } \frac{39}{65} = \frac{39}{1 \cdot 39 + 26}$$

und der gröfste gemeinschaftliche Theiler zwischen 26 und 39 ist auch der zwischen 39 und 65, folglich auch der zwischen 65 und 104. So weiter entsteht

$$\frac{26}{39} = \frac{1}{1\frac{13}{26}} = \frac{26}{1 \cdot 26 + 13}$$

so dafs 13, der gröfste gemeinschaftliche Theiler zwischen 65 und 104, gefunden ist.

Man sieht, dafs man bei dieser Operation den einfachen B. in den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

verwandelt hat, und dieser giebt immer den Werth eines B. in den kleinsten Zahlen an, wenn man ihn wieder in einen reinen B. umformt. Die Operation geschieht praktisch, wie folgende Darstellung zeigt:

$\frac{65}{104}$

```
65 | 104 | 1
       65 |
     39 | 65 | 1
          39 |
        26 | 39 | 1
             26 |
           13 | 26 | 2
                26 |
                 0
```

und die Partialquotienten 1, 1, 1, 2 bilden zugleich der Reihe nach die ganzen Nenner des Kettenbruchs.

6. Brüche können nur addirt und von einander subtrahirt werden, wenn sie sich auf einerlei Einheit beziehen, d. h. einerlei Nenner haben (s. Addition No. 6) z. B.

$$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}; \quad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}$$

Bei ungleichen Nennern sind erst gleiche Nenner zu schaffen, z. B. bei $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$, wo

der kleinste gemeinschaftliche Nenner, (der kleinste Generalnenner) nur $3 \cdot 5 = 15$ sein kann; dann hat man

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

und

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

mithin

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

Die Brüche $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}$ haben 8 zum kleinsten Generalnenner, mithin $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ genommen, giebt

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

Für die Addition mehrerer Brüche, deren Nenner zum Theil zusammengesetzte Zahlen unter sich sind, verfahre man, um ihren kleinsten Dividuus zu finden, nach folgendem Beispiel:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{9} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3} + \frac{3}{16} + \frac{13}{18}$$

schreibe die Nenner neben einander, wie

4, 8, 9, 12, 3, 16, 18

und streiche die Zahlen fort, welche Theiler von einer der übrigen Zahlen sind, also 4 als Theiler von 8; 8 als Theiler von 16; 3 als Theiler von 9; 9 als Theiler von 18, wie nachstehende Reihe, worin nur 12, 16, 18 übrig bleiben. Man nehme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4, | 8, | 9, | 12, | 3, | 16, | 18 |
| 4, | | | 3, | | 4, | 18 |
| 3, | | | 1, | | 4, | 6 |
| 2, | | | 1, | | 2, | 3 |

nun den gröſsten Theiler zweier (oder mehrerer) Zahlen, hier 4; diese vorgeschrieben, dividirt, kommt für 12 die 3; für 16 die 4, 18 bleibt 18; dividire so weiter und die Factoren des kleinsten Generalnenners sind $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 144$. Oder bei demselben Beispiel

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4, | 8, | 9, | 12, | 3, | 16, | 18 |
| 3, | | | 4, | | 16, | 6 |
| 2, | | | 2, | | 8, | 3 |
| 2, | | | 1, | | 4, | 3 |

mithin der Generalnenner wie oben:

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 =$ (geordnet) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$

Um den Zähler für $\frac{3}{4}$ zu finden, läſst man den Factor 4 fort und multiplicirt

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \times 3 = 36 \cdot 3 =$ . . . . . 108

Für $\frac{7}{8}$ läſst man die Factoren $2 \cdot 4 = 8$ fort, und multiplicirt $2 \cdot 3 \cdot 3 \times 7 = 18 \cdot 7 =$ . . . . . . . . . . . 126

Latus 234

Transport 234

Für $\frac{5}{9}$ läſst man die Factoren $3 \cdot 3 = 9$ fort, und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 4 \times 5 = 16 \cdot 5 =$ . . . . . . . . . 80

Für $\frac{11}{12}$ läſst man die Factoren $3 \cdot 4 = 12$ fort und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 3 \times 11 = 12 \cdot 11 =$ . . . . . . 132

Für $\frac{2}{3}$ läſst man den Factor 3 fort und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 2 = 48.2 =$ 96

Für $\frac{3}{16}$ läſst man die Factoren $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ fort und multiplicirt $3 \cdot 3 \times 3 = 9 \cdot 3 =$ . . . . . . . . 27

Für $\frac{13}{18}$ läſst man dia Factoren $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ fort und multiplicirt $2 \cdot 4 \times 13 = 8 \cdot 13 =$ . . . . . . . 104

Summa = 673

mithin die Summe

$$\frac{673}{144} = 4\frac{97}{144}$$

7. Ein B. kann durch eine ganze Zahl, eine ganze Zahl durch einen B., und ein B. durch einen B. multiplicirt und dividirt werden.

Ein B. wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn die Anzahl seiner Einheiten mit der Zahl vervielfacht werden, die Anzahl der Einheiten drückt aber der Zähler aus, mithin wird der Zähler multiplicirt; z. B.

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{12}{8}$$

hier kann mit 4 gehoben werden; nun ist aber

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 4}$$

mithin

$$\frac{3}{2 \cdot 4} \times 4 = \frac{3}{2}$$

folglich wird auch ein B. durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner mit derselben dividirt. Umgekehrte Operationen ergiebt die Division eines B. durch eine ganze Zahl; z. B.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}$$

oder

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{2}{7}$$

Mit einem B. multipliciren, heiſst mit dem durch den Nenner getheilten Zähler multipliciren, also mit dem Zähler multipliciren und mit dem Nenner dividiren; z. B.

$$8 \times \frac{5}{12} = \frac{8 \cdot 5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

und

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \left(\text{rechne } \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9 \cdot 3} \text{ dann } \frac{3 \cdot 8 \cdot 2}{4 \cdot 9 \cdot 4}\right) = \frac{2}{3}$$

**Umgekehrte Operationen** giebt die Division durch einen B.; also man dividirt durch einen B., wenn man diesen umkehrt und damit multiplicirt. Z. B.

$$8 : \frac{4}{5} = 8 \times \frac{5}{4} = \frac{8 \cdot 5}{4} \left(\text{rechne } \frac{8 \cdot 5 \cdot 2}{4}\right) = 10$$

$$\frac{5}{6} : \frac{15}{16} = \frac{5}{6} \cdot \frac{16}{15} = \frac{5 \cdot 16}{6 \cdot 15} \left(\text{rechne } \frac{5 \cdot 16}{6 \cdot 15 \cdot 3}\right.$$

$$\left.\text{dann } \frac{5 \cdot 16 \cdot 8}{6 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 3}\right) = \frac{8}{9}$$

**8. Man nennt die Zahl, welche aus der Vertauschung des Zählers mit dem Nenner entsteht, den umgekehrten Werth oder den reciproken Werth der ersten Zahl, z. B.** $\frac{3}{2}$ ist der reciproke Werth von von $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{1} = 4$ der von $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{2}$ der von $\frac{2}{1} = 2$.

**Bruch** (Dynamik), die gewaltsame Trennung der durch Cohäsion verbundenen Elemente eines festen Körpers. Diese geschiebt entweder 1) durch Zug, indem die Elemente geradlinig auseinander gezogen werden, und zerreifsend sich trennen; 2) durch Biegung, indem auf den Körper hebelartig eingewirkt wird, und das Zerreifsen um eine sich bildende Drehaxe geschieht; das eigentliche Zerbrechen eines Körpers; 3) durch Druck, indem die Elemente geradlinig zusammengedrückt werden, und nach den Seitenrichtungen hin einander ausweichen, eine Erscheinung, die man mit Zerquetschen bezeichnet.

Beim Zug werden die Körpertheilchen nur ausgedehnt, bei der Biegung werden die auf einer Seite der Drehaxe befindlichen Theilchen ausgedehnt, die auf der andern Seite befindlichen zusammengedrückt, und die Axe des Querschnitts, in der die Körpertheilchen weder ausgedehnt noch zusammengedrückt werden, heifst die neutrale Axe. Beim Zerquetschen werden die Körpertheilchen nur zusammengedrückt.

Man hat noch B. durch eine vierte Art von Einwirkung, nämlich dadurch, dafs der Körper an beiden Enden nach entgegengesetzten Richtungen um seine Axe gedreht wird; diese Wirkung, die Torsion (Verdrehungskraft) findet auf jede Welle statt, an welcher Kraft und Widerstand zugleich wirkt (vergl. Belastung, Brechungscoefficient).

**Bruch** (Mineral.) ist der Erfolg der unregelmäfsigen Structur eines Fossils, wenn es zertheilt wird; die Flächen, in welchen die Theilung geschieht, heifsen Bruchflächen. Diese erscheinen uneben, muschelig, oder splittrig oder hakig, oder bröcklig, erdig, im Gegensatz zu den glatten und ebenen Spaltungsflächen von Fossilien regelmäfsiger Structur (vgl. Blätterdurchgang).

**Bruchpotenz** ist eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, als:

$$10^{\frac{1}{7}};\ 2^{\frac{3}{4}}$$

Nun ist

$$10^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{10};\ 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

Der Zähler des Exponent zeigt also an, auf die wievielte Potenz die Grundzahl erhoben, und der Nenner, die wievielte Wurzel aus der mit dem Zähler gebildeten Potenz gezogen werden soll. Ein Mehreres s. u. Buchstabenrechnung, F.

**Buchstaben**, als allgemeine Zahlengröfsen, von denen jede einzelne symbolisch jede bestimmte Zahl vertritt, s. u. algebraische Zeichen. Unter $a$, $b$, $c$, ... kann man sich jede bestimmte Zahl von 0 ab vorstellen; nur ist $b$ eine andere Zahl als $a$ und $c$ eine dritte von beiden verschiedene Zahl.

**Buchstabenrechnung**, die Rechnung mit Buchstaben, ist der elementare Theil der Analysis, und sie verhält sich zu dieser wie ein Handwerk zu der ihm gleichnamigen Kunst. Der Art.: Algebraische Zeichen giebt vollständig die bei der B. übliche Bezeichnung; es sind also nur noch die Rechnungsarten zu betrachten.

A. Die Addition ist schon in dem Art.: Addition gezeigt. Die Subtraction ist eben so einfach, denn die allgemeine Regel ist: Man gebe dem Subtrahend das entgegengesetzte Vorzeichen und addire ihn so zum Minuend; also

$$3a - (+2a) = 3a + (-2a) = a$$

dieser Fall ist in dem Resultat von selbst klar, nämlich, dafs wenn $2a$ von $3a$ abgezogen werden, ein $a$ als Rest bleibt.

Dafs aber

$$3a - (-2a) = 3a + (+2a) = 5a$$

erhellt, wenn man dem Minuend den ihn nicht ändernden Werth $= 0$ hinzusetzt, und diesem die Form $+ 2a - 2a$ giebt; alsdann ist der Minuend

$$= 3a + 2a - 2a$$

und man sieht, dafs wenn $- 2a$ hinfortgenommen wird, $3a + 2a = 5a$ als Rest bleibt. Die Subtraction zusammengesetzter Buchstabenausdrücke geschieht demnach, wie bei der Addition, und dafs man die entgegengesetzten Vorzeichen im Subtrahend entweder darunter schreibt, wie in dem nachfolgenden Beispiel, oder es auch nur in Gedanken thut:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & = 4ab + 3c - 5d - 2f \\ \text{Subtr.} & = 2ab - 4c + 3d - 4f \\ & \quad\ \ - \qquad + \qquad - \qquad + \\ \hline \text{Rest} & = 2ab + 7c - 8d + 2f \end{array}$$

Bei gleichen Factoren von Producten, die von einander abzuziehen sind, wendet man die Klammer an (s. algebraische Zeichen) als

$$ab - cb = b(a - c)$$

womit die angezeigte Differenz $ab - cd$ in ein Product verwandelt worden ist. Die Addition und Subtraction von Brüchen geschieht, dafs man den einzelnen Gliedern einen gemeinschaftlichen Nenner giebt, und die Zähler dann addirt und subtrahirt. Z. B.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

$$\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm ac}{c}$$

B. Die **Multiplication** einfacher Buchstaben-Ausdrücke geschieht durch das Nebeneinandersetzen derselben:

$$a \times b = ab; \; c \times d \times e = cde$$

sind die Factoren Brüche, so multiplicirt man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner und hebt wo möglich auf:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

Multiplicationen zusammengesetzter Zahlen geschehen partialiter:

$$a \times (b + c)$$

heifst, es soll $(b + c)$ ver-$a$-facht werden, und dies geschieht, wenn man $b$ mal $a$, dann $c$ mal $a$ nimmt, und beide Partialproducte addirt; es ist also

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

Ist der Multiplicator ebenfalls zusammengesetzt, so wird auch mit diesem theilweise multiplicirt:

1. $(a+b)\times(c+d)$ ist $= a(c+d) + b(c+d)$ $= ac + ad + bc + bd$

$(a+b)\times(a+b)$ multiplicire:

$$\begin{array}{lr} a(a+b) = & a^2 + ab \\ b(a+b) = & ab + b^2 \\ \hline (a+b)\times(a+b) = \text{Summa} = & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

2. $(a-b)\times(a-b)$ multiplicire:

$$\begin{array}{lr} a\times(a-b) = & a^2 - ab \\ -b\times(a-b) = & -ab + b^2 \\ \hline (a-b)\times(a-b) = \text{Summa} = & a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Aus diesem Beispiel geht auch hervor, welche Vorzeichen des Products entstehen, je nachdem die Vorzeichen der Factoren sind; haben nämlich beide Factoren gleiche Vorzeichen, so erhält das Product das Vorzeichen +, haben beide Factoren ungleiche Vorzeichen, so erhält das Product das Vorzeichen −. Denn $+ a$ mit $+ b$ zu multipliciren heifst: $+ a$ soll $+ b$ oder $b$ mal genommen werden, es mufs also das Product $+ ab$ sein; eben so heifst $- a$ mit $+ b$ zu multipliciren, $- a$ soll $b$ mal genommen werden, und das $b$ fache von $(- a)$ ist offenbar $(- ab)$. Dagegen heifst: $+ a$ mit $- b$ zu multipliciren, $+ a$ soll $b$ mal und entgegengesetzt genommen werden, also $-(+ a\times b) = - ab$, und eben so $- a$ mit $- b$ zu multipliren, $- a$ soll $b$ mal und entgegengesetzt genommen werden, d. h. $- ab$ entgegensetzt, also $+ ab$.

3. $(a+b)\times(a-b)$ multiplicire:

$$\begin{array}{lr} a(a-b) = & a^2 - ab \\ +b(a-b) = & +ab - b^2 \\ \hline (a+b)(a-b) = \text{Summa} = & a^2 - b^2 \end{array}$$

4. $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$ multiplicire:

$$\begin{array}{lr} a\times(a^2+ab+b^2) = & a^3 + a^2b + ab^2 \\ -b\times(a^2+ab+b^2) = & -a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline \text{Product} = & a^3 - b^3 \end{array}$$

5. $(a-b)\;(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$

giebt das Product $a^{n+1} - b^{n+1}$

Man findet ferner:

6. $(a+b)\;(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

7. $(a+b)\;(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$

8. $(a+b)\;(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$

9. $(a+b)\;(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots \pm a^2b^{n-2} \mp ab^{n-1} \pm b^n) = a^{n+1} \pm b^{n+1}$

wo $+ b^{n+1}$ für ein gerades $n$, $- b^{n+1}$ für ein ungrades $n$ gilt.

C. Die **Division** einfacher Buchstaben-Ausdrücke geschieht dadurch, dafs man sie in Bruchform bringt:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Gleiche Buchstaben durch einander dividirt heben sich zu 1 auf

$$a : a = \frac{a}{a} = 1; \; ab : ac = \frac{b}{c}$$

Brüche dividirt man durcheinander, indem man den Divisor umkehrt, und ihn nun mit dem Dividend multiplicirt (s. Bruch, No. 7.)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

2. Da

$(+a)\,(+b) = +ab$ so ist $\frac{+ab}{+a} = +b$

$(+a)\,(-b) = -ab$ so ist $\frac{-ab}{+a} = -b$

$(-a)\,(+b) = -ab$ so ist $\frac{-ab}{-a} = +b$

$(-a)\,(-b) = +ab$ so ist $\frac{+ab}{-a} = -b$

Haben also Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so wird der Quotient positiv, bei ungleichen Zeichen wird der Quotient negativ.

3. Die Division einer mehrgliedrigen Gröfse durch einen einfachen oder mehrgliedrigen Divisor geschieht partiell.

1. Beisp.:

$$(aa \mp ab \pm bb) : b \text{ giebt } \frac{aa}{b} \mp a \pm b$$

oder wenn man ein Product von $n$ gleichen Factoren: $aaaa \ldots$ als Potenz $= a^n$ schreiht:

$$(a^2 \mp ab \pm b^2) : b \text{ giebt } \frac{a^2}{b} \mp a \pm b$$

indem man jedes einzelne Glied dividirt und die Partialquotienten durch die Vorzeichen der Dividendusglieder verhindet.

2. Beisp.:

$$\begin{array}{rl} (a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) & \\ \underline{a^2 + ab \qquad} & = a(a+b) \\ ab + b^2 & \\ & = ab + b^2 = b(a+1) \end{array}$$

Man übersieht, dafs man von den ersten beiden Gliedern $a(a+b)$ fortnehmen kann. Geschieht dies, so ist der Rest $= ab + b^2$ und dieser ist $= b(a+1)$ hinfortgenommen, hleiht der Rest $= 0$.

Der Quotient ist also $a + b$, und man hat so verfahren, als wenn man das Exempel schriebe

$$(a^2 + ab + ab + b^2) : (a + b)$$

und verführe wie bei dem ersten Beispiel, nämlich

$$\frac{a^2 + ab}{a + b} + \frac{ab + b^2}{a + b} = \frac{a(a+b)}{a+b} + \frac{b(a+b)}{a+b} = a + b$$

Nicht immer sind die Partialquotienten sogleich zu erkennen, es muſs sodann versuchsweise verfahren werden.

3. Beisp.:

$$(a^3 - b^3) : (a - b)$$

schreib

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \underline{a^3 - a^2 b} & \overline{a^2 + ab + b^2} \\ \quad + a^2 b - b^3 & \\ \quad \underline{\;\; a^2 b - ab^2} & \\ \qquad + ab^2 - b^3 & \\ \qquad\;\; ab^2 - b^3 & \end{array}$$

Man sagt nämlich, $a$ in $a^3$ geht $a^2$mal, setzt $a^2$ als ersten Theilquotient unter $a - b$, multiplicirt $(a - b)$ mit $a^2$, giebt $a^3 - a^2 b$, setzt dies Product unter $a^3 - b^3$, zieht ab und erhält den Rest $ab^2 - b^3$, man hat also $(a - b)$, $a^2$mal abgezogen, und es ist nun zu rechnen, wie oft $a - b$ noch in diesem Rest enthalten ist; man sagt $+ a$ in $+ a^2 b$ geht $+ ab$mal; $+ ab$ ist der zweite Theilquotient, $ab$ mit $a - b$ multiplicirt giebt $a^2 b - ab^2$, dies darunter gesetzt, abgezogen, hleibt Rest $+ ab^2 - b^3$; $+ a$ in $+ ab^2 = + b^2$ giebt den 3. Theilquotient und $b^2 \times (a - b)$ ist = dem Rest, folglich ist der gesuchte Quotient

$$= a^2 + ab + b^2$$

Geht der Divisor in den Dividend nicht auf, so erhält man als Quotient eine unendliche Reihe.

Beispiel $\frac{a}{1+x}$ schreib:

$$\begin{array}{l|l} & \;\; 1 + x \\ a & \overline{\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;} \\ \underline{a + ax} & a - ax + ax^2 - ax^3 + \ldots \pm ax^n \\ \quad - ax & \\ \quad \underline{- ax - ax^2} & \\ \qquad + ax^2 & \\ \qquad \underline{+ ax^2 + ax^3} & \\ \qquad\qquad - ax^3 & \end{array}$$

oder dasselhe Beispiel $\frac{a}{x+1}$ schreih

$$\begin{array}{l|l} & \;\; x + 1 \\ a & \overline{\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;} \\ \underline{a + \frac{a}{x}} & \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} - \ldots \pm \frac{a}{x^n} \\ \quad - \frac{a}{x} & \\ \quad \underline{- \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2}} & \\ \qquad + \frac{a}{x^2} & \end{array}$$

und man hat aus beiden Resultaten

$$a - ax + ax^2 - \ldots \pm ax^n = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \ldots \pm \frac{a}{x^n}$$

D. Die Rechnung mit Potenzen hat auch ihre 4 Species.

Addirt und subtrahirt können nur Potenzen werden, wenn sie einerlei Wurzel und einerlei Exponent haben, wenn sie also einander gleich sind.

$$a^x - 3a^x + 7a^x = 5a^x$$

$$ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c)x^n$$

Potenzen mit verschiedenen Wurzeln und mit verschiedenen Exponenten werden eben so addirt und subtrahirt, wie ungleiche Buchstabengrößen:

$$a^n \pm b^n \mp a^m \text{ bleibt } a^n \pm b^n \mp a^m$$

Multiplicirt und dividirt können Potenzen nur werden, wenn sie gleiche Wurzeln oder bei verschiedenen Wurzeln gleiche Exponenten haben:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Denn $a^m$ ist das Product, welches aus $m$ Factoren besteht, von denen jeder $= a$ ist, und $a^n$ ist das Product, in dem $a$ als Factor $n$ mal ist, folglich hat das Product $a^m \cdot a^n$ die Zahl $a$ als Factor $(m + n)$ mal, eine Potenz, die durch $a^{m+n}$ ausgedrückt wird. Hiernach ist

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

nämlich $a^{m-n}$ wenn $m > n$; $\frac{1}{a^{n-m}}$ wenn $n > m$ ist.

Setzt man $m \gtrless n$, so bleiben beide Quotienten gültig, und es ist allgemein:

$$a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

also

$$\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = \frac{1}{a^{5-7}} = a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

und

$$\frac{a^3}{a^8} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

Hiernach erklären sich Potenzen mit negativen Exponenten, und man kann auch mit solchen multipliciren und dividiren, als

$$a^{-3} \times a^{+4} = a^{4-3} = a = \frac{1}{a^{-1}}$$

$$a^{-3} \times a^{-4} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$

$$\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3+5} = a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

$$\frac{a^{+3}}{a^{-5}} = a^{3+5} = a^8 = \frac{1}{a^{-8}}$$

$$\frac{a^{-3}}{a^{+5}} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

2. $a^n \times b^n = (ab)^n$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

E. Wurzelgrößen können nur addirt und subtrahirt werden, wenn sie gleiche Potenzen und gleiche Exponenten haben.

$$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{c} = (a \pm b)\sqrt[m]{c}$$

$$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{d} \text{ bleibt } a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{d}$$

$$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{d} \text{ bleibt } a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{d}$$

$$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{c} \text{ bleibt } a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{c}$$

Dagegen kommt es vor, daſs Reductionen möglich werden, wenn nämlich in Buchstaben- oder Zahlen-Ausdrücken Formen wie

$$\sqrt[n]{a^n b}, \quad \sqrt[n]{a^{m+n} b}$$

u. dgl. mehr sich befinden, so daſs eine theilweise Wurzelausziehung geschehen kann.

Beisp. I.:

$$7 \cdot \sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{128}$$

ist

$$= 7\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt[3]{2 \cdot 2^3} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 4^3}$$

$$= (21 + 6 + 1 - 20)\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$$

Beisp. II.:

$$\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{be^2}}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{c}{b}} + \frac{ac}{d}\sqrt{\frac{c}{b}} - \frac{ad}{e}\sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{ac}{d} - \frac{ad}{e}\right)\sqrt{\frac{c}{b}}$$

Wurzelgrößen können mit einander nur multiplicirt werden, wenn sie einerlei Exponent haben, als

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$$

Haben die Größen verschiedene Exponenten, so kann man sie in Wurzeln von gleichen Exponenten verwandeln, wie man Brüchen von verschiedenen Nennern einerlei Nenner giebt. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

denn setzt man

$$a^n = b$$

so ist $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b} =$ der derjenigen Zahl, welche $n$mal multiplicirt $b$ giebt, und diese Zahl ist keine andere als $a$; weil $a$, $n$mal mit sich selbst multiplicirt $a^n = b$ ist. Dem-

nach ist z. B. $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$, und diese Formänderung giebt das Mittel für Herstellung einerlei Exponenten. Denn soll $\sqrt[m]{a}$ mit $\sqrt[n]{a}$ multiplicirt werden, so erhält man

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[mn]{a^{n+m}}$$

Beispiele:

1. $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mn]{a^{mm}}\times\sqrt[mn]{a^{nn}}=\sqrt[mn]{a^{mm+nn}}=\sqrt[mn]{(a^{m+n})^2}=\sqrt[\frac{mn}{2}]{a^{m+n}}$
2. $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{a^m}\times\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^m b^n}$
3. $b\sqrt{a}\times c\sqrt{a}=abc$
4. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[6]{3}\times\sqrt[8]{8}=\sqrt[24]{4^8}\times\sqrt[24]{3^4}\times\sqrt[24]{8^3}=\sqrt[24]{2^{16}}\cdot\sqrt[24]{3^4}\cdot\sqrt[24]{2^9}=\sqrt[24]{2^{16}\cdot3^4\cdot2^9}=2\sqrt[24]{2\cdot3^4}=2\sqrt[24]{162}$
5. $(3+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=1-\sqrt{5}$
6. $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\times\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\sqrt[n]{a^2-b}$

Wurzelgrößen können durch einander nur dividirt werden, wenn sie einerlei Exponent haben.

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}:\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$$

F. So wie

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[m.n]{a^n}$$

so ist auch

und $$\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[\frac{mn}{n}]{a^{\frac{n}{n}}}=\sqrt[m]{a}$$

$$\sqrt[mn]{a^r}=\sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}}=a^{\frac{r}{mn}}$$

überhaupt

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Die Rechnung mit Wurzelgrößen kann also in eine Rechnung mit Potenzen und zwar mit Bruchpotenzen verwandelt werden, und man hat folgende alle möglichen Fälle einschließende Formeln:

1. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
2. $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n b^p c^q}=a^{\frac{n}{m}}\cdot b^{\frac{p}{m}}\cdot c^{\frac{q}{m}}=(a^n b^p c^q)^{\frac{1}{m}}$
4. $\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^q d^r}}=\frac{a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}}{c^{\frac{q}{m}}d^{\frac{r}{m}}}=\left(\frac{a^n b^p}{c^q d^r}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}c^{-\frac{q}{m}}d^{-\frac{r}{m}}=(a^n b^p c^{-q} d^{-r})^{\frac{1}{m}}$
5. $\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[qn]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{qn}}$
6. $\sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p}=\frac{1}{\sqrt[qn]{a^{mp}}}=\frac{1}{a^{\frac{mp}{qn}}}=a^{-\frac{mp}{qn}}$

Rechnung mit Bruchpotenzen.

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{p}{q}}=a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}=a^{-\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{np-mq}{nq}} = a^{-\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = a^{2\frac{1}{12}} = a^{2+\frac{1}{12}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{12}} = a^2 \sqrt[12]{a}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = a^{1\frac{1}{12}} = a^{1+\frac{1}{12}} = a \sqrt[12]{a}$$

$$a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

$$a^{\frac{5}{6}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} = a \sqrt[3]{a}$$

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

**Bürgerliches Jahr** s. u. astronomisches Jahr.

**Bürgerlicher Monat** s. u. astronomischer Monat.

**Bürgerlicher Tag** s. u. astronomischer Tag.

**Bürgerliche Zeit** s. u. astronomischer Tag.

## Inhaltsverzeichnifs und Sachregister.

(Die Gegenstände als Ueberschriften der Artikel sind gesperrt gedruckt, das Sternchen bei der Seitenzahl bedeutet die zweite Spalte.)

### A.

## C.



## D.



## E.

T.



U.



V.

### W.



### Z.

Berlin, Druck der Gebr. Unger'schen Hofbuchdruckerei.